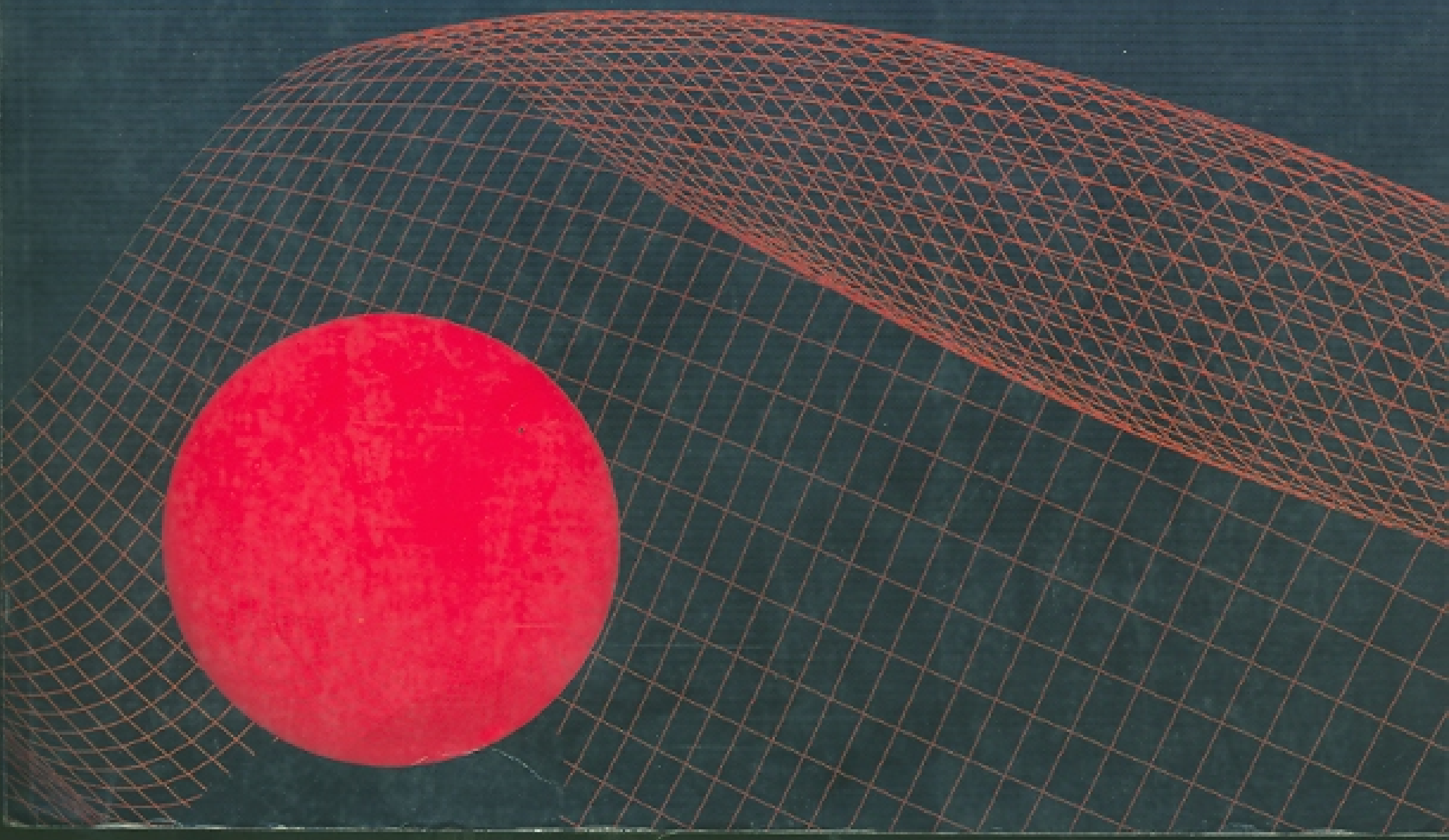
THOMSON

Cálculo

VOLUME I

5ª edição

James Stewart



THOMSON

Cálculo

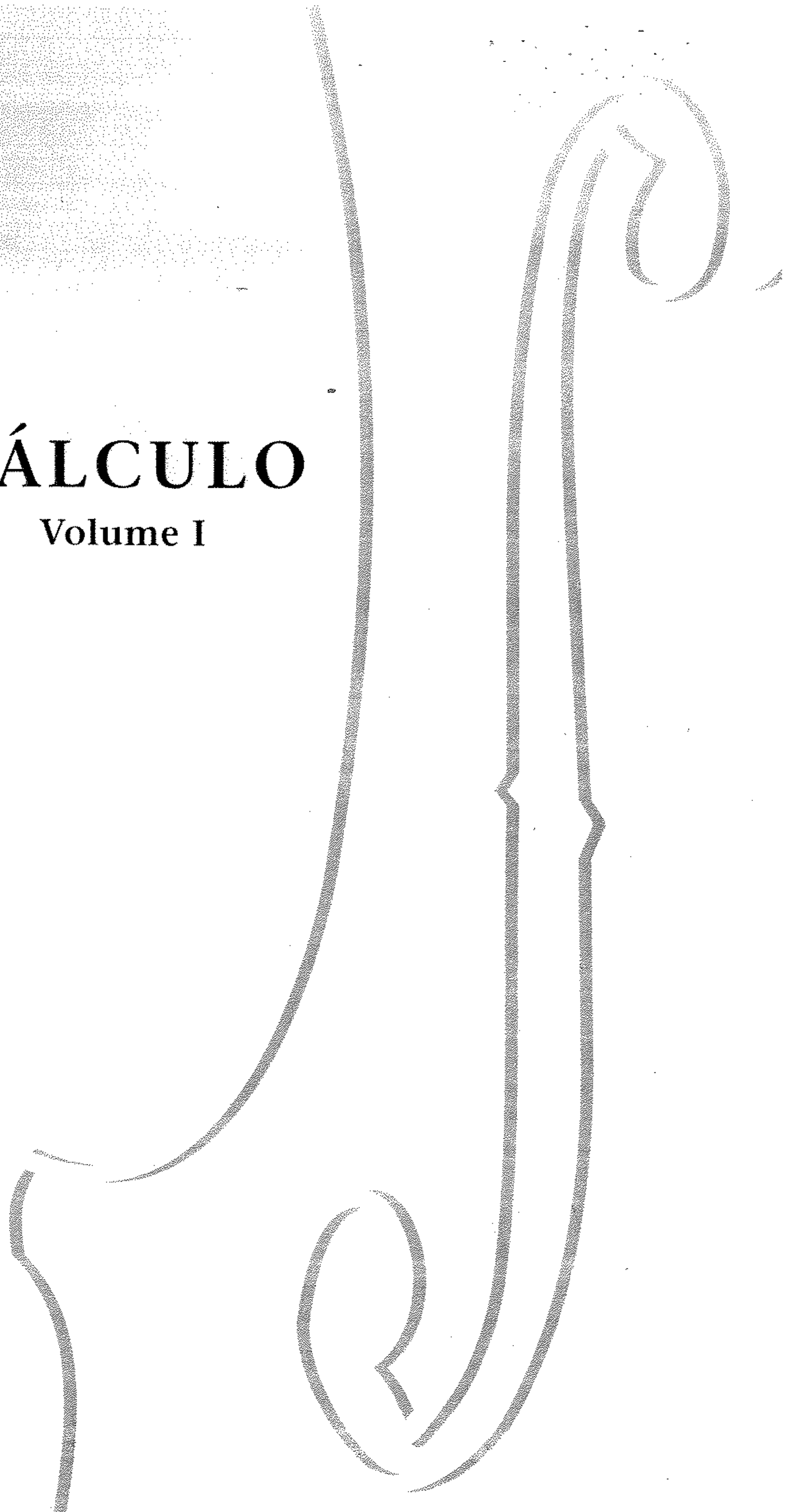
VOLUME I

5ª edição

James Stewart

CÁLCULO

Volume I



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart. –5. ed. –
São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2006.

Título original: Calculus.
Vários tradutores.
Bibliografia.
ISBN 85-221-0479-4

1. Cálculo I. Título

05-5022 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515

CÁLCULO

Volume I

5ª EDIÇÃO

JAMES STEWART
McMaster University

Tradução Técnica

Antonio Carlos Moretti
Doutor em Engenharia Industrial pela Georgia Institute of Technology
e Professor Livre-Docente do Imeec – Unicamp
Antonio Carlos Gilli Martins
Doutor em Matemática pela Unicamp e Professor Doutor do Imeec – Unicamp

THOMSON

Austrália Brasil Canadá Cingapura Espanha Estados Unidos México Reino Unido

THOMSON

Editora de Desenvolvimento:
Ada Santos Seles

Supervisora de Produção Editorial:
Patricia La Rosa

Produtora Editorial:
Ligia Cosmo Cantarelli

Produtora Gráfica:
Fabiana Alencar Albuquerque

Tradução Técnica:
Antonio Carlos Moretti
Antonio Carlos Gilli Martins

Copidesque:
Maria Alice da Costa

Revisão:
Silvana Gouveia
Alessandra Miranda de Sá

Composição:
Marco Zero

Capa:
FZ. Dáblio Design Studio

Título, Edição e ISBN do Original:
Calculus, 5th, ISBN : 0-534-39-321-7

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
5 6 7 8 08 07 06
Setembro de 2005.

Rua Traipu, 114 – 3º andar
Perdizes – CEP 01235-000
São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900
Fax: (11) 3665-9901

sac@thomsonlearning.com.br
www.thomsonlearning.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James

Cálculo, volume I / James Stewart. – 5. ed. – São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2006.

Título original: Calculus.
Vários tradutores. Bibliografia.
ISBN 85-221-0479-4

1. Cálculo. I. Título.

05-5022 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 515

Aos meus alunos, antigos e presentes.

Prefácio

> Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.
>
> *George Polya*

A arte de ensinar, segundo Mark van Doren, é a de tomar parte em descobertas. Tentei escrever um livro que tome parte na descoberta do cálculo pelos estudantes – por seu aspecto prático bem como por sua surpreendente beleza. Nesta edição, como nas anteriores, pretendi transmitir aos estudantes um sentido de utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, como também me empenhei em dar uma avaliação da beleza intrínseca do assunto. Newton, sem dúvida, experimentou uma sensação de triunfo no momento de suas grandes descobertas. Eu gostaria que os estudantes partilhassem dessa emoção.

A ênfase está na compreensão dos conceitos. Penso que todos concordam que esta deve ser a meta principal no ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o atual movimento de reforma do cálculo vem da Conferência de Tulane, de 1986, que formulou como recomendação fundamental:

Focalizar na compreensão conceitual.

Tentei implementar essa meta pela Regra de Três: "Tópicos devem ser apresentados de forma geométrica, numérica e algebricamente". Visualização, experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram radicalmente a forma de ensinar o raciocínio conceitual. Mais recentemente, a Regra de Três foi expandida, tornando-se a *Regra de Quatro*, com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo.

Ao preparar esta edição parti da premissa de que é possível alcançar a compreensão conceitual e ainda manter as melhores tradições do cálculo tradicional. O livro contém elementos de reforma, mas dentro de um contexto de um currículo tradicional.

O Que É Novo Nesta Edição

Enquanto preparava a quinta edição deste livro, passei um ano na Universidade de Toronto ensinando Cálculo utilizando a edição anterior. Eu ouvia atentamente as perguntas de meus alunos e as sugestões de meus colegas. E, cada vez que preparava uma aula, ficava pensando se algum exercício a mais era necessário ou se uma frase deveria ser melhorada ou, ainda, se uma seção deveria ter mais exercícios de um certo tipo. Além disso, prestei muita atenção às sugestões enviadas por vários leitores e aos comentários dos meus revisores.

Uma fonte não muito comum de problemas novos foi um telefonema de um amigo, Richard Armstrong. Richard é sócio de uma firma de consultoria em engenharia e orienta os clientes que constroem hospitais e hotéis. Ele me disse que, em certas partes do mundo, os sistemas de *sprinklers* de prédios grandes são abastecidos de água por compartimentos localizados nos tetos desses prédios. Naturalmente ele sabia que a pressão da água diminui quando o nível de água decresce, mas queria quantificar esse decréscimo de maneira que seus clientes pudessem garantir uma certa pressão durante um dado período.

Eu lhe disse que poderia resolver este problema usando as equações diferenciais separáveis, porém ocorreu-me que esse problema poderia gerar um bom projeto de pesquisa quando combinado com outras idéias.

A estrutura desta edição permanece praticamente a mesma da anterior, no entanto, há vários melhoramentos, pequenos e grandes:

- A revisão de funções trigonométricas inversas foi mudada do Apêndice para a Seção 1.6.
- Novas frases e notas de rodapé foram inseridas no texto para dar mais clareza à exposição.
- Vários trabalhos de arte foram redesenhados.
- Os dados em exemplos e os exercícios foram atualizados no tempo.
- Exemplos foram adicionados. Por exemplo, foi adicionado um novo Exemplo 1 na Seção 5.3 (página 394) porque alguns alunos tiveram uma certa dificuldade em entender a noção de uma função definida por uma integral com um limite de integração variável. Eu acho que seria interessante dar uma olhada no Teorema Fundamental do Cálculo antes de ler o Exemplo 1.
- Foram incluídos determinados itens em alguns dos exemplos já existentes.
- Cerca de 25% dos exercícios em cada capítulo são novos. Aqui estão alguns dos meus favoritos:

Exercício	Página	Exercício	Página	Exercício	Página
2.8.34	164	3.9.55	254	4.4.74	315
5.4.52	410	7.7.36	524		

  Foram adicionados novos problemas nas seções *Problemas Quentes*. Veja, por exemplo, os Problemas 20 e 21 na página 277, os Problemas 9 e 10 na página 585.
- Cinco novos projetos foram incluídos. O projeto na página 242 pede ao aluno para desenvolver um projeto de montanha-russa de maneira que os trilhos sejam suaves nos pontos de transição. O projeto da página 550, o qual agradeço a Larry Riddle pela idéia, é na verdade uma competição na qual a curva vencedora tem o menor comprimento de arco (dentro de certas classes de curvas).

Características

Exercícios Conceituais A maneira mais importante de encorajar a compreensão conceitual é através dos problemas que prescrevemos. Com essa finalidade delineei vários tipos de novos problemas. Alguns conjuntos de exercícios começam com questões exigindo a explicação do significado do conceito básico da seção. (Veja, por exemplo, os primeiros exercícios, nas Seções 2.2, 2.5, 2.7) Analogamente, todas as seções de revisão começam por uma verificação conceitual e um teste do tipo verdadeiro–falso. Outros exercícios testam a compreensão conceitual por gráficos e tabelas (veja os Exercícios 2.8.1-3, 2.9.35-38 e 3.7.1-4. Outro tipo de exercício usa a descrição verbal para testar a compreensão conceitual (veja os Exercícios 2.5.8, 2.9.48, 4.3.59-60 e 7.8.67). Eu particularmente valorizo os problemas que combinam e comparam as abordagens gráficas, numéricas e algébricas (veja os Exercícios 2.6.35-36 e 3.3.23).

Conjuntos de Exercícios Graduados Cada conjunto de exercícios é cuidadosamente graduado, progredindo desde os exercícios conceituais básicos e problemas destinados a desenvolvimento de habilidades até problemas mais desafiadores envolvendo as aplicações e provas.

Dados do Mundo Real Meu assistente e eu despendemos um bom tempo em bibliotecas, contatando companhias e agências governamentais e procurando na Internet por dados do mundo real para introduzir, motivar e ilustrar os conceitos do cálculo. Como resultado, muitos de nossos exemplos e exercícios tratam de funções definidas por esses dados numéricos ou gráficos. Veja, por exemplo, as Figuras 1, 11 e 12 na Seção 1.1 (sismogramas do terremoto de Northridge), Exercício 2.9.36 (porcentagem da população com idade inferior a 18 anos), Exercício 5.1.14 (velocidade do ônibus espacial *Endeavour*) e Figura 4 da Seção 5.4 (consumo de energia em São Francisco).

Projetos Uma maneira de envolver os estudantes e então torná-los aprendizes ativos é fazê-los trabalhar (talvez em grupos) em projetos de extensão, que dão um grande sentimento de realização quando finalizados. Isso inclui quatro tipos de projetos. *Projetos Aplicados*, que envolvem as aplicações destinadas a apelar para a imaginação dos estudantes. *Projetos Escritos*, que pedem aos estudantes que comparem os métodos atuais com aqueles usados pelos fundadores do cálculo (por exemplo, o método de Fermat para encontrar tangentes). São sugeridas algumas referências. *Projetos Descobertas*, que antecipam os resultados que serão discutidos posteriormente ou encorajam a descoberta por meio do reconhecimento do padrão (veja a Seção 7.6).

Tecnologia A disponibilidade de tecnologia torna ainda mais importante compreender claramente os conceitos que fundamentam as imagens na tela. Quando usados adequadamente, calculadoras gráficas e computadores são ferramentas valiosas na descoberta e compreensão desses conceitos. Este livro pode ser usado com ou sem tecnologia, e usei dois símbolos especiais para indicar quando um tipo especial de máquina é necessário. O ícone indica um exemplo ou exercício que requer o uso dessa tecnologia, mas isso não significa que ela não possa ser usada também em outros exercícios. O símbolo é reservado para os problemas em que é requerida toda a capacidade de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI89/92). Todavia, a tecnologia não torna obsoletos o lápis e o papel. Os cálculos à mão e esboços são freqüentemente preferíveis à tecnologia para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Professores e estudantes precisam desenvolver a habilidade para decidir quando é mais apropriada a máquina ou a mão.

Resolução de Problemas

Os estudantes geralmente têm dificuldades com os problemas para os quais não há um único procedimento bem-definido para obter a resposta. Penso que ninguém usa adequadamente a estratégia das quatro etapas para a solução dos problemas proposta por George Polya e, por isso, incluí uma versão de seus princípios no fim do Capítulo 1. Esses conceitos são aplicáveis, explícita e implicitamente, em todo o livro. Após os outros capítulos coloquei seções denominadas *Problemas Quentes*, que apresentam como atração principal os exemplos de como atacar os problemas desafiadores do cálculo. Ao selecionar os variados problemas para essas seções tive em mente seguir os conselhos de David Hilbert: "Um problema matemático deve ser difícil para nos seduzir, mas não inacessível de forma a zombar de nossos esforços". Quando coloquei esses problemas desafiadores como tarefas de testes, graduei-os de diferentes maneiras. Aqui, eu recompensei significativamente o estudante por idéias na direção de uma solução e por reconhecer quais princípios da solução de problemas são relevantes.

Conteúdo

Uma Apresentação do Cálculo

O livro começa com uma visão geral do assunto, incluindo uma lista de questões pa motivar o estudo do cálculo.

Capítulo 1 Funções e Modelos

Desde o início estão enfatizadas as representações múltiplas de funções: verbal, numéric visual e algébrica. Uma discussão de modelos matemáticos leva a uma revisão das funçõe padrão, incluindo a função exponencial e logarítmica, sob esses quatro pontos de vista.

Capítulo 2 Limites e Derivadas

O material sobre limites está motivado por uma discussão anterior dos problemas da ta gente e da velocidade. Os limites são tratados sob os pontos de vista descritivo, gráfic numérico e algébrico. A Seção 2.4, sobre a definição precisa de um limite em termos d ε-δ, é opcional. As Seções 2.8 e 2.9 tratam de derivadas (especialmente de funções definid gráfica e numericamente) antes das regras de diferenciação, cobertas no Capítulo 3. Aqui c exemplos e exercícios exploram os significados das derivadas em vários contextos.

Capítulo 3 Regras de Diferenciação

Todas as funções básicas são diferenciadas aqui, incluindo a exponencial, logarítmica inversa das funções trigonométricas. Quando as derivadas são computadas em aplicaçõe os estudantes são questionados a explicar seus significados.

Capítulo 4 Aplicações da Diferenciação

As seções sobre as funções monótonas e concavidade foram combinadas em uma únic que explica como as derivadas afetam o aspecto do gráfico. Fazer gráficos com tecnologi enfatiza a interação entre cálculo, calculadoras e análise de famílias de curvas. São dad problemas substanciais de otimização, inclusive uma explicação de por que você deve elevar sua cabeça 42° para ver o topo de um arco-íris.

Capítulo 5 Integrais

Os problemas de área e distância servem para motivar a integral definida, com a notaçã somatória introduzida conforme necessário. (Uma cobertura completa da notaçã somatória é dada no Apêndice E.) A ênfase está colocada na explicação do significado d integral em vários contextos, bem como na estimativa dos valores dela a partir de gráfico e tabelas.

Capítulo 6 Aplicações de Integração

Apresentei aqui as aplicações da integração – área, volume, trabalho, valor médio –, que pode ser feitas razoavelmente sem técnicas especializadas de integração. São enfatizados os método genéricos. A meta é tornar os estudantes capazes de dividir uma quantidade em partes pequena estimar com somas de Riemann e reconhecer o limite como uma integral.

Capítulo 7 Técnicas de Integração

Todos os métodos tradicionais são estudados neste capítulo, mas o desafio é reconhece qual técnica é melhor em determinada situação. Da mesma forma, na Seção 7.5, apresentei a estratégia para a integração. O uso de sistemas algébricos computacionais está discutido na Seção 7.6.

Capítulo 8 Mais Aplicações de Integração

Expomos aqui as aplicações de integração – comprimento do arco e área da superfície para as quais é útil ter disponível todas as técnicas de integração, bem como aplicações biologia, economia e física (força hidrostática e centro de massa). Uma nova seção sobr probabilidade foi também incluída. Há aqui mais aplicações do que realisticamente poden ser cobertas em um dado curso. Cabe aos professores selecionar aquelas adequadas a seu alunos e pelas quais têm mais entusiasmo.

Agradecimentos

A preparação desta edição e das anteriores envolveu várias horas na leitura dos conselhos "algumas vezes contraditórios" de um grande número de bons revisores. Agradeço enormemente o tempo despendido por eles para compreender os motivos pelos quais segui em uma determinada direção. Aprendi um pouco com cada um deles.

Revisores desta edição

Martina Bode (Northwestern University), Gary W. Harrison (College of Charleston), Hussain S. Nur (California State University, Fresno), Philip L. Bowers (Florida State University), Randall R. Holmes (Auburn University), Scott Chapman (Trinity University), James F. Hurley (University of Connecticut), Mike Penna (Indiana University-Purdue, University of Indianapolis), Charles N. Curtis (Missouri Southern State College), Matthew A. Isom (Arizona State University), John Ringland (State University of New York em Buffalo), John W. Davenport (Georgia Southern University), Zsuzsanna M. Kadas (St. Michael's College), E. Arthur Robinson Jr. (The George Washington University), Elias Deeba (University of Houston-Downtown), Frederick W. Keene (Pasadena City College), Rob Root (Lafayette College), Greg Dresden (Washington and Lee University), Robert L. Kelley (University of Miami), John C. Lawlor (University of Vermont), Teresa Morgan Smith (Blinn College), Martin Erickson (Truman State University), Cristopher C. Leary (State University of New York em Geneseo), Donald W. Solomon (University of Wisconsin-Milwaukee), Laurene V. Fausett (Georgia Southern University), William O. Martin (North Dakota State University), Kristin Stoley (Blinn College), Norman Feldman (Sonoma State University), Gerald Y. Matsumoto (American River College), Paul Xavier Uhlig (St. Mary's University, San Antonio), José D. Flores (The University of South Dakota), Gordon Melrose (Old Dominion University), Dennis H. Wortman (University of Massachusetts), Kevin A. Grasse (The University of Oklahoma), Michael Montaño (Riverside Community College), Howard B. Hamilton (California State University, Sacramento), Xian Wu (University of South Carolina).

Gostaria de agradecer, ainda, a George Bergman, Stuart Goldenberg, Emile LeBlanc, Gerald Leibowitz, Charles Pugh, Marina Ratner, Peter Rosenthal e Alan Weinstein por suas opiniões; Dan Clegg por suas pesquisas em bibliotecas e na Internet; Arnold Good por sua ajuda nos problemas de otimização com diferenciação implícita; Al Shenk e Dennis Zill pela permissão do uso de seus projetos; George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Lowell Smylie e Larry Wallen por suas idéias em exercícios; Dan Drucker pelo projeto da montanha-russa; Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle e Philip Straffin por suas idéias de projetos; Dan Anderson e Dan Drucker pela resolução dos novos exercícios; e Jeff Cole e Dan Clegg por suas cuidadosas leituras do manuscrito original. Sou muito grato a Jeff Cole por suas sugestões para melhorar os exercícios. Dan Clegg atuou como meu assistente do começo ao fim deste trabalho; ele leu, corrigiu, fez inúmeras sugestões e contribuiu em muitos dos novos exercícios.

Fui muito afortunado por ter trabalhado com alguns dos melhores editores de livros de matemática das duas últimas décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst e Gary Ostedt, e, por último, Bob Pirtle. Bob continua a tradição dos editores, os quais, enquanto oferecem amplo apoio e sólidos conselhos, confiaram em meus instintos e me permitiram produzir os livros que eu queria escrever.

James Stewart

Sumário

6 Aplicações de Integração 434

7 Técnicas de Integração 470

8 Mais Aplicações de Integração 542

Apêndices

Volume II

CÁLCULO

Volume I

Ao Estudante

Há uma diferença entre ler um texto de cálculo e um jornal ou um romance ou, até mesmo, um livro de física. Assim, não desanime se tiver de ler uma passagem mais de uma vez para poder entendê-la. Você deve ter lápis, papel e uma calculadora à mão para esboçar um diagrama ou fazer um cálculo.

Alguns estudantes começam a fazer suas tarefas de casa e lêem o texto somente quando empacam em algum exercício. Sugiro que leia e tente compreender uma seção do texto antes de começar os exercícios. Em particular, você deve examinar as definições para entender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolver o problema por seus próprios meios. Fazendo isto, aprenderá muito mais do que simplesmente olhando para a solução.

Parte da meta deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Aprender a escrever a solução dos exercícios de uma forma conexa, passo a passo e com sentenças explicativas – e não uma fileira de equações desconexas ou fórmulas.

As respostas dos exercícios de número ímpar estão no final do livro, no Apêndice H. Alguns deles pedem uma explicação verbal, uma interpretação ou uma descrição. Nesses casos, não existe uma maneira única de dar a resposta; logo, não se preocupe em obter a resposta definitiva. Além disso, há várias formas de expressar uma resposta numérica ou algébrica; assim, se sua resposta for diferente da minha, não conclua imediatamente que a sua esteja errada. Por exemplo, se a resposta dada no final do livro for $\sqrt{2} - 1$ e você obtiver $1/(1 + \sqrt{2})$, então você está certo, e racionalizando o denominador veremos que as respostas são iguais.

O ícone indica que definitivamente um exercício requer o uso de uma calculadora científica ou um computador com *software* gráfico. (A Seção 1.4 discute o uso desses recursos e de algumas falhas que você poderá encontrar.) Porém, isso não significa que os recursos gráficos não possam ser usados para verificar seu trabalho em outros exercícios. O símbolo está reservado para problemas em que se faz necessário o uso de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI89/92). Você vai encontrar também o símbolo , que o adverte sobre a possibilidade de cometer um erro. Esse símbolo aparece em situações nas quais observei que um grande número de estudantes tende a cometer o mesmo erro.

O cálculo – muito justamente – é considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. Espero que você descubra que ele não é somente útil, mas também intrinsecamente belo.

James Stewart

Erros de Aproximação*

Se x' for uma aproximação para x, então:

$$E = |x - x'|$$

O número E é chamado de *erro absoluto* na aproximação.

- Se $|x - x'| \leqslant 10^{-p}$, então x' aproxima x com um erro de no máximo 10^{-p}.
- Se $|x - x'| \leqslant 5.10^{-p}$, então x' aproxima x até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, ou até o $1/(10)^{p+1}$ mais próximo.

Exemplos:

- Se $|x - x'| \leqslant 0{,}5$, então x' aproxima x até o inteiro mais próximo.
- Se $|x - x'| \leqslant 0{,}005$, então x' aproxima x até a segunda casa decimal, ou até o centésimo mais próximo.

Além disso, se x' aproxima x até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, dizemos que a aproximação x' é correta até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, ou que a aproximação x' tem $(p + 1)$ casas decimais de precisão.

Arredondamento*

Dado um número racional $a_1a_2a_3a_4...a_n, b_1b_2b_3...b_mb_{m+1}$, então arredondamos para m casas decimais de acordo com a regra:

- Se $5 \leq b_{m+1} \leqslant 9$, então o número fica $a_1a_2a_3...a_n, b_1b_2b_3...[(b_m) + 1]$.
- Se $0 \leq b_{m+1} \leqslant 4$, então o número fica $a_1a_2a_3...a_n, b_1b_2b_3...b_m$.

A expressão "usado correto até determinada casa decimal" implica que, se a correção for, por exemplo, até a décima casa decimal, o erro começará na décima primeira casa decimal.

Exemplos:

- $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; 1,4 correta com uma casa decimal.
- $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; 1,41 correta com duas casas decimais.

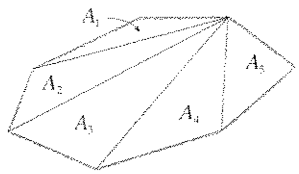
* Observações da tradução para a edição brasileira.

CÁLCULO
Volume I

Uma Apresentação do Cálculo

Quando você terminar este curso, será capaz de explicar a formação e a localização de um arco-íris, calcular a força exercida pela água em uma represa, analisar os ciclos demográficos dos predadores e das presas, e calcular a velocidade de vazão de uma pedra.

O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. O cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais intensivo. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais idéias do cálculo mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver uma variedade de problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

O Problema da Área

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quand foram encontradas as áreas usando o chamado "método da exaustão". Naquela época o gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, com na Figura 1 e, em seguida, somando-se as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de un círculo com polígonos regulares inscritos.

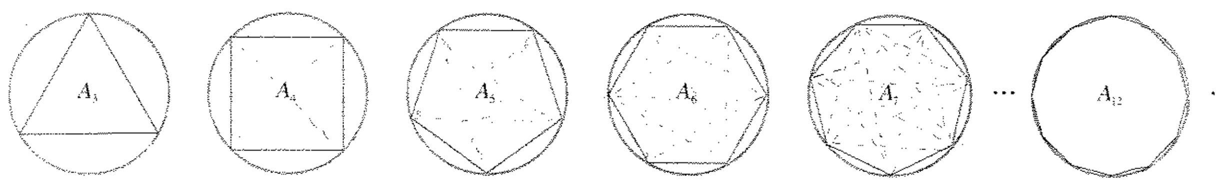


FIGURA 2

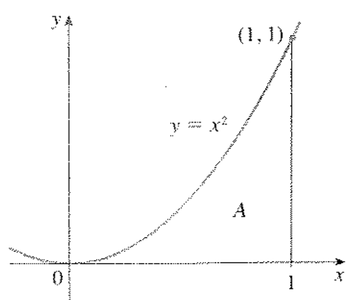


FIGURA 3

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Os gregos, porém, não usavam explicitamente os limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usou a exaustão para provar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos uma idéia similar no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazendo decrescer a largura dos retângulos, e então calculando A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

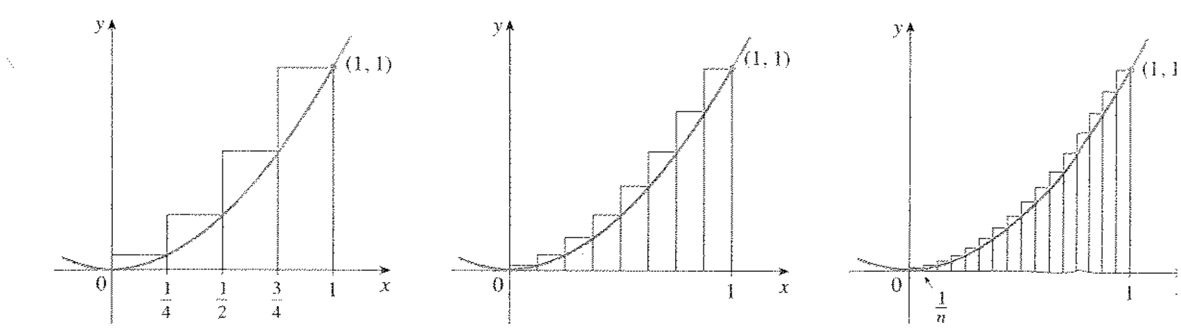


FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que vamos desenvolver no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitarão o cálculo de volumes de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra, e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

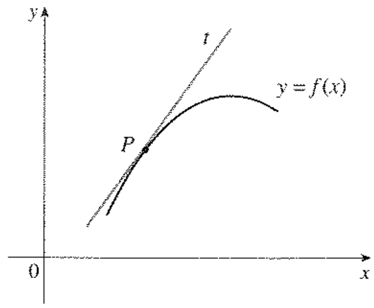


FIGURA 5
Uma reta tangente em P

O Problema da Tangente

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$ em um dado ponto P. (Daremos uma definição precisa de uma reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você poderá pensá-la como uma reta que toca a curva em P como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que para computar a inclinação é necessário o conhecimento de dois pontos e sobre t temos somente o ponto P. Para contornar esse problema determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e computando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6 vemos que

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

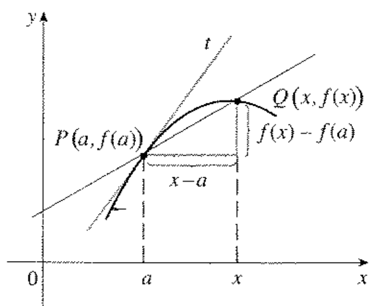


FIGURA 6
Uma reta da secante PQ

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

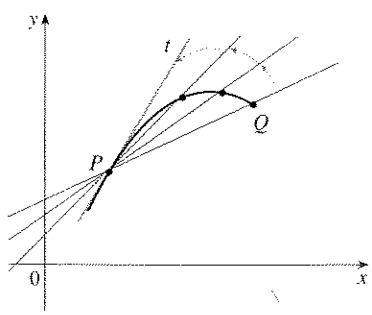


FIGURA 7
Uma reta secante aproximando-se de uma reta tangente

Exemplos específicos desse procedimento serão dados no Capítulo 2.

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais idéias subjacentes ao cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, da área e da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. Tanto o problema da área como o da tangente são considerados problemas inversos em um sentido que será descrito no Capítulo 5.

Velocidade

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 mi/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 milhas. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 mi/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo uma estrada reta e supondo que possamos medir a distância coberta por ele (em pés) em intervalos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

t = Tempo decorrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distância (pés)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 2 segundos de movimento vamo calcular qual a velocidade média no intervalo de tempo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

$$= \frac{43 - 10}{4 - 2}$$

$$= 16{,}5 \text{ pés/s}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{3 - 2} = 15 \text{ pés/s}$$

Nosso pressentimento é de que a velocidade no instante $t = 2$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 2$ Assim, vamos imaginar que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0, segundo, como na tabela a seguir:

t	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Computando então a velocidade média no intervalo de tempo [2, 2,5]:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{2{,}5 - 2} = 13{,}6 \text{ pés/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[2, 3]	[2, 2,5]	[2, 2,4]	[2, 2,3]	[2, 2,2]	[2, 2,1]
Velocidade média (pés/s)	15,0	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

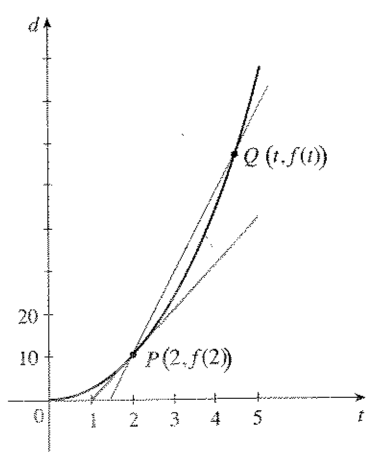


FIGURA 8

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mai próximas de 10; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 2$ a velocidade seja d cerca de 10 pés/s. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto er movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada ve menores.

Na Figura 8 mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro rede senhando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t$ então $f(t)$ é o número de pés percorridos após t segundos. A velocidade média no interval de tempo $[2, t]$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

e é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 2$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 2; isto é,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

e da Equação 2 vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo os problemas relativos à velocidade. A mesma técnica se aplica a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

O Limite de uma Seqüência

No século V a.C., o filósofo grego Zenon propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenon*, com o intento de desafiar algumas das idéias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenon diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenon argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga, pois se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente, e, dessa forma, parece que a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

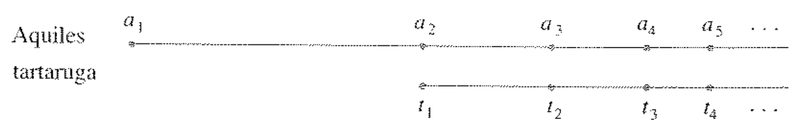


FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a idéia de *seqüência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como seqüências.

Em geral, uma seqüência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a seqüência

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

pode ser descrita como sendo dada pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

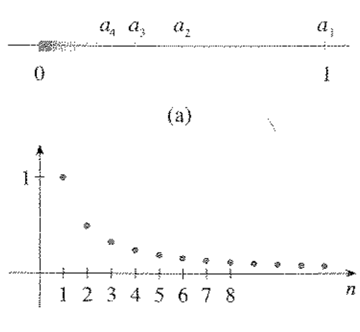


FIGURA 10

Podemos visualizar essa seqüência redesenhando seus termos sobre uma reta na qual estão determinados um ponto zero, uma unidade de medida e um sentido crescente, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da seqüência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos então que o limite da seqüência é 0, e indicamos isso por

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma seqüência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$\begin{aligned} a_1 &= 3{,}1 \\ a_2 &= 3{,}14 \\ a_3 &= 3{,}141 \\ a_4 &= 3{,}1415 \\ a_5 &= 3{,}14159 \\ a_6 &= 3{,}141592 \\ a_7 &= 3{,}1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

então $$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Os termos nessa seqüência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenon. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as seqüências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as seqüências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A Soma de uma Série

Outro paradoxo de Zenon, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: "Uma pessoa em um certo ponto de uma sala não pode caminhar até a parede. Para tanto ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante, e então novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

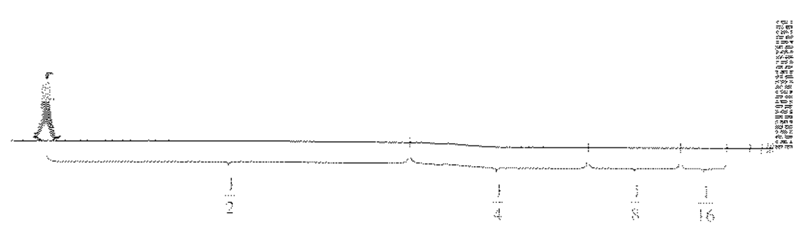


FIGURA 11

Como, naturalmente, sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$\boxed{3} \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenon argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0,\overline{3} = 0,3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1.000} + \frac{3}{10.000} + \cdots$$

dessa forma, de algum jeito, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1.000} + \frac{3}{10.000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais genericamente, se d_n denotar o n-ésimo dígito na representação decimal de um número, então

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0,5\\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0,75\\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0,875\\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0,9375\\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0,96875\\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0,984375\\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0,9921875\\
&\vdots\\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1.024} \approx 0,99902344\\
&\vdots\\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474
\end{aligned}
$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode ser mostrado que tomando n suficientemente grande (isto é, adicionando um número grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece então razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11 do Volume II discutiremos mais essas idéias.

Resumo

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa idéia básica que coloca o cálculo à parte das demais áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites.

Sir Isaac Newton inventou sua versão do cálculo a fim de explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sangüíneo de saída do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Vamos explorar neste livro algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, vamos finalizar esta apresentação com uma lista de perguntas que você será capaz de responder usando o cálculo:

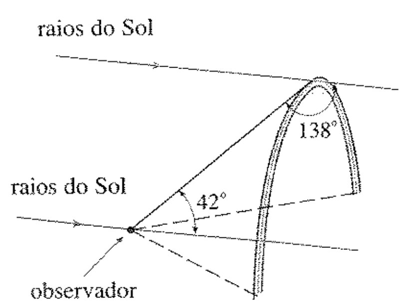
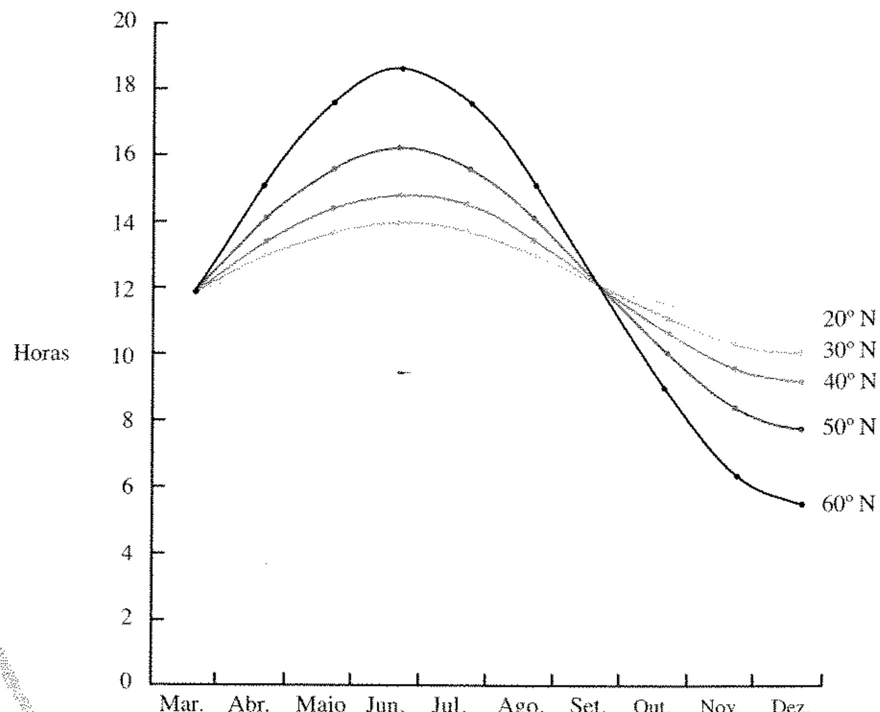


FIGURA 12

1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42°? (Veja a página 288.)
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado? (Veja a página 341.)
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema? (Veja a página 468.)
4. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida? (Veja a página 241.)

1

Funções e Modelos



Uma representação gráfica de uma função – aqui o número de horas de luz solar como uma função da época do ano em várias latitudes – é sempre o modo mais conveniente e natural de representá-la.

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Este capítulo abre o caminho para o cálculo discutindo as idéias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los. Enfatizamos que uma função pode ser representada de várias maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou mesmo por meio de palavras. Vamos observar os principais tipos de funções que ocorrem no cálculo e descrever como usá-las como modelos matemáticos de fenômenos do mundo real. Também discutiremos o uso de calculadoras gráficas e de software gráfico para computadores.

1.1 Quatro Maneiras de Representar uma Função

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Consideremos as seguintes situações:

A. A área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que conecta r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número r positivo existe associado um único valor de A, e dizemos que A é uma *função* de r.

B. A população humana mundial P depende do tempo t. A tabela ao lado fornece estimativas da população mundial $P(t)$ no instante t, para determinados anos. Por exemplo,

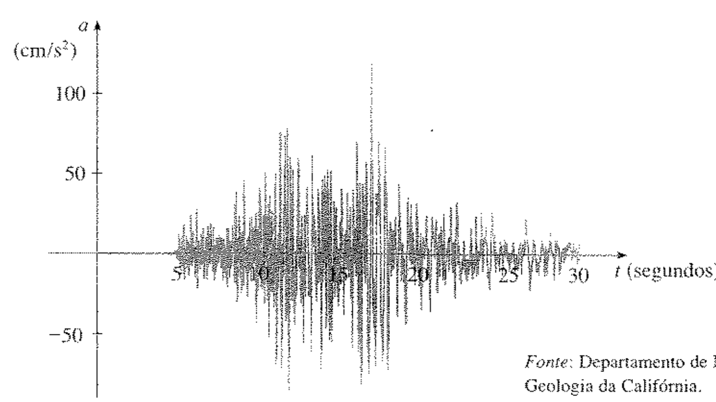
$$P(1950) \approx 2.560.000.000$$

Porém para cada valor do tempo t existe um valor de P correspondente, e dizemos que P é uma função de t.

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

C. O custo C de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso w. Embora não haja uma fórmula simples conectando w e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando é dado w.

D. A aceleração vertical a do solo registrada por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo t decorrido. A Figura 1 mostra o gráfico gerado pela atividade sísmica durante o terremoto de Northridge, que abalou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de t, o gráfico fornece um valor correspondente de a.



Fonte: Departamento de Minas e Geologia da Califórnia.

FIGURA 1

Aceleração vertical do solo durante o terremoto de Northridge

Cada um dos exemplos anteriores descreve uma lei segundo a qual, dado o número (r, t, w ou t), fica determinado outro número (A, P, C ou a). Em cada caso dizemos que o segundo número é uma função do primeiro.

Uma **função** f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto B.

Em geral consideramos as funções para as quais A e B são conjuntos de números reais. O conjunto A é chamado **domínio** da função. O número $f(x)$ é o **valor de** $\boldsymbol{f}$ **em** $\boldsymbol{x}$ e deve ser lido como "f de x". A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado **variável independente**, e o que representa um número qualquer na *imagem* de f é chamado de **variável dependente**. No Exemplo A, a variável r é independente, enquanto A é dependente.

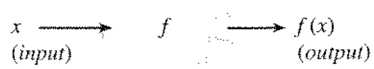


FIGURA 2
Diagrama de máquina para uma função f

É muito proveitoso considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2). Se x estiver no domínio da função f, quando x entrar na máquina, ele será aceito como *input*, e a máquina produzirá um *output* $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todos os *inputs*, enquanto a imagem é o conjunto de todos os *outputs* possíveis.

As funções pré-programadas de sua calculadora são exemplos de funções como uma máquina. Por exemplo, a tecla de raiz quadrada em seu computador é uma dessas funções. Você pressiona a tecla $\sqrt{\ }$ (ou $\sqrt{x}$) e dá o *input* x. Se $x < 0$, então x não está no domínio dessa função; isto é, x não é um *input* aceitável, e a calculadora indicará um erro. Se $x \geqslant 0$, então uma *aproximação* de $\sqrt{x}$ aparecerá. Assim, a tecla $\sqrt{x}$ de sua calculadora não é exatamente a mesma coisa que a função matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

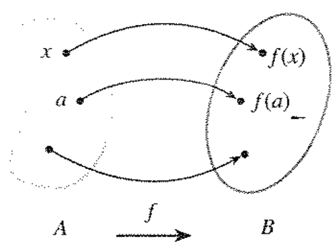


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Outra forma de ver a função é como um **diagrama de flechas**, como na Figura 3. Cada flecha conecta um elemento de A com um elemento de B. A flecha indica que $f(x)$ está associado a x, $f(a)$ a a etc.

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se f for uma função com domínio A, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

(Observe que eles são os pares *input-output*.) Em outras palavras, o gráfico de f consiste em todos os pontos (x, y) do plano coordenado tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos dá uma imagem proveitosa do comportamento ou da "história de vida" de uma função. Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos entender o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x (veja a Figura 4). O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y, como na Figura 5.

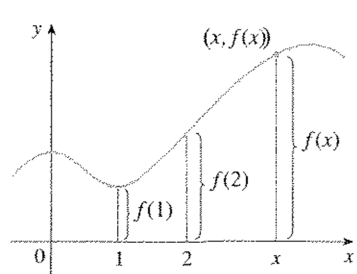


FIGURA 4

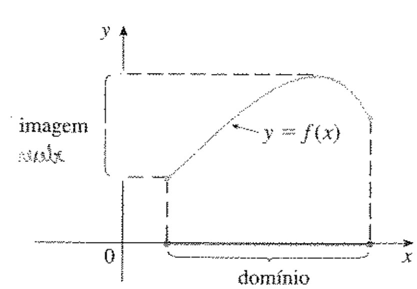


FIGURA 5

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f está na Figura 6.
(a) Encontre os valores de $f(1)$ e $f(5)$.
(b) Como são o domínio e a imagem de f?

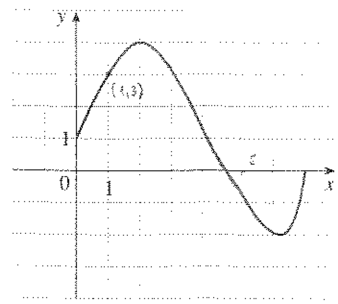


FIGURA 6

SOLUÇÃO
(a) Vemos da Figura 6 que o ponto $(1, 3)$ está sobre o gráfico de f, assim, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$. (Em outras palavras, o ponto sobre o gráfico correspondente a $x = 1$ está três unidades acima do eixo x.)

Quando $x = 5$, o ponto sobre o gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leqslant x \leqslant 7$, logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0, 7]$. Observe que os valores de f variam de -2 até 4; assim, a imagem de f é

□ A notação para intervalos é dada no Apêndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

EXEMPLO 2 □ Esboce o gráfico e encontre o domínio e a imagem de cada função.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUÇÃO
(a) O gráfico tem equação $y = 2x - 1$, que reconhecemos ser a equação de uma reta com inclinação 2 e intercepto y igual a -1. (Lembre-se da equação da reta em sua forma inclinação–intercepto: $y = mx + b$. Veja o Apêndice B.) Isso nos possibilita esboçar o gráfico de f na Figura 7. A expressão $2x - 1$ está definida para todos os números reais; logo, seu domínio é todo esse conjunto denotado por $\mathbb{R}$. O gráfico mostra ainda que a imagem também é $\mathbb{R}$.

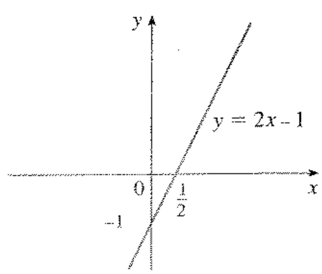


FIGURA 7

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos desenhar os pontos $(2, 4)$ e $(-1, 1)$ junto com alguns outros (sobre o gráfico), e ligá-los para produzir o gráfico da Figura 8. A equação do gráfico é $y = x^2$, que representa uma parábola (veja o Apêndice C). O domínio de g é $\mathbb{R}$. A imagem de g consiste em todos os valores de $g(x)$, isto é, todos os números da forma x^2. Mas $x^2 \geqslant 0$ para todos os números reais x e todo número positivó y é um quadrado. Assim, a imagem de g é $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$ (veja a Figura 8).

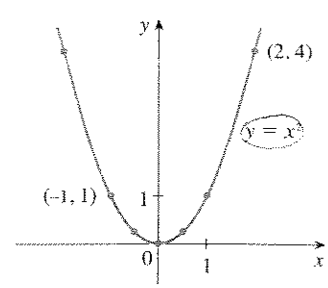


FIGURA 8

Representações de Funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de tabelas de valores)
- visualmente (através de gráficos)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Se uma função puder ser representada das quatro maneiras, então é proveitoso ir de uma representação para a outra, a fim de ganhar um *insight* adicional sobre a função. (No caso do Exemplo 2, partimos de fórmulas algébricas para obter os gráficos.) Porém, certas funções são descritas mais naturalmente por um método que por outro. Tendo isso em mente, vamos reexaminar as quatro situações consideradas no começo desta seção.

A. A mais útil dentre as representações da área de um círculo em função de seu raio é provavelmente a fórmula $A(r) = \pi r^2$, apesar de ser possível elaborar uma tabela de valores, bem como esboçar um gráfico (meia parábola). Como o raio do círculo deve ser positivo, o domínio da função é $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, e a imagem é $(0, \infty)$.

B. Seja dada a seguinte descrição em palavras de uma função: $P(t)$ é a população humana mundial no instante t. A tabela de valores da população mundial da página 11 nos fornece uma representação conveniente dessa função. Se desenharmos esses valores, vamos obter o gráfico da Figura 9 (chamado de *mapa de dispersão*). Ela é também uma representação útil, já que nos possibilita absorver todos os dados de uma vez. E o que dizer sobre uma fórmula para ela? Naturalmente é impossível dar uma fórmula exata para a população humana $P(t)$ em qualquer momento t. Porém, é possível encontrar uma expressão *aproximada* para ela. Usando métodos explicados na Seção 1.5 obtemos a aproximação

$$P(t) \approx f(t) = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

e a Figura 10 mostra que o "ajuste" é bem razoável. A função f é chamada *modelo matemático* para o crescimento populacional. Em outras palavras, é uma função com uma fórmula explícita, que aproxima o comportamento da função dada. Vamos ver que podemos aplicar as idéias do cálculo a tabelas de valores; não é necessária uma fórmula explícita.

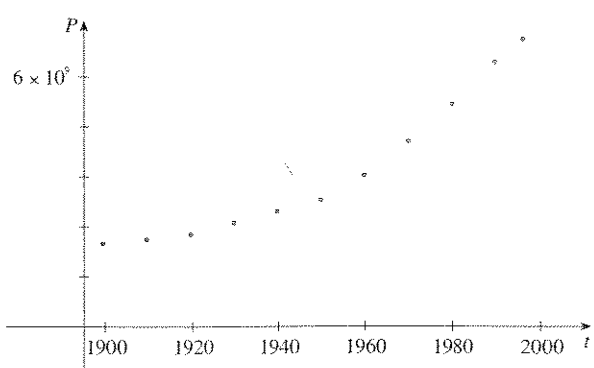


FIGURA 9

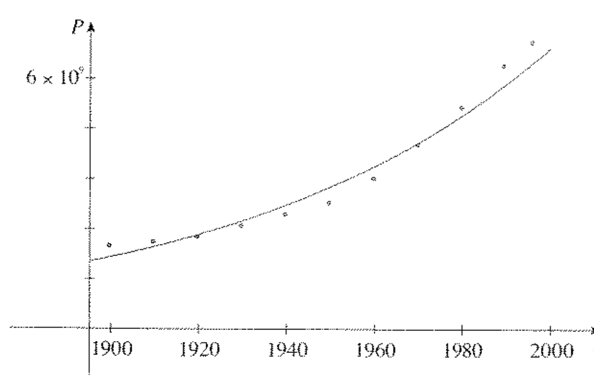


FIGURA 10

A função P é um exemplo típico das funções que aparecem sempre qu tentamos aplicar o cálculo ao mundo real. Começamos por uma descrição verbal d uma função. Então é possível que a partir de dados experimentais possamos constru as tabelas de valores da função. Mesmo que não tenhamos um conhecimento com pleto dos valores da função, veremos por toda a parte neste livro ser possível realiz operações de cálculo nessas funções.

□ Uma função definida pela tabela de valores é estabelecida como uma função *tabular*.

w (onças)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
⋮	⋮

C. Novamente a função é descrita em palavras: $C(w)$ é o custo de se enviar pel correio uma carta com um peso w. Nos Estados Unidos, em 2002, o serviço post seguia o seguinte regulamento: até uma onça (1 onça = 28,349523 gramas), o cust era de 37 centavos de dólar, e mais 23 centavos para cada onça sucessiva até 1 onças. A tabela de valores mostrada ao lado é a representação mais conveniente par essa função, embora seja possível esboçar seu gráfico (veja o Exemplo 10).

D. O gráfico na Figura 1 é a representação mais natural de uma aceleração vertic $a(t)$. Na realidade é possível compilar uma tabela de valores e até mesmo deline uma fórmula aproximada. Porém tudo o que um geólogo precisa saber — amplitud e padrões — pode facilmente ser obtido do gráfico. (O mesmo é válido tanto para o padrões de um eletrocardiograma como para o caso de um detector de mentiras As Figuras 11 e 12 mostram os gráficos das acelerações do terremoto de Northridg nas direções norte–sul e leste–oeste, e quando usadas em conjunção com a Figura elas nos dão uma boa idéia do terremoto.

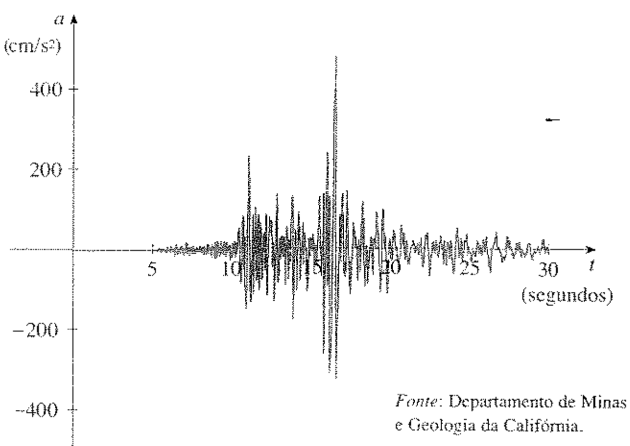


FIGURA 11 Aceleração norte–sul do terremoto de Northridge

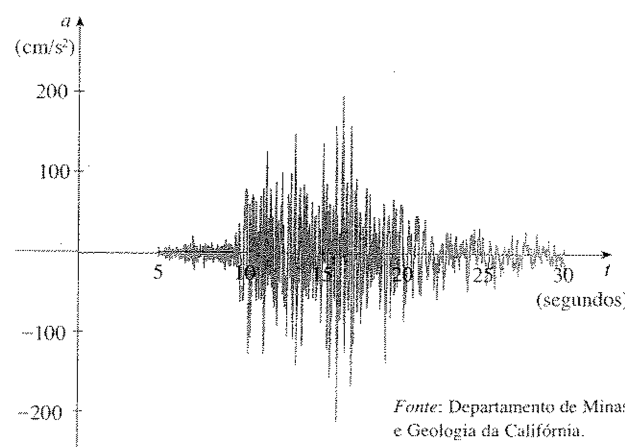


FIGURA 12 Aceleração leste–oeste do terremoto de Northridge

No próximo exemplo vamos esboçar o gráfico de uma função definida verbalmente.

EXEMPLO 3 □ Ao abrir uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende do tempo decorrido desde a abertura. Esboce um gráfico de T como uma função do tempo t decorrido desde a abertura.

SOLUÇÃO A temperatura da água no começo está próxima da temperatura ambiente, pois ela estava nos canos. Quando começa a sair a água quente da caixa-d'água, T aumenta rapidamente, e na próxima fase fica constante até a caixa se esvaziar. A partir daí T decresce até a temperatura em que a água é fornecida. Isso nos possibilita esboçar o gráfico de T como uma função de t na Figura 13. □

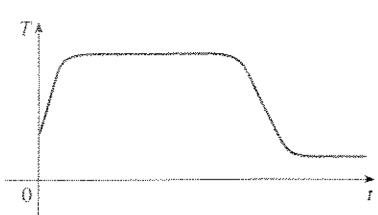


FIGURA 13

Um gráfico mais preciso da função do Exemplo 3 pode ser obtido usando-se um termômetro para medir a temperatura da água em intervalos de 10 segundos. Em geral, os cientistas coletam os dados e os usam para esboçar os gráficos de funções, como no exemplo a seguir.

t	$C(t)$
0	0,0800
2	0,0570
4	0,0408
6	0,0295
8	0,0210

EXEMPLO 4 □ Os dados na margem vêm de um experimento sobre a lactonização do ácido hidroxivalérico a 25 °C. É dada a concentração $C(t)$ desse ácido (em mols por litro) após t minutos. Use esses dados para esboçar um gráfico aproximado da função concentração e o gráfico para estimar a concentração após 5 minutos.

SOLUÇÃO Primeiro vamos desenhar os cinco pontos correspondentes aos dados da tabela na Figura 14. Os métodos de ajustamento de curvas da Seção 1.2 poderão então ser utilizados para escolher um modelo e fazer um gráfico dele. Os dados da Figura 14, porém, parecem muito bem-comportados; assim, simplesmente traçamos à mão uma curva suave passando por eles, como na Figura 15.

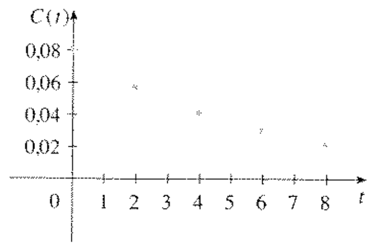


FIGURA 14

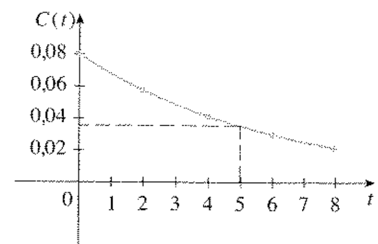


FIGURA 15

Então usamos o gráfico para estimar que a concentração após 5 minutos é

$$C(5) \approx 0{,}035 \text{ mol/litro}$$

No exemplo a seguir começamos por uma descrição verbal de uma função em uma situação física e depois obtemos uma fórmula algébrica explícita. A habilidade nessa transição é muito útil na solução de problemas de cálculo envolvendo a determinação de valores máximo ou mínimo de quantidades.

EXEMPLO 5 □ Uma caixa aberta em cima tem um volume de 10 m³. O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa \$ 10 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa \$ 6 por metro quadrado. Expresse o custo total do material em função do tamanho da base.

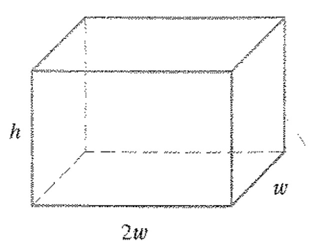


FIGURA 16

SOLUÇÃO Fazemos um diagrama como o da Figura 16, com uma notação onde w e $2w$ são, respectivamente, o comprimento e a largura da base, e h é a altura.

A área da base é $(2w)w = 2w^2$; assim, o custo, em dólares, é de $10(2w^2)$. Quanto aos lados, dois têm área wh e os outros dois, $2wh$. Portanto o custo total dos lados é $6[2(wh) + 2(2wh)]$. E o custo total é

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expressar C como uma função somente de w, precisamos eliminar h, o que é feito usando-se o fato de o volume ser 10 m³. Dessa forma,

$$w(2w)h = 10$$

o que fornece

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Ao estabelecer as funções como as do Exemplo 5, pode ser proveitoso remeter-se aos princípios de resolução de problemas, conforme apresentado na página 80, em particular o passo *Entendendo o problema*.

Substituindo-se essa expressão na fórmula de C, temos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Logo, a equação

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expressa C como uma função de w.

EXEMPLO 6 Encontre o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUÇÃO

Se uma função for dada por uma fórmula sem que seu domínio seja explicitado, presume-se que este seja o conjunto de todos os números para os quais a fórmula tem sentido e define um número real.

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não está definida (como um númer real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x + 2 \geqslant 0$. Isso é equiva lente a $x \geqslant -2$; assim, o domínio é o intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

e a divisão por 0 não é permitida, vemos que $g(x)$ não está definida no caso de $x = 0$ o $x = 1$. Dessa forma, o domínio de g é

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que também pode ser dado na notação de intervalo como

aberto

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

O gráfico de uma função é uma curva no plano xy. De imediato surge uma pergunta: Quai curvas no plano xy são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio d teste a seguir.

> **Teste da Reta Vertical** Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical corta a curva mais de uma vez.

A razão da veracidade do Teste da Reta Vertical pode ser vista na Figura 17. Se cad reta vertical $x = a$ interceptar a curva somente uma vez, em (a, b), então exatamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em doi pontos, em (a, b) e (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois um função não pode fazer corresponder dois valores diferentes para a.

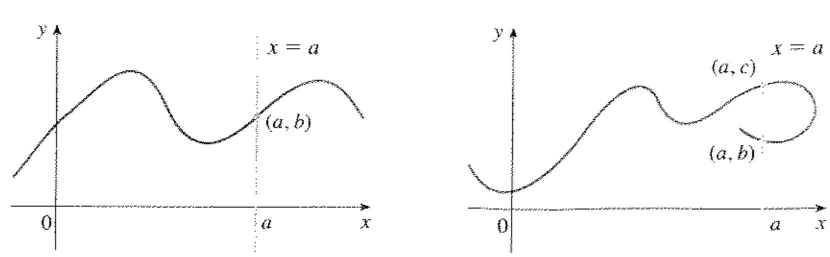


FIGURA 17

Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura 18(a) não é o gráfico de uma função de x, pois, como você pode ver, existem retas verticais que interceptam a parábola duas vezes. A parábola, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x. Observe que $x = y^2 - 2$ implica $y^2 = x + 2$, e $y = \pm\sqrt{x+2}$. Dessa forma, a metade superior e a inferior da parábola são os gráficos de $f(x) = \sqrt{x+2}$ [do Exemplo 6(a)] e $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [veja as Figuras 18(b) e (c)]. Note que se invertermos os papéis de x e y, então a equação $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como uma função de y (com y como variável independente e x como variável dependente), e a parábola agora é o gráfico da função h.

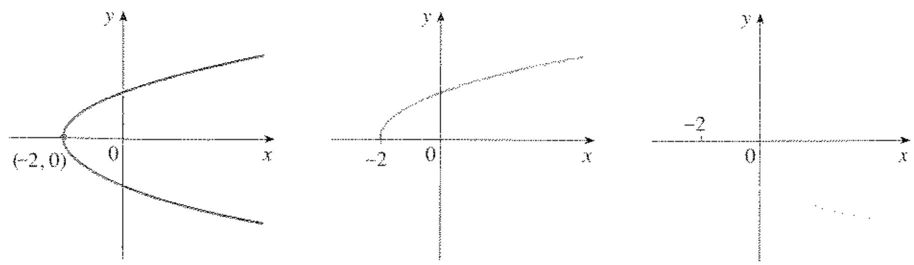


FIGURA 18

(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funções Definidas por Partes

As funções nos quatro exemplos a seguir são definidas por fórmulas diversas em diferentes partes de seus domínios.

EXEMPLO 7 ▫ Seja f a função definida pelas fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Lembre-se de que toda função é uma regra. Para essa função em particular a regra é a seguinte: olhe primeiro o valor do *input* x. Se tivermos que $x \leqslant 1$, então o valor de $f(x)$ será $1 - x$. Por outro lado, se o valor for $x > 1$, então o valor de $f(x)$ será x^2.

$$\text{Uma vez que } 0 \leqslant 1, \text{ temos } f(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Uma vez que } 1 \leqslant 1, \text{ temos } f(1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Uma vez que } 2 > 1, \text{ temos } f(2) = 2^2 = 4.$$

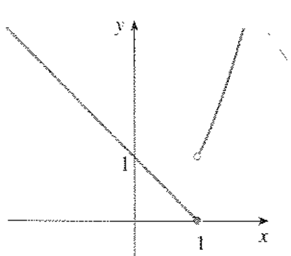


FIGURA 19

Como fazer o gráfico de f? Observamos que se $x \leqslant 1$, então $f(x) = 1 - x$, assim, a parte do gráfico f à esquerda da reta vertical $x = 1$ deve coincidir com a reta $y = 1 - x$, essa última com inclinação -1 e intercepto y igual a 1. Se $x > 1$, daí $f(x) = x^2$, e, dessa forma, a parte do gráfico f à direita da reta $x = 1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola. Tudo isso nos permite esboçar o gráfico da Figura 19.
O pontinho cheio indica que o ponto $(1, 0)$ está incluso no gráfico; o vazio indica que o ponto $(1, 1)$ está excluído do gráfico. ▫

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

Para uma revisão mais ampla de valores absolutos, veja o Apêndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{se } a < 0 \end{array}}$$

(Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.)

EXEMPLO 8 Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUÇÃO Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

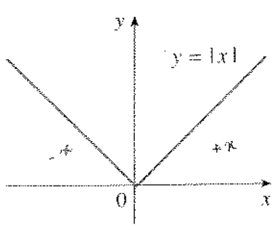


FIGURA 20

Usando o mesmo método empregado no Exemplo 7, vemos que o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ à direita do eixo y e com a reta $y = -x$ à esquerda do eixo y (veja a Figura 20).

EXEMPLO 9 Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico está na Figura 21.

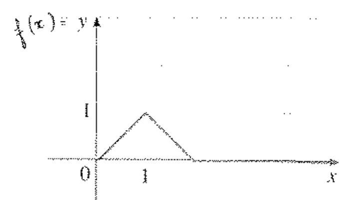


FIGURA 21

SOLUÇÃO A reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ tem inclinação $m = 1$, e o intercepto y, $b = 0$; assim, sua equação é $y = x$. Logo, para a parte do gráfico de f que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, temos

$$f(x) = x \qquad \text{se} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

A forma ponto–inclinação da equação da reta:
$y - y_1 = m(x - x_1)$
Veja o Apêndice B.

A reta que passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(2, 0)$ tem uma inclinação de $m = -1$; dessa maneira, a forma ponto–inclinação será

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad y = 2 - x$$

Logo temos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{se} \qquad 1 < x \leqslant 2$$

Vemos também que o gráfico de f coincide com o eixo x para $x > 2$. Juntando todas as informações, temos a seguinte fórmula em três partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

EXEMPLO 10 □ No Exemplo C, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de uma carta com peso w. Na realidade, trata-se de uma função definida por partes, pois a partir da tabela de valores temos

$$C(w) = \begin{cases} 0{,}37 & \text{se } 0 < w \leqslant 1 \\ 0{,}60 & \text{se } 1 < w \leqslant 2 \\ 0{,}83 & \text{se } 2 < w \leqslant 3 \\ 1{,}06 & \text{se } 3 < w \leqslant 4 \end{cases}$$

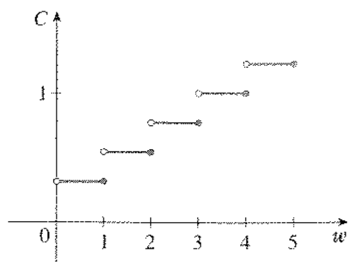


FIGURA 22

O gráfico é mostrado na Figura 22. Você pode entender então por que as funções similares a esta são chamadas **funções escada** – elas pulam de um valor para o próximo. Essas funções serão estudadas no Capítulo 2.

Simetrias

Se uma função f satisfizer $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

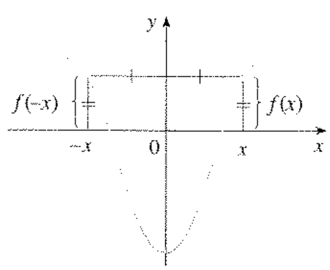


FIGURA 23
Uma função par

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 23). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir o que temos em torno do eixo y.

Se f satisfizer $f(-x) = -f(x)$ para todo número x em seu domínio, dizemos que f é uma **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

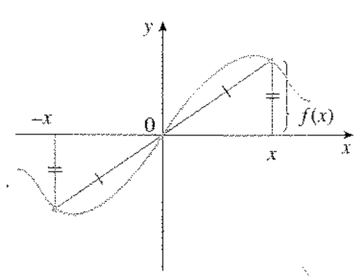


FIGURA 24
Uma função ímpar

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 24). Se tivermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando 180°, o que já temos, em torno da origem.

EXEMPLO 11 □ Determine se a função é par, ímpar ou nenhum desses dois.
(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Logo, f é uma função ímpar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Assim g é par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par nem ímpar.

Os gráficos das funções do Exemplo 11 estão na Figura 25. Observe que o gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo y nem em relação à origem.

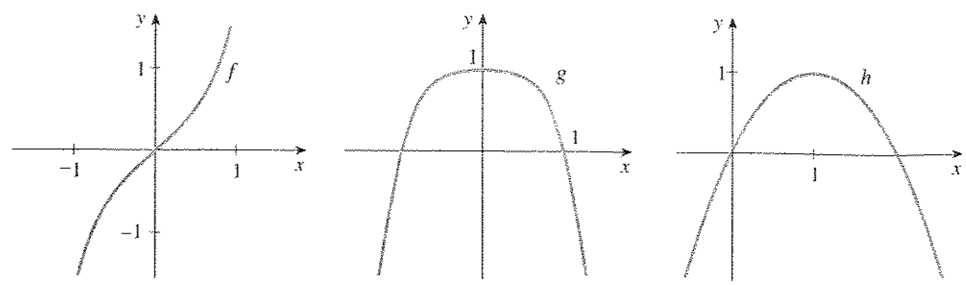


FIGURA 25 (a) (b) (c)

Funções Crescentes e Decrescentes

O gráfico da Figura 26 se eleva de A para B, cai de B para C, e sobe novamente de C para D. Dizemos que a função f é crescente no intervalo $[a, b]$, decrescente em $[b, c]$, e novamente crescente em $[c, d]$. Observe que se x_1 e x_2 forem dois números quaisquer entre a e b com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Vamos usar isso como a propriedade que define uma função crescente.

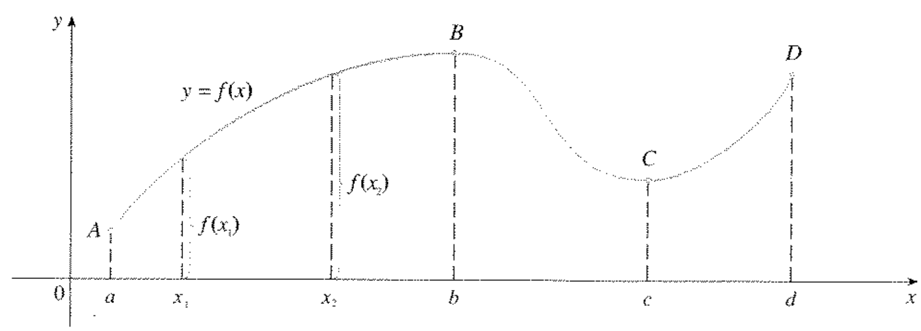


FIGURA 26

> Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se
>
> $$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$
>
> Ela é denominada **decrescente** em I se
>
> $$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$

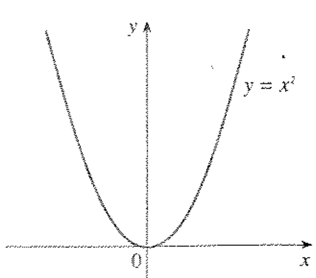


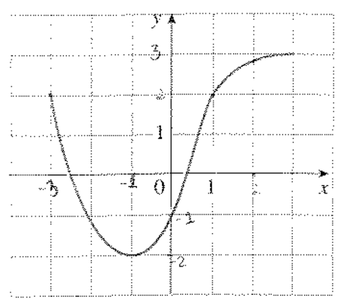
FIGURA 27

Na definição de função crescente é importante compreender que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ deve estar satisfeita para *todo* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

Você pode ver que na Figura 27 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

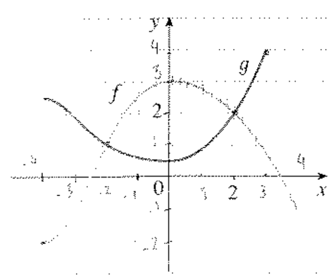
1.1 Exercícios

1. É dado o gráfico de uma função f.
   (a) Obtenha o valor de $f(-1)$.
   (b) Estime o valor de $f(2)$.
   (c) $f(x) = 2$ para quais valores de x?
   (d) Estime os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
   (e) Obtenha o domínio e a imagem de f.
   (f) Em quais intervalos f é crescente?



$f(x)=?$

2. São dados os gráficos de f e g.
   (a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$. $f(-4) = -2$ e $g(3) = 4$
   (b) $f(x) = g(x)$ para quais valores de x? -2 e 2
   (c) Estime a solução da equação $f(x) = -1$. 0,6
   (d) Em quais intervalos f é decrescente? [0,4]
   (e) Estabeleça o domínio e a imagem de f.
   (f) Obtenha o domínio e a imagem de g.

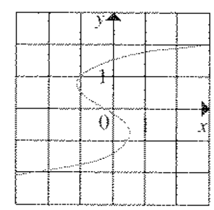


3. As Figuras 1, 11 e 12 foram registradas por um instrumento monitorado pelo Departamento de Minas e Geologia da Califórnia pertencente ao Hospital Universitário do Sul da Califórnia. Use-as para estimar as imagens das funções aceleração do solo na vertical, na direção norte–sul, na leste–oeste, na USC durante o terremoto de Northridge.

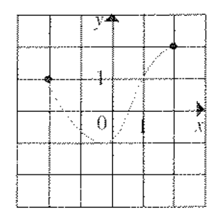
4. Nesta seção discutimos os exemplos de funções do dia-a-dia, como: a população é uma função do tempo; o custo da franquia postal, uma função do peso; a temperatura da água, do tempo. Dê três novos exemplos de funções cotidianas que possam ser descritas verbalmente. O que você pode dizer sobre o domínio e a imagem de cada uma dessas funções? Se possível, esboce um gráfico de cada uma delas.

5–8 □ Determine se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, obtenha o domínio e a imagem da função.

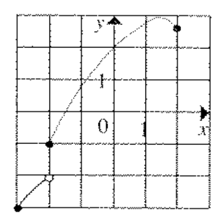
5.



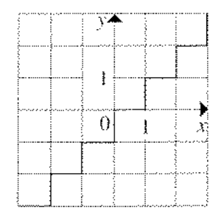
6.



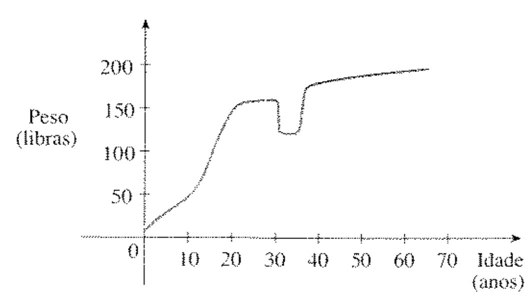
7.



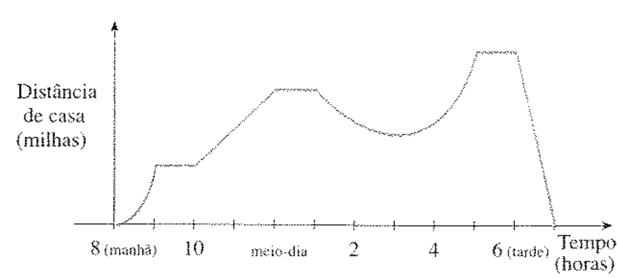
8.



9. O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em palavras como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que está acontecendo aos 30 anos?



10. O gráfico mostra a distância que um caixeiro-viajante está de sua casa em um certo dia como uma função do tempo. Descreva em palavras o que o gráfico indica sobre suas andanças nesse dia.



11. Ponha cubos de gelo em um copo, encha-o com água gelada e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como vai variar no tempo a temperatura da água. Esboce então um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.

12. Esboce um gráfico do número de horas diárias com a luz do sol como uma função do tempo no decorrer de um ano.

13. Esboce um gráfico da temperatura externa como uma função do tempo durante um dia típico de primavera na zona temperada do Hemisfério Norte.

14. Coloque uma torta gelada em um forno e asse-a por uma hora. Então tire-a do forno e deixe-a esfriar antes de comê-la. Descreva como varia no tempo a temperatura da torta. Esboce um gráfico da temperatura da torta como uma função do tempo.

15. Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce o gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

16. Um avião vai de um aeroporto a outro em uma hora, e a distância entre eles é de 400 milhas. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.
(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no chão.
(d) Esboce um possível gráfico da velocidade na vertical.

17. Uma estimativa anual do número N (em milhares) de assinantes de telefones celulares na Malásia é mostrado na tabela

t	1991	1993	1995	1997
N	132	304	873	2.461

(a) Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t.
(b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares na Malásia nos anos de 1994 e 1996.

18. Os registros de temperatura T (em °F) foram tomados de duas em duas horas a partir da meia-noite até as 14 horas, em Dallas, em 2 de junho de 2001. O tempo foi medido em horas após a meia-noite.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.
(b) Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.

19. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encontre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a+1), 2f(a), f(2a), f(a^2), [f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

20. Um balão esférico com raio de r polegadas tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio r até um raio $r + 1$ polegadas.

21–22 Encontre $f(2+h)$, $f(x+h)$ e $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, onde $h \neq 0$.

21. $f(x) = x - x^2$ **22.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

23–27 Encontre o domínio da função.

23. $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ **24.** $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$

25. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$ **26.** $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4-u}$

27. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

28. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

29–40 Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

29. $f(x) = 5$ **30.** $F(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)$

31. $f(t) = t^2 - 6t$ **32.** $H(t) = \dfrac{4-t^2}{2-t}$

33. $g(x) = \sqrt{x-5}$ **34.** $F(x) = |2x+1|$

35. $G(x) = \dfrac{3x+x}{x}$ **36.** $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x < -1 \\ 3-x & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 3x+2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7-2x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

41–46 Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada.

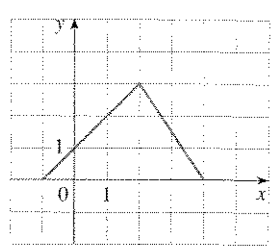
41. O segmento de reta unindo os pontos $(-2, 1)$ e $(4, -6)$.

42. O segmento de reta unindo os pontos $(-3, -2)$ e $(6, 3)$.

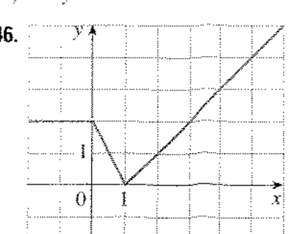
43. A parte de baixo da parábola $x + (y-1)^2 = 0$.

44. A parte de cima do círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

45.



46.



47–51 □ Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

47. Um retângulo tem um perímetro de 20 metros. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

48. Um retângulo tem uma área de 16 m^2. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

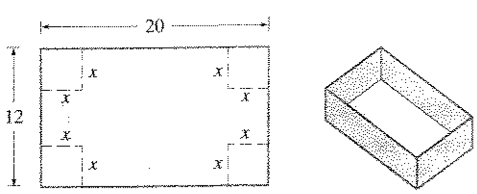
49. Expresse a área de um triângulo eqüilátero como uma função do comprimento de um lado.

50. Expresse a área superficial de um cubo como uma função de seu volume.

51. Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m^3 tem uma base quadrada. Expresse a área superficial da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

52. Uma janela normanda tem um formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro de uma janela for de 30 pés, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.

53. Uma caixa sem a tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 por 20 polegadas. Devem-se cortar os quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.



54. Uma companhia de táxi cobra \$ 2 pela primeira milha (ou fração dela) e 20 centavos a cada décimo de milha adicional (ou fração). Expresse o custo C (em \$) de uma corrida como uma função da distância x percorrida (em milhas) para $0 < x < 2$ e esboce o gráfico.

55. Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte forma. São isentos os que têm rendimento até \$ 10.000. Para qualquer renda acima de \$ 10.000 é cobrado um imposto de 10%, até \$ 20.000. E acima de \$ 20.000 o imposto é de 15%.

(a) Esboce o gráfico do imposto de renda R como uma função da renda I.

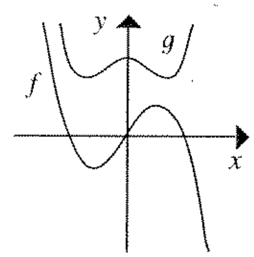
(b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de \$ 14.000? E sobre \$ 26.000?

(c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

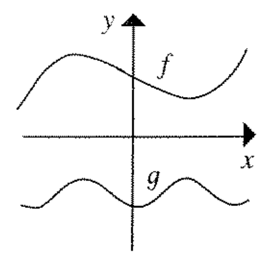
56. As funções no Exemplo 10 e nos Exercícios 54 e 55(a) são chamadas *funções escada*, em virtude do aspecto de seus gráficos. Dê dois outros exemplos de funções escada que aparecem no dia-a-dia.

57–58 □ Os gráficos de f e de g são mostrados a seguir. Verifique se cada função é par, ímpar ou nem par nem ímpar. Justifique seu raciocínio.

57.



58.



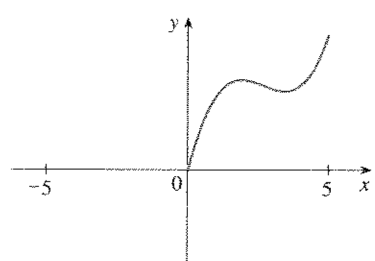
59. (a) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

(b) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto deverá também estar no gráfico?

60. Uma função f tem o domínio $[-5, 5]$ e é mostrada uma parte do seu gráfico.

(a) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função par.

(b) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função ímpar.



61–66 □ Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se f for par ou ímpar, use a simetria para esboçar seu gráfico.

61. $f(x) = x^{-2}$

62. $f(x) = x^{-3}$

63. $f(x) = x^2 + x$

64. $f(x) = x^4 - 4x^2$

65. $f(x) = x^3 - x$

66. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

1.2 Modelos Matemáticos: Uma Relação de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** é uma descrição matemática (freqüentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução dos poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer predições sobre um comportamento futuro.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da realização de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente para torná-lo matematicamente tratável. Usamos nosso conhecimento da situação física e nossa destreza matemática para obter as equações que relacionam as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossos próprios experimentos) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter uma representação gráfica desenhando os dados. Esse gráfico pode até sugerir uma fórmula algébrica apropriada em alguns casos.

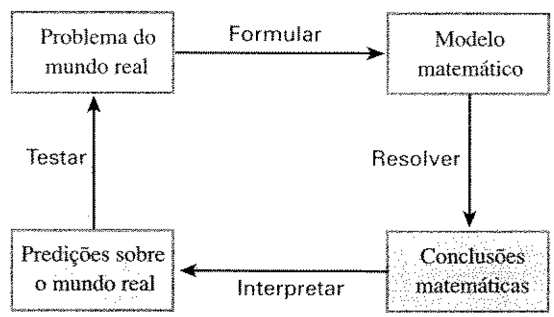


FIGURA 1
Processo de modelagem

O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos (tal como o cálculo a ser desenvolvido neste livro) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar as conclusões. Então, em um terceiro estágio, interpretamos as conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos predições. A etapa final é testar nossas predições com o que acontece de novo no mundo real. Se as predições não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo modelo e começar novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física — é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções, as quais podem ser usadas para modelar as relações observadas no mundo real. A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções, e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

Modelos Lineares

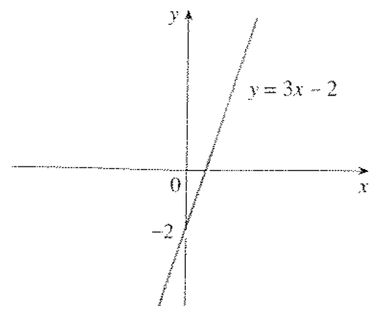
A coordenada geométrica das retas é revista no Apêndice B.

Quando dizemos que y é uma **função afim** de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma inclinação–intercepto da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função, ou seja

$$y = f(x) = mx + b$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é o intercepto y.

Uma característica peculiar das funções afins é que elas variam a uma taxa constante. Por exemplo, a Figura 2 mostra o gráfico da função afim $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais. Note que quando x sofre um aumento em 0,1, o valor de $f(x)$ se eleva em 0,3. Dessa forma, $f(x)$ cresce três vezes mais rápido que x. Assim, a inclinação do gráfico de $y = 3x - 2$, isto é, 3, pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

FIGURA 2

EXEMPLO 1 ▫

(a) À medida que o ar seco move-se para cima ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10 °C, expresse a temperatura T (em °C) como uma função da altura h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.

(b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que representa a inclinação?

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

SOLUÇÃO

(a) Como estamos supondo que T é uma função linear de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, assim,

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, o intercepto y é $b = 20$.

Também nos é dado que $T = 10$ quando $h = 1$, dessa forma,

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

A inclinação da reta é, portanto, $m = 10 - 20 = -10$ e a função afim procurada é

$$T = -10h + 20$$

(b) O gráfico está esboçado na Figura 3. A inclinação é igual a $m = -10$ °C/km, e representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura.

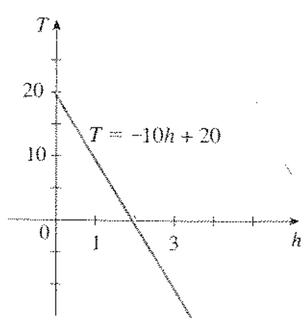


FIGURA 3

(c) A uma altura de $h = 2,5$ km, a temperatura é

$$T = -10(2,5) + 20 = -5 \text{ °C}$$

Se não existir uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo, construímos um **modelo empírico**, inteiramente baseado em dados coletados. Procuramos uma curva que se ajuste aos dados no sentido de que ela capte a tendência dos pontos dados.

TABELA 1

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7
1982	341,1
1984	344,4
1986	347,2
1988	351,5
1990	354,2
1992	356,4
1994	358,9
1996	362,6
1998	366,6
2000	369,4

EXEMPLO 2 A Tabela 1 fornece uma lista de níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa, de 1980 a 2000. Use os dados da Tabela 1 para encontrar um modelo para o nível de dióxido de carbono.

SOLUÇÃO Vamos usar os dados da tabela para fazer um mapa de dispersão na Figura 4, onde t representa o tempo (em anos) e C, o nível de CO_2 (em ppm).

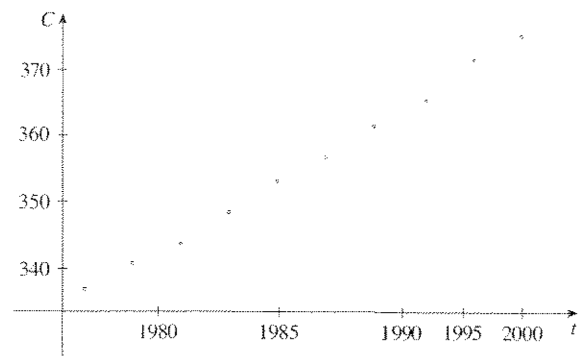


FIGURA 4
Mapa de dispersão para o nível médio de CO_2

Observe que os pontos estão muito próximos de uma linha reta; dessa forma, é natural escolher um modelo linear nesse caso. Porém, há inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses pontos. Qual deveríamos usar? Do gráfico, vemos que uma possibilidade é a reta que passa pelo primeiro e o último pontos dados. A inclinação dessa reta é

$$\frac{369{,}4 - 338{,}7}{2000 - 1980} = \frac{30{,}7}{20} = 1{,}535$$

e sua equação é

$$C - 338{,}7 = 1{,}535\,(t - 1980)$$

ou

$$\boxed{1} \qquad C = 1{,}535t - 2.700{,}6$$

A Equação 1 fornece um modelo linear possível para o nível de dióxido de carbono; seu gráfico está mostrado na Figura 5.

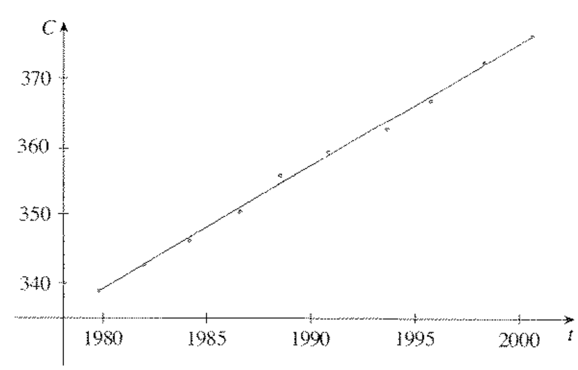


FIGURA 5
Modelo linear por meio do primeiro e do último pontos dados

Embora nosso modelo se ajuste razoavelmente aos dados, ele dá valores mais altos que a maior parte dos níveis reais de CO_2. Um modelo linear melhor é obtido por meio de um

□ Um computador ou uma calculadora gráfica encontra a reta de regressão pelo Método dos Mínimos Quadráticos, que é minimizar a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos dados e a reta. Os detalhes serão esclarecidos na Seção 14.7 do Volume 2.

procedimento da estatística chamado *regressão linear*. Se utilizarmos uma calculadora gráfica, inserimos os dados da Tabela 1, e a calculadora escolhe o comando de regressão linear. (Com o *Maple* usamos o comando *fit[leastsquare]*; com o *Mathematica* empregamos o comando *Fit*.) A máquina dá a inclinação e o intercepto y da reta de regressão como

$$m = 1{,}53818 \qquad b = -2.707{,}25$$

Assim, nosso modelo de mínimos quadrados para o nível de CO_2 é

$$\boxed{2} \qquad C = 1{,}53818t - 2.707{,}25$$

Na Figura 6 fizemos o gráfico da reta de regressão e marcamos os pontos dados. Comparando-a com a Figura 5 vemos que ela fornece um ajuste melhor que o anterior para nosso modelo linear.

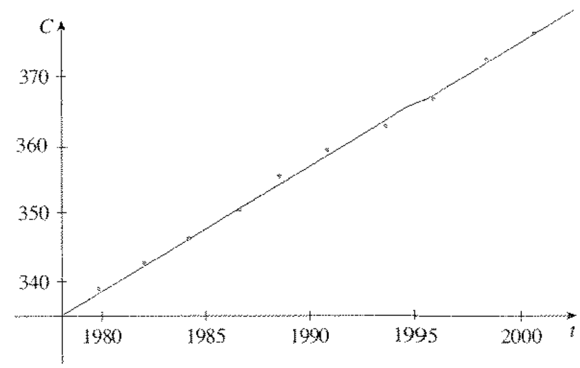


FIGURA 6
Reta de regressão

EXEMPLO 3 □ Use o modelo linear pela Equação 2 para estimar o nível médio de CO_2 em 1987 e predizer o nível do ano em 2010. De acordo com esse modelo, quando o nível de CO_2 excederá 400 ppm?

SOLUÇÃO Usando a Equação 2 com $t = 1987$, estimamos que o nível médio de CO_2 será

$$C(1987) = (1{,}53818)(1987) - 2.707{,}25 \approx 349{,}11$$

Esse é um exemplo de *interpolação*, pois estimamos um valor *entre* os valores observados. (De fato, o Observatório de Mauna Loa registrou em 1987 um nível médio de CO_2 de 348,93 ppm; assim, nossa estimativa é bem precisa.)

Com $t = 2010$, obtemos

$$C(2010) = (1{,}53818)(2010) - 2.707{,}25 \approx 384{,}49$$

Predizemos então que o nível médio de CO_2 no ano de 2010 será de 384,5 ppm. Esse é um exemplo de *extrapolação*, pois predizemos um valor *fora* da região de observações. Conseqüentemente, estamos muito menos seguros sobre a precisão dessa nossa predição.

Usando a Equação 2, vemos que o nível de CO_2 excederá 400 ppm quando

$$1{,}53818t - 2.707{,}25 > 400$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$t > \frac{3.107{,}25}{1{,}53818} \approx 2.020{,}08$$

Portanto estamos predizendo que o nível de CO_2 vai exceder 400 ppm no ano 2020. Essa predição é um pouco arriscada, pois envolve um tempo bem distante de nossas observações.

Polinômios

Uma função P é denominada **polinômio** se

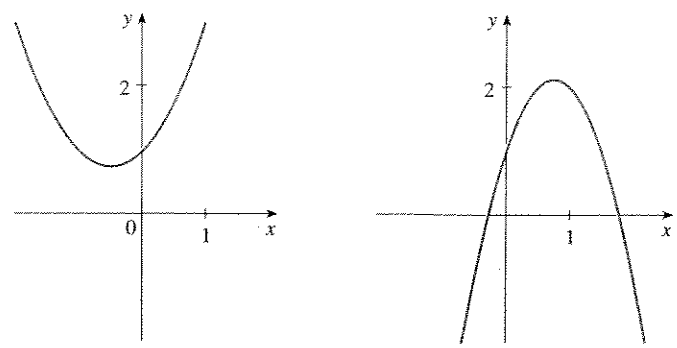
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo, e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n. Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$ e, portanto, é uma função afim. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado **função quadrática**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$, conforme veremos na próxima seção. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
Os gráficos de funções quadráticas são parábolas

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos dos polinômios de grau 4 e 5 nas partes (b) e (c). Vamos ver mais adiante por que os gráficos têm esses aspectos.

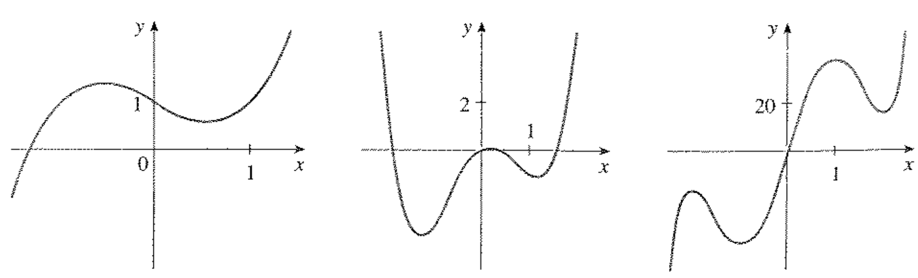


FIGURA 8 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Os polinômios são usados comumente para modelar várias quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, na Seção 3.3 explicaremos por que os economistas freqüentemente usam um polinômio $P(x)$ para representar o custo na produção de x unidades de um produto. No exemplo a seguir vamos usar uma função quadrática para modelar a queda de uma bola.

TABELA 2

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EXEMPLO 4 □ Uma bola é deixada cair desde o topo da Torre CN, 450 m acima do chão, e sua altura h acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na Tabela 2. Encontre um modelo para ajustar os dados e use-o para predizer o tempo após o qual a bola atinge o chão.

SOLUÇÃO Vamos fazer um gráfico de dispersão na Figura 9 e observar que um modelo linear não é apropriado. Parece que os pontos podem estar sobre uma parábola; assim, vamos tentar um modelo quadrático. Usando uma calculadora gráfica ou um CAS (que usa o método dos mínimos quadrados), obtemos o seguinte modelo quadrático:

$$h = 449{,}36 + 0{,}96t - 4{,}90t^2 \tag{3}$$

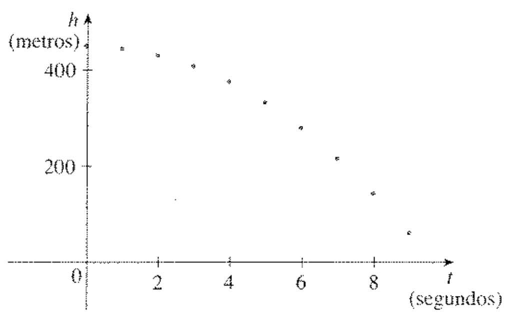


FIGURA 9
Mapa de dispersão para uma bola caindo

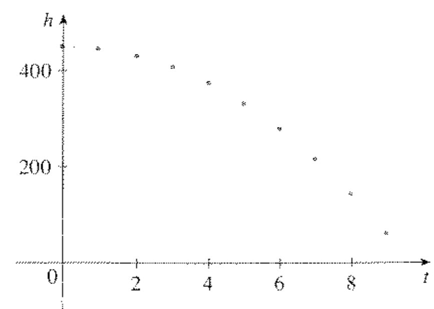


FIGURA 10
Modelo quadrático para uma bola caindo

Na Figura 10 fizemos um gráfico da Equação 3 junto com os pontos dados e vimos que o modelo quadrático fornece um ajuste muito bom.

A bola atinge o chão quando $h = 0$, assim resolvemos a equação quadrática

$$-4{,}90t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$$

A fórmula quadrática fornece

$$t = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{(0{,}96)^2 - 4(-4{,}90)(449{,}36)}}{2(-4{,}90)}$$

A raiz positiva é $t \approx 9{,}67$; dessa forma, predizemos que a bola vai atingir o chão após 9,7 segundos.

Funções Potências

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função potência**. Vamos considerar vários casos.

(i) $a = n$ onde n é um inteiro positivo

Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 11. (Esses são polinômios com um só termo.) Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem com inclinação 1) e $y = x^2$ [uma parábola – veja o Exemplo 2(b) da Seção 1.1].

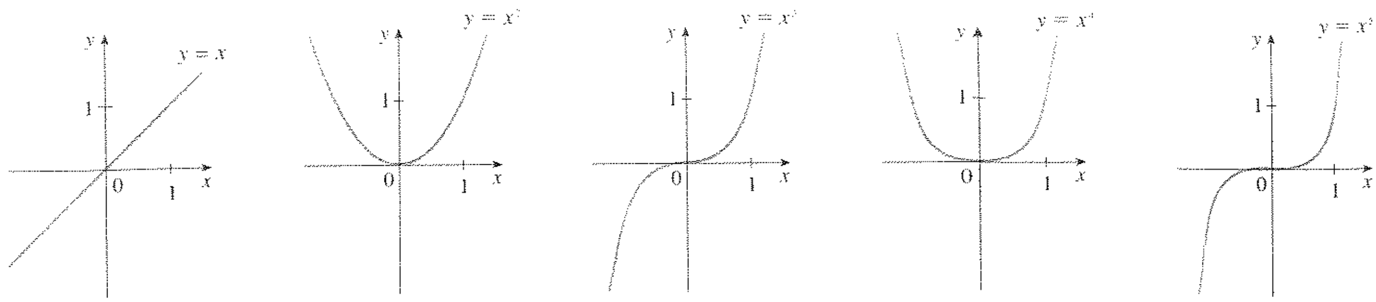


FIGURA 11 Gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5

A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de n ser par ou ímpar. Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico é similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico é similar ao de $y = x^3$. Observe na Figura 12, porém, que à medida que n cresce, o gráfico de $y = x^n$ torna-se mais achatado próximo de zero e mais inclinado quando $|x| \geqslant 1$. (Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor; e x^4 será muito, mas muito menor, e assim por diante.)

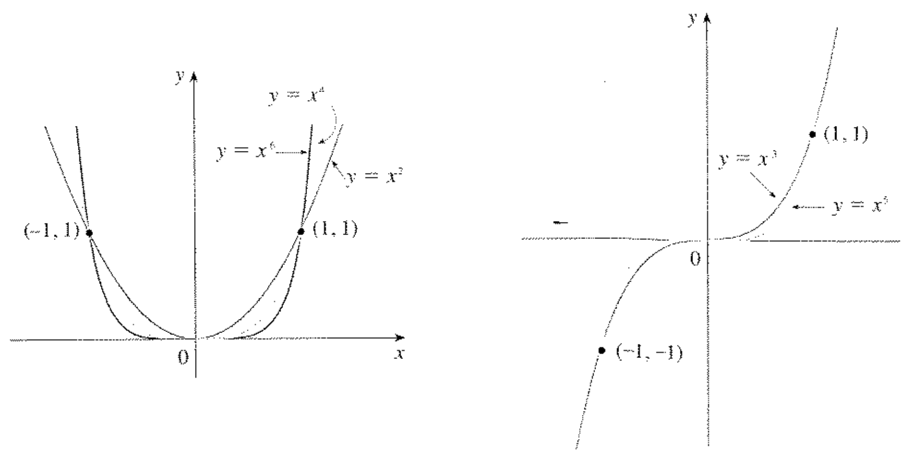


FIGURA 12
Famílias de funções potências

(ii) $a = 1/n$, **onde** n **é um inteiro positivo**

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**. Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$ [veja a Figura 13(a)]. Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, temos a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica) e cujo gráfico está na Figura 13(b). O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar ($n > 3$) é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.

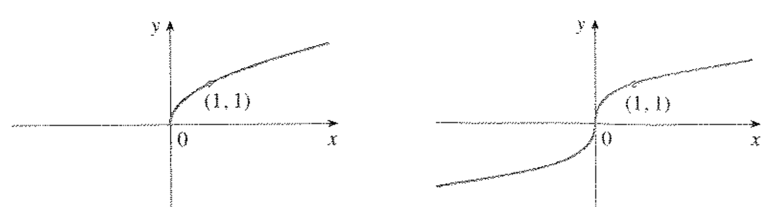


FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

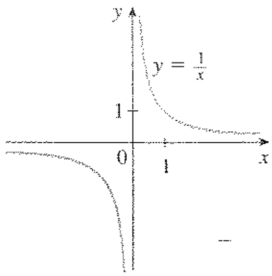


FIGURA 14
A função recíproca

(iii) $a = -1$

O gráfico da **função recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ está na Figura 14. Seu gráfico tem a equação $y = 1/x$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com eixos coordenados como suas assíntotas.

Essa função surge em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que estabelece que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás é inversamente proporcional à pressão:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante. Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo aspecto geral da metade à direita da Figura 14.

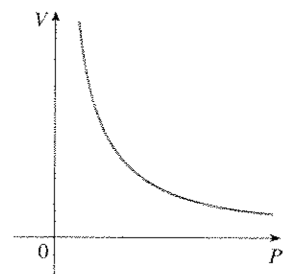


FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

Outro exemplo do uso da função potência na modelagem de um fenômeno físico é discutido no Exercício 22.

Funções Racionais

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um simples exemplo de uma função racional é a função $f(x) = 1/x$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14. A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Seu gráfico está na Figura 16.

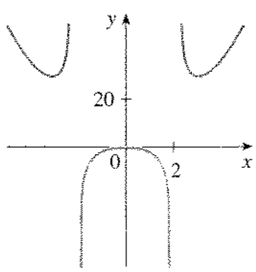


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funções Algébricas

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída usando-se operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) começando com os polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir estão mais alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Quando esboçarmos as funções algébricas no Capítulo 4 veremos que seus gráficos poder assumir uma variedade de formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.

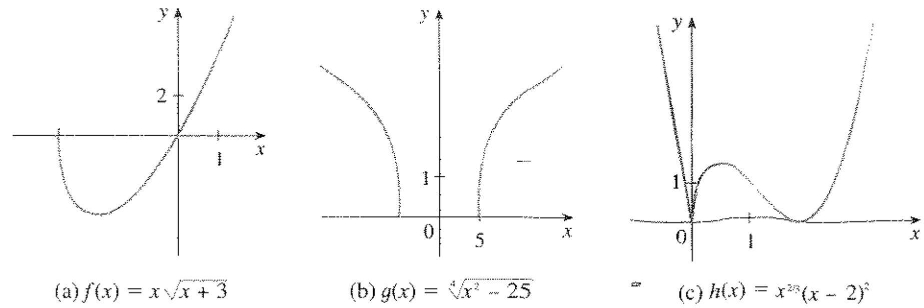


FIGURA 17

Um exemplo de função algébrica ocorre na Teoria da Relatividade. A massa de um partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s é a velocidade d luz no vácuo.

Funções Trigonométricas

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D. Em cálcul convencionamos usar sempre a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicita mente mencionado). Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, deve se entendido que sen x significa o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x. Assim, o gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.

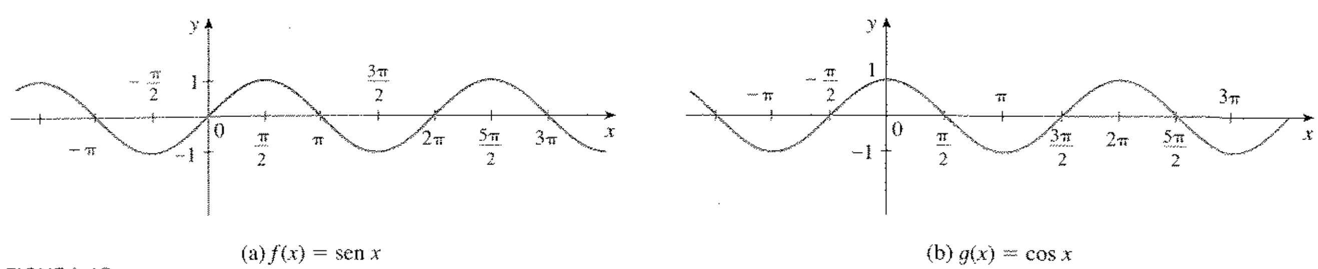


FIGURA 18

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Da mesma forma, os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos inteiros de π; isto é,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{quando} \qquad x = n\pi \quad n \text{ é um inteiro}$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas com um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

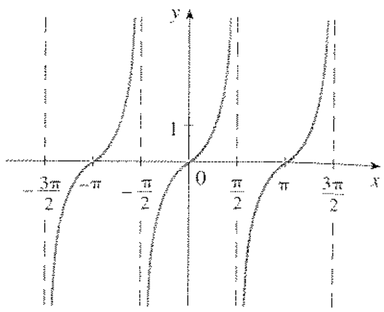


FIGURA 19

$y = \operatorname{tg} x$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas sonoras. Por exemplo, no Exemplo 4 da Seção 1.3 veremos que o modelo razoável para o número de horas com a luz solar na Filadélfia t dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e seu gráfico está na Figura 19. Ela não está definida quando $\cos x = 0$, isto é, quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Sua imagem é $(-\infty, \infty)$.
Observe que a função tangente tem período π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \qquad \text{para todo } x$$

As três funções trigonométricas remanescentes, cossecante, secante e cotangente, são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente. Seus gráficos estão no Apêndice D.

Funções Exponenciais

As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = a^x$, onde a base a é uma constante positiva. Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = (0{,}5)^x$ estão na Figura 20. Em ambos os casos o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é $(0, \infty)$.

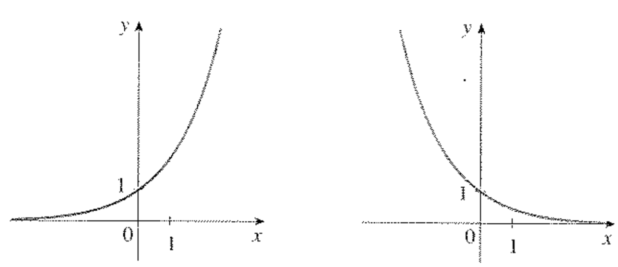


FIGURA 20

(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0{,}5)^x$

As funções exponenciais serão estudadas em detalhes na Seção 1.5, e veremos que elas são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (se $a > 1$) e decaimento radioativo (se $a < 1$).

Funções Logarítmicas

As **funções logarítmicas** são $f(x) = \log_a x$, onde a base a é uma constante positiva. Elas são inversas das funções exponenciais e serão estudadas na Seção 1.6. A Figura 21 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com várias bases. Em cada caso o domínio é $(0, \infty)$, a imagem é $(-\infty, \infty)$ e as funções crescem vagarosamente quando $x > 1$.

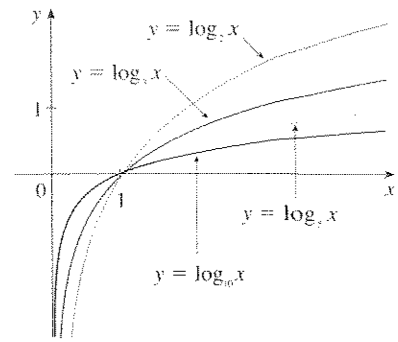


FIGURA 21

Funções Transcendentais

São as funções não algébricas. O conjunto das funções transcendentais inclui as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial e logarítmica, mas também inclui um vasto número de outras funções que nunca tiveram um nome. No Capítulo 11, no Volume II, estudaremos as funções transcendentais, que são definidas como soma de séries infinitas.

EXEMPLO 5 □ Classifique as funções a seguir como um dos tipos discutidos.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUÇÃO

(a) $f(x) = 5^x$ é uma função exponencial. (x é o expoente.)

(b) $g(x) = x^5$ é a função potência. (x é a base.) Podemos também considerá-la um polinômio de grau 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ é uma função algébrica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ é um polinômio de grau 4.

1.2 Exercícios

1–2 □ Classifique cada função como uma função potência, função raiz, polinomial (estabeleça seu grau), função racional, função algébrica, função trigonométrica, função exponencial ou função logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \operatorname{tg} 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

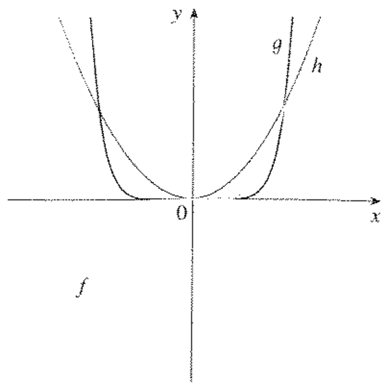
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

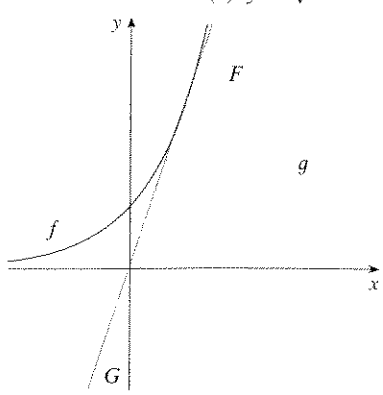
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

3–4 ▢ Associe cada equação a seu gráfico. Explique sua escolha. (Não use computador ou calculadora gráfica.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Encontre uma equação para uma família de funções lineares com inclinação 2 e esboce os gráficos de vários membros da família.
(b) Encontre uma equação para a família de funções lineares tais que $f(2) = 1$ e esboce os gráficos de vários membros da família.
(c) Quais funções pertencem a ambas as famílias?

6. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = 1 + m(x + 3)$ têm em comum? Esboce o gráfico de vários membros da família.

7. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = c - x$ têm em comum? Esboce os gráficos de vários membros da família.

8. Um administrador de mercado de pulgas sabe por experiência que se cobrar x dólares pelo aluguel de um espaço, então o número y de espaços que ele pode alugar é o dado pela equação $y = 200 - 4x$.
(a) Esboce o gráfico dessa função linear. (Lembre-se de que o aluguel cobrado pelo espaço e o número de espaços alugados não podem ser quantidades negativas.)
(b) O que representam a inclinação, o intercepto y e o intercepto x?

9. A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) é dada pela função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) O que representa nesse gráfico a inclinação? O que representa o intercepto F do gráfico?

10. José deixa Detroit às 2 horas da tarde e guia a uma velocidade constante em direção a oeste pela rodovia I-96. Ele passa por Ann Arbor, a 40 milhas de Detroit, às 2h50 da tarde.
(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.
(b) Esboce um gráfico da equação da parte (a).
(c) Qual é a inclinação dessa reta? O que ela representa?

11. Biólogos notaram que a taxa de cantos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser linear. Um grilo canta 113 vezes por minuto a 70 °F e 173 por minuto a 80 °F.
(a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função do número de cantos por minuto N.
(b) Qual é a inclinação do gráfico? O que ele representa?
(c) Se os grilos estiverem cantando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

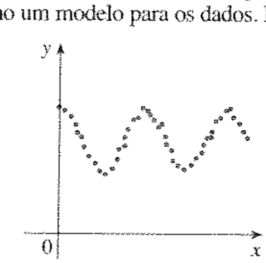
12. Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa \$ 2.200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e \$ 4.800 para produzir 300 cadeiras em um dia.
(a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. Então esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual o intercepto y do gráfico e o que ele representa?

13. Na superfície do oceano, a pressão da água é igual à do ar acima da água, 15 lb/pol². Abaixo da superfície, a pressão da água cresce em 4,34 lb/pol² para cada 10 pés de descida.
(a) Expresse a pressão da água como uma função da profundidade abaixo da superfície do oceano.
(b) A que profundidade a pressão é de 100 lb/pol²
(1 lb/pol² = 0,068046 atm = 703,07 kgf/m²)

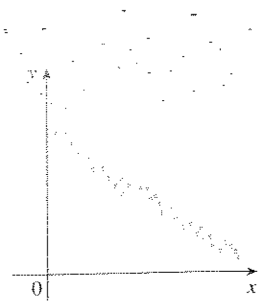
14. O custo mensal do uso de um carro depende do número de milhas rodadas. Lia descobriu que em maio ela gastou \$ 380 e guiou 480 milhas e, em junho, gastou \$ 460 e guiou 800 milhas.
(a) Expresse o custo mensal C como uma função da distância percorrida d, supondo que a relação linear forneça um modelo apropriado.
(b) Use a parte (a) para predizer o custo quando 1.500 milhas foram percorridas por mês.
(c) Esboce o gráfico da função. O que a inclinação representa?
(d) O que representa o intercepto y?
(e) Por que uma função é um modelo apropriado nessa situação?

15–16 ▢ Para cada marca de dispersão, decida qual tipo de função você escolheria como um modelo para os dados. Explique sua escolha.

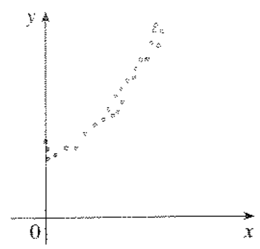
15. (a)



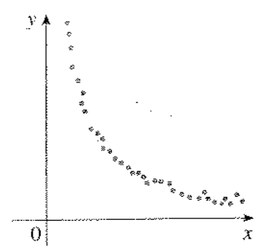
(b)



16. (a)



(b)



17. A tabela mostra as taxas de úlcera péptica (medida no decurso de toda vida) (a cada 100 habitantes), para várias rendas familiares, conforme reportado em 1989 pelo National Health Interview Survey.

Renda familiar	Taxa de úlcera (a cada 100 habitantes)
\$ 4.000	14,1
\$ 6.000	13,0
\$ 8.000	13,4
\$ 12.000	12,5
\$ 16.000	12,0
\$ 20.000	12,4
\$ 30.000	10,5
\$ 45.000	9,4
\$ 60.000	8,2

(a) Faça um mapa de dispersão desses dados e decida se um modelo linear é apropriado.
(b) Faça um gráfico de modelo linear usando o primeiro e o último pontos.
(c) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão de mínimos quadrados.
(d) Use o modelo linear de (c) para estimar a taxa de úlcera correspondente a uma renda de \$ 25.000.
(e) De acordo com o modelo, qual a chance de alguém com uma renda de \$ 80.000 sofrer de úlcera péptica?
(f) Você acha razoável aplicar o modelo a alguém com uma renda de \$ 200.000?

18. Biólogos observaram que a taxa de canto dos grilos de uma certa espécie aparentemente está relacionada com a temperatura. A tabela mostra as taxas de canto para várias temperaturas.

[illegible]	[illegible]
[illegible]	20
[illegible]	46
60	79
[illegible]	91
[illegible]	113
[illegible]	140
80	[illegible]
85	198
90	211

(a) Faça um mapa de dispersão dos dados.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear da parte (b) para estimar a taxa de canto a 100 °F.

19. A tabela dá as alturas dos vencedores do salto com vara nas Olimpíadas durante o século XX.

Ano	Altura (pés)	Ano	Altura (pés)
1900	10,83	1956	14,96
1904	11,48	1960	15,42
1908	12,17	1964	16,73
1912	12,96	1968	17,71
1920	13,42	1972	18,04
1924	12,96	1976	18,04
1928	13,77	1980	18,96
1932	14,15	1984	18,85
1936	14,27	1988	19,77
1948	14,10	1992	19,02
1952	14,92	1996	19,42

(a) Faça um mapa de dispersão e decida se um modelo linear é apropriado.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear para predizer qual a altura do vencedor nas Olimpíadas de 2000 e compare com a altura do vencedor de 19,36 pés.
(d) É razoável usar o modelo para predizer a altura do vencedor para as Olimpíadas de 2100?

20. Um estudo do U. S. Office of Science and Technology em 1972 estimou o custo para reduzir em certas porcentagens a emissão de poluentes pelos automóveis:

Redução nas emissões (%)	Custo por carro (em \$)	Redução nas emissões (%)	Custo por carro (em \$)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Encontre um modelo que capte a tendência de "rendimentos decrescentes" desses dados.

21. Use os dados da tabela para modelar a população mundial no século XX por uma função cúbica. Então utilize seu modelo para estimar a população no ano de 1925.

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

22. A tabela mostra a média das distâncias d dos planetas ao Sol (tomando a unidade de medida para ser a distância da Terra ao Sol) e seus períodos T (tempo de revolução em anos).

Planeta	d	T
Mercúrio	0,387	0,241
Vênus	0,723	0,615
Terra	1,000	1,000
Marte	1,523	1,881
Júpiter	5,203	11,861
Saturno	9,541	29,457
Urano	19,190	84,008
Netuno	30,086	164,784
Plutão	39,507	248,350

(a) Ajuste um modelo de função potência aos dados.

(b) A Terceira Lei de Kepler para o Movimento Planetário estabelece que "O quadrado do período da revolução de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol". Seu modelo confirma a Terceira Lei de Kepler?

1.3 Novas Funções a partir de Antigas

Nesta seção partimos das funções definidas na Seção 1.2 e obtemos novas funções por deslocamento, esticamento e reflexão de seus gráficos. Vamos mostrar também como combinar pares de funções por meio de operações aritméticas ordinárias e por composição.

Transformação de Funções

Aplicando certas transformações aos gráficos de uma função dada obtemos o gráfico de funções correlacionadas, o que nos capacita fazer o esboço de muitas funções à mão. Vamos considerar inicialmente as **translações**. Se c for um número positivo, então o gráfico de $y = f(x) + c$ é precisamente o gráfico de $y = f(x)$ deslocado para cima em c unidades (uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número c). Da mesma forma, se fizermos $g(x) = f(x - c)$, onde $c > 0$, então o valor de g em x é igual ao valor de f em $x - c$ (c unidades à esquerda de x). Portanto o gráfico de $y = f(x - c)$ é precisamente o de $y = f(x)$ deslocado de c unidades para a direita (veja a Figura 1).

Deslocamentos Verticais e Horizontais Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de
$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima
$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo
$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita
$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda

Vamos considerar agora as transformações de **esticamento** e **reflexão**. Se $c > 1$, então o gráfico de $y = cf(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ esticado por um fator c na direção vertical (pois cada coordenada y fica multiplicada pelo mesmo número c). O gráfico de $y = -f(x)$

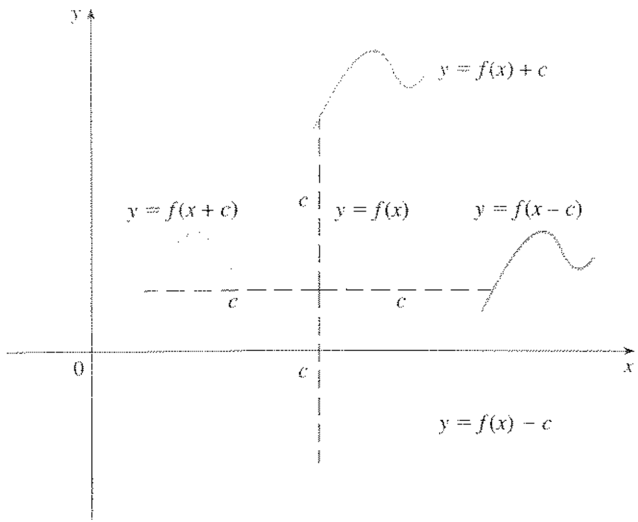


FIGURA 1
Translações do gráfico de f

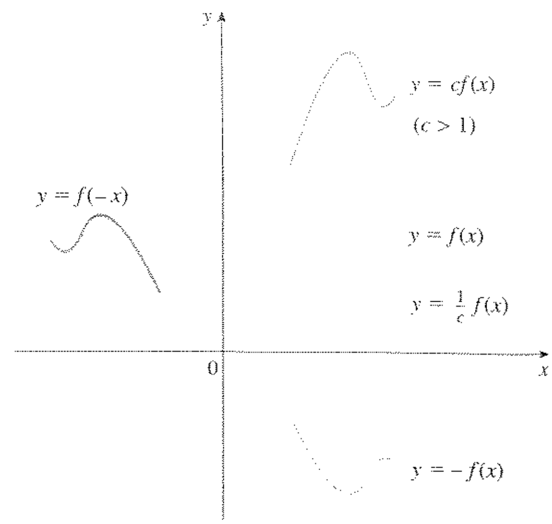


FIGURA 2
Esticamentos e reflexões do gráfico de f

é o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x, pois o ponto (x, y) será substituído pelo pont $(x, -y)$. (Veja a Figura 2 e a tabela a seguir, onde estão os resultados de várias transfor mações de esticamentos, compressão e reflexão.)

Reflexões e Esticamentos Horizontais e Verticais Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

$y = cf(x)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = (1/c)\,f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = f(x/c)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x
$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y

A Figura 3 ilustra essas transformações de esticamento quando aplicadas à funçã cosseno com $c = 2$. Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2\cos x$, multiplicamos as coor denadas y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico d $y = \cos x$ fica esticado verticalmente por um fator de 2.

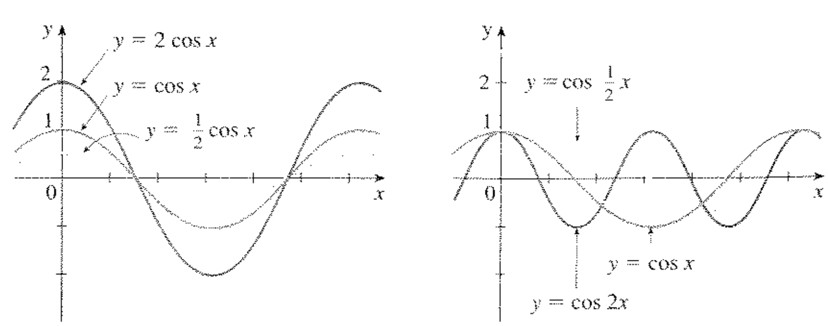
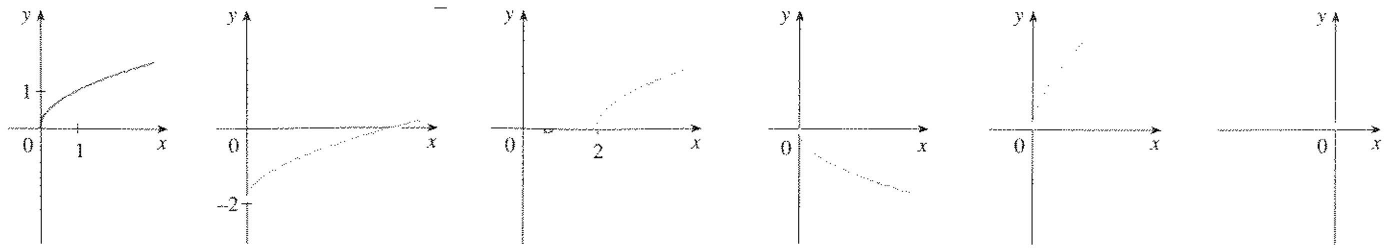


FIGURA 3

EXEMPLO 1 □ Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use as transformações para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, e $y = \sqrt{-x}$.

SOLUÇÃO O gráfico da função raiz quadrada $y = \sqrt{x}$, obtido da Figura 13 na Seção 1.2, está mostrado na Figura 4(a). Nas outras partes da figura esboçamos $y = \sqrt{x} - 2$ deslocando 2 unidades para baixo; $y = \sqrt{x - 2}$ deslocando 2 unidades para a direita; $y = -\sqrt{x}$ refletindo em torno de eixo x; $y = 2\sqrt{x}$ esticando verticalmente por um fator de 2; e $y = \sqrt{-x}$ refletindo em torno do eixo y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

EXEMPLO 2 □ Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUÇÃO Completando o quadrado, escrevemos a equação do gráfico como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Isso significa que obtemos o gráfico desejado começando com a parábola $y = x^2$ e deslocando-a 3 unidades para a esquerda e então 1 unidade para cima (veja a Figura 5).

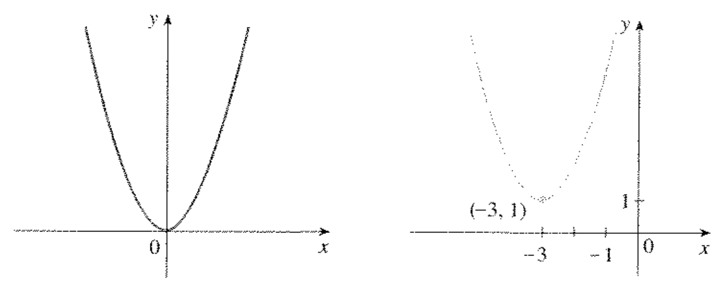


FIGURA 5 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

EXEMPLO 3 □ Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $y = \text{sen}\, 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen}\, x$

SOLUÇÃO

(a) Obtemos o gráfico $y = \text{sen}\, 2x$ a partir de $y = \text{sen}\, x$ comprimindo horizontalmente esse último por um fator de 2 (veja as Figuras 6 e 7). Assim, enquanto o período de $y = \text{sen}\, x$ é 2π, o período de $y = \text{sen}\, 2x$ é $2\pi/2 = \pi$.

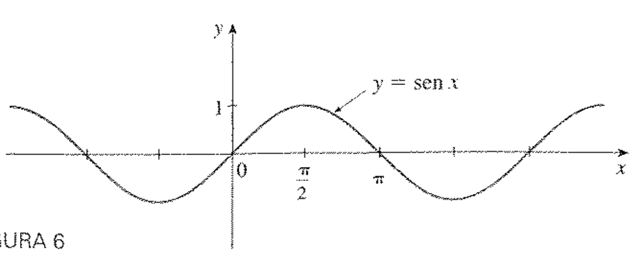


FIGURA 6

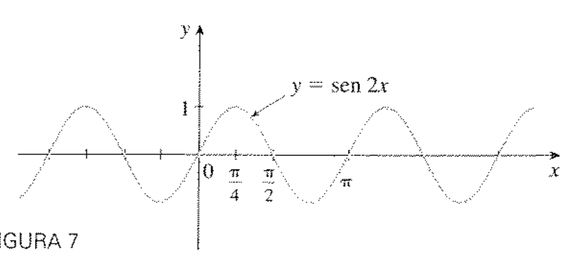


FIGURA 7

(b) Para obter o gráfico de $y = 1 - \text{sen}\, x$, começamos novamente com $y = \text{sen}\, x$. Refletimos em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -\text{sen}\, x$ e então deslocamos uma unidade para cima para obter $y = 1 - \text{sen}\, x$ (veja a Figura 8).

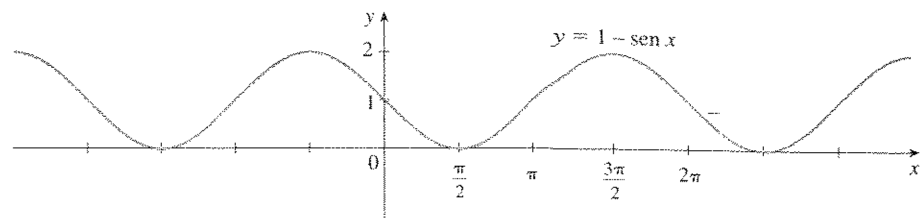
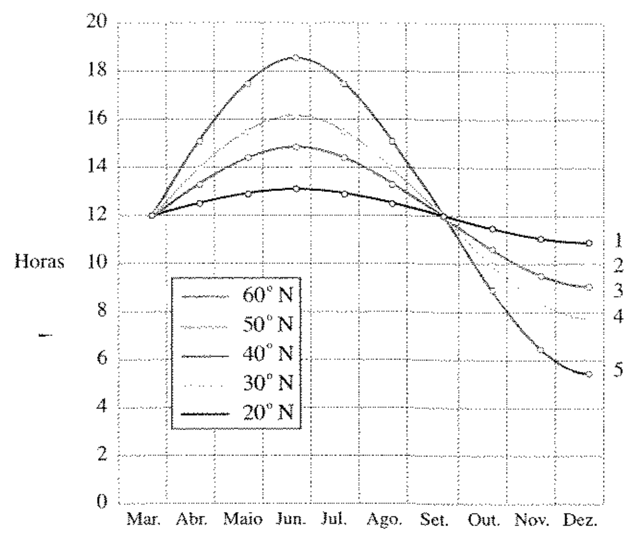


FIGURA 8

EXEMPLO 4 ☐ A Figura 9 mostra vários números de horas de luz solar como uma função da época em diversas latitudes. Dado que a Filadélfia está localizada a aproximadamente 40 °N latitude, encontre uma função que modele a duração da luz solar durante os dias nessa cidade.



Fonte: Lucia C. Harrison. *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nova York: Silver, Burdett, 1935, p. 40.)

FIGURA 9
Gráfico da extensão da luz solar durante o dia, de 21 de março a 21 de dezembro em várias latitudes.

SOLUÇÃO Observe que cada curva assemelha-se à função seno deslocada e esticada. Olhando a curva número 3 notamos que, na latitude de Filadélfia à luz do dia, dura cerca de 14,8 horas em 21 de junho e 9,2 horas em 21 de dezembro; assim, a amplitude da curva (o fator pelo qual esticamos verticalmente a curva do seno) é $\frac{1}{2}(14{,}8 - 9{,}2) = 2{,}8$.

Por qual fator deveremos esticar horizontalmente a curva do seno se a medida do tempo t for em dias? Como temos cerca de 365 dias em um ano, o período de nosso modelo deve ser de 365 dias. Mas o período de $y = \text{sen}\, t$ é 2π; dessa forma, o fator de esticamento horizontal é $c = 2\pi/365$.

Notamos também que a curva começa seu ciclo em 21 de março, 80º dia do ano, e então devemos deslocar a curva em 80 unidades para a direita. Além disso, deslocamos em 12 unidades para cima. Assim sendo, modelamos o comprimento dos dias na Filadélfia no t-ésimo dia do ano pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8\, \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Outra transformação de algum interesse é tomar o valor absoluto de uma função. S $y = |f(x)|$, então, de acordo com a definição de valor absoluto, $y = f(x)$ quando $f(x) \geqslant ($

e $y = -f(x)$ quando $f(x) < 0$. Isso nos mostra como obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$: a parte do gráfico que está acima do eixo x permanece a mesma; enquanto a parte que está abaixo do eixo x é refletida em torno do eixo x.

EXEMPLO 5 □ Esboce o gráfico da função $y = |x^2 - 1|$.

SOLUÇÃO Primeiro fazemos o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$ como na Figura 10(a) deslocando para baixo em uma unidade a parábola $y = x^2$. Vemos que o gráfico está abaixo do eixo x quando $-1 < x < 1$; assim, refletimos essa parte do gráfico em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ na Figura 10(b).

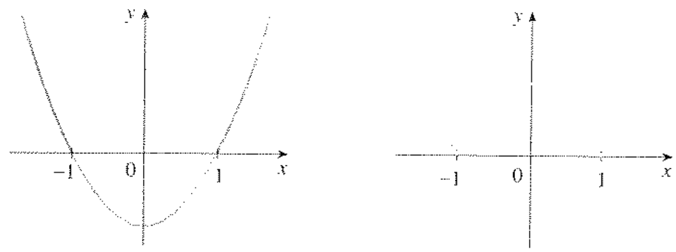


FIGURA 10

(a) $y = x^2 - 1$

(b) $y = |x^2 - 1|$

Combinações de Funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais.

Definimos a soma $f + g$ pela equação

$$\boxed{1} \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

então o lado direito da Equação 1 faz sentido se $f(x)$ e $g(x)$ estiverem definidas, isto é, se x pertencer ao domínio de f e também de g. Se o domínio de f é A e o de g é B, então o domínio $f + g$ será a interseção desses domínios, isto é, $A \cap B$.

Observe que o sinal $+$ do lado esquerdo da Equação 1 significa a operação de adição de *funções*, mas o sinal $+$ do lado direito da equação significa a operação de adição dos *números* $f(x)$ e $g(x)$.

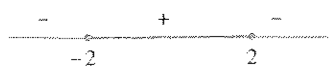
Da mesma forma, definimos a diferença $f - g$ e o produto fg, e seus domínios são também $A \cap B$. Mas ao definir o quociente f/g devemos lembrar que não é possível dividir por zero.

Álgebra de Funções Sejam f e g funções com domínios A e B. Então as funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g estão definidas da seguinte forma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{domínio} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

EXEMPLO 6 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, encontre as funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g.

Outra maneira de resolver $4 - x^2 \geqslant 0$:
$(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$



SOLUÇÃO O domínio de $f(x) = \sqrt{x}$ é $[0, \infty)$. O domínio de $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ consiste em todos os números x tais que $4 - x^2 \geqslant 0$, isto é, $x^2 \leqslant 4$. Tomando as raízes quadradas em ambos os lados, obtemos $|x| \leqslant 2$ ou $-2 \leqslant x \leqslant 2$, assim, o domínio de g é o intervalo $[-2, 2]$. A interseção dos domínios de f e g é

$$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$$

Dessa forma, de acordo com as definições temos

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x - x^3} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}} \qquad 0 \leqslant x < 2$$

Observe que o domínio de f/g é o intervalo $[0, 2)$, pois precisamos excluir $x = 2$, uma vez que $g(2) = 0$.

O gráfico da função $f + g$ é obtido a partir dos de f e g por **adição gráfica**. Isso significa que somamos as coordenadas y como na Figura 11. A Figura 12 mostra o resultado desse procedimento para fazer o gráfico da função $f + g$ do Exemplo 6.

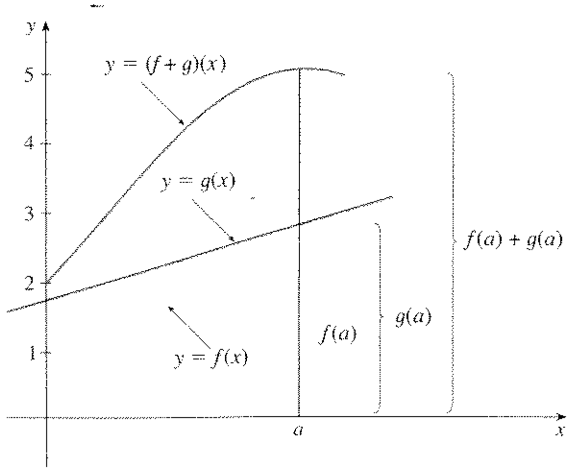


FIGURA 11

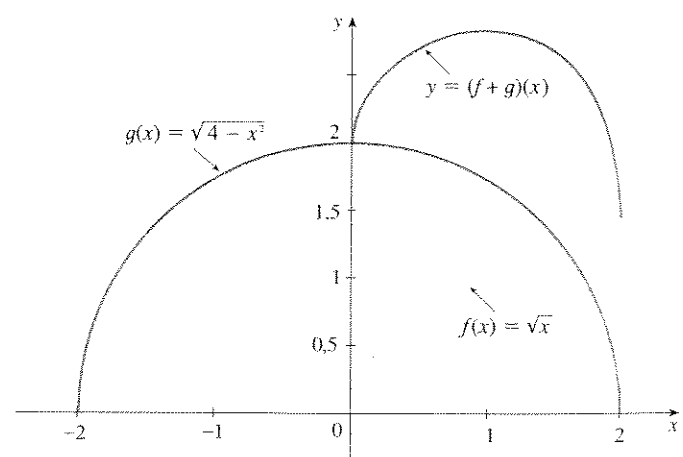


FIGURA 12

Composição de Funções

Há outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que y é uma função de u que é uma função de x, segue que em última análise y é uma função de x. Calculamos isso por substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

O procedimento denomina-se *composição*, pois a nova função é *composta* de duas funções dadas f e g.

Em geral, dadas duas funções f e g, começamos com um número x no domínio de g e encontramos sua imagem $g(x)$. Se esse número $g(x)$ estiver no domínio de f, então podemos calcular o valor de $f(g(x))$. O resultado é uma nova função $h(x) = f(g(x))$ obtida pela substituição de g em f. Ela é denominada *composição* (ou *composta*) de f e g e é denotada por $f \circ g$ ("f bola g").

Definição Dadas duas funções f e g, a função **composta** $f \circ g$ (também chamada **composição** de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tal que $g(x)$ está no domínio de f. Ou seja, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que $g(x)$ e $f(g(x))$ estiverem definidas. A melhor maneira de ver $f \circ g$ é por intermédio de um diagrama de máquina (Figura 13) ou de um diagrama de flechas (Figura 14).

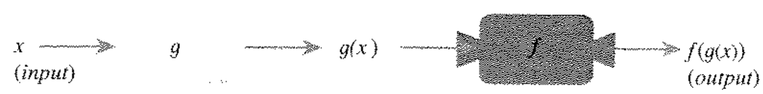


FIGURA 13

A máquina $f \circ g$ é composta de duas outras, a de g e a de f.

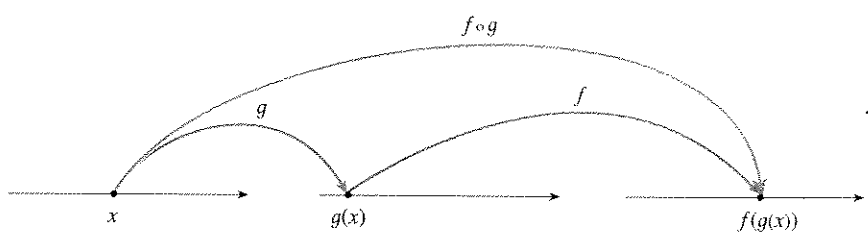


FIGURA 14

Diagrama de flechas para $f \circ g$

EXEMPLO 7 Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre a função composta $f \circ g$ e também $g \circ f$.

SOLUÇÃO Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA Você pode ver no Exemplo 7 que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. Lembre-se de que a notação $f \circ g$ significa que a função g é aplicada primeiro e depois f. No Exemplo 7, $f \circ g$ é a função que *primeiro* subtrai 3 e *então* se eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que *primeiro* se eleva ao quadrado e *então* subtrai 3.

EXEMPLO 8 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre cada uma das funções e seu domínio.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUÇÃO

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Se $0 \leqslant a \leqslant b$, então $a^2 \leqslant b^2$.

Para $\sqrt{x}$ estar definida, devemos ter $x \geqslant 0$. Para $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ ser estabelecida, devemos ter $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, isto é, $\sqrt{x} \leqslant 2$ ou $x \leqslant 4$. Assim, temos $0 \leqslant x \leqslant 4$, e o domínio de $g \circ f$ é o intervalo fechado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $f \circ f$ é $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Essa expressão está definida quando $2 - x \geqslant 0$, isto é, $x \leqslant 2$ e $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. Essa última desigualdade é equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, ou $2 - x \leqslant 4$, isto é, $x \geqslant -2$. Assim, $-2 \leqslant x \leqslant 2$; logo, o domínio de $g \circ g$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$. ◻

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g, e depois f como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EXEMPLO 9 ◻ Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$ ◻

Até aqui usamos a composição para construir as funções complicadas a partir das mais simples. Mas em cálculo é freqüentemente proveitoso ser capaz de decompor uma função complicada em funções mais simples, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 10 ◻ Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g e h tais que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUÇÃO Uma vez que $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, a fórmula para F estabelece que: primeiro adicionamos 9, e então tomamos o cosseno do resultado e, finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Então

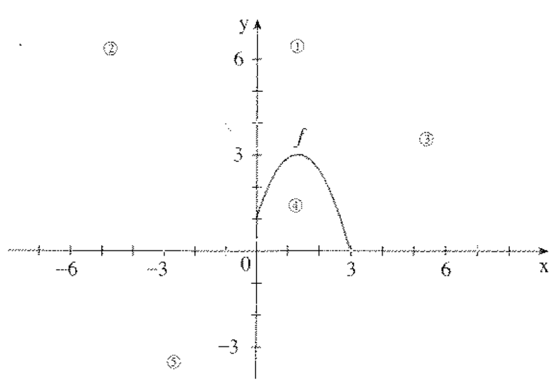
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$ ◻

1.3 Exercícios

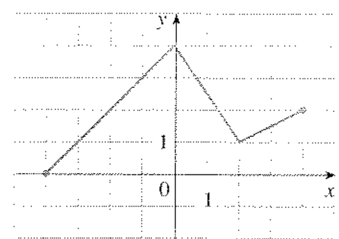
1. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma.
   (a) Desloque 3 unidades para cima.
   (b) Desloque 3 unidades para baixo.
   (c) Desloque 3 unidades para a direita.
   (d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
   (e) Faça uma reflexão em torno do eixo x.
   (f) Faça uma reflexão em torno do eixo y.
   (g) Estique verticalmente por um fator de 3.
   (h) Encolha verticalmente por um fator de 3.

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
   (a) $y = 5f(x)$
   (b) $y = f(x - 5)$
   (c) $y = -f(x)$
   (d) $y = -5f(x)$
   (e) $y = f(5x)$
   (f) $y = 5f(x) - 3$

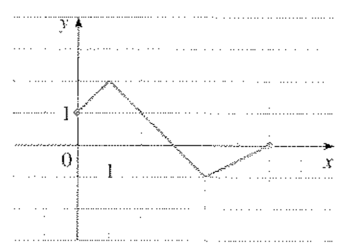
3. O gráfico $y = f(x)$ é dado. Associe cada equação com seu gráfico e dê razões para suas escolhas.
   (a) $y = f(x - 4)$
   (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$
   (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$



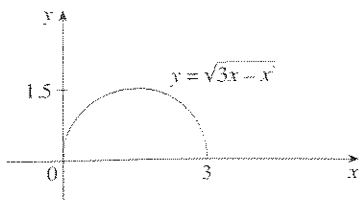
4. O gráfico de f é dado. Esboce os gráficos das seguintes funções.
   (a) $y = f(x + 4)$
   (b) $y = f(x) + 4$
   (c) $y = 2f(x)$
   (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



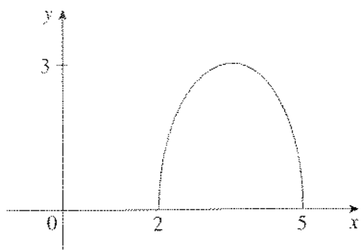
5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções.
   (a) $y = f(2x)$
   (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
   (c) $y = f(-x)$
   (d) $y = -f(-x)$



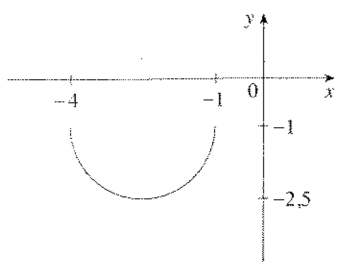
6–7 □ O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use as transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.



6.



7.



8. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$ e o de $y = \operatorname{sen} x$? Use sua resposta e a Figura 6 para esboçar o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) Como está relacionado ao gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$ o gráfico de $y = \sqrt{x}$? Utilize sua resposta e a Figura 4(a) para esboçar o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Faça o gráfico de cada função, sem desenhar os pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2, e então aplicando as transformações apropriadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}(x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = (x + 2)^4 + 3$

19. $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

22. $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = |\operatorname{sen} x|$

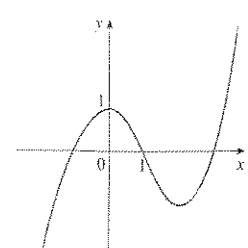
24. $y = |x^2 - 2x|$

25. A cidade de New Orleans está localizada a uma latitude de 30 °N. Use a Figura 9 para encontrar uma função que modele o número de horas do dia nessa cidade como uma função da época do ano. Use o fato de que nessa cidade em 31 de março o Sol surge às 5h51 da manhã e se põe às 6h18 da tarde para verificar a precisão de seu modelo.

26. Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou grandeza da estrela) é 4,0, e seu brilho varia de $\pm 0{,}35$ em grandeza. Encontre uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

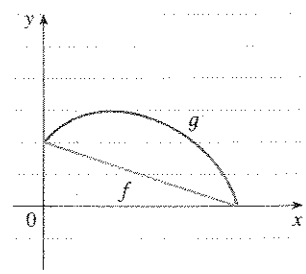
27. (a) Como o gráfico de $y = f(|x|)$ está relacionado com o gráfico de f?
(b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen}|x|$.
(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.

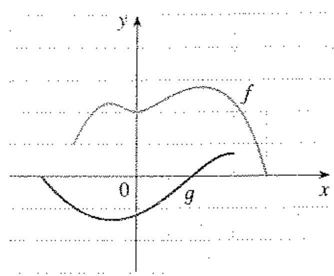


29–30 □ Use a adição gráfica para esboçar o gráfico de $f + g$.

29.



30.



31–32 □ Encontre $f + g$, $f - g$, fg e f/g, e estabeleça os domínios.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

33–34 □ Use os gráficos de f e g e o método da adição gráfica para esboçar os gráficos de $f + g$.

33. $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$

34. $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^2$

35–40 □ Encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$; e seus domínios.

35. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = 1/x$

37. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

38. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = 5x^2 + 3x + 2$

39. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

40. $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x^2 + 1$

41–44 □ Encontre $f \circ g \circ h$.

41. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 1$

42. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 1 - x$

43. $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x + 3$

44. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sqrt{x + 3}$

45–50 □ Expresse na forma as funções $f \circ g$.

45. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

46. $F(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

47. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

48. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

49. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

50. $u(t) = \dfrac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$

51–53 □ Expresse na forma as funções $f \circ g \circ h$.

51. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

52. $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

53. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

54. Use a tabela para determinar o valor de cada expressão.

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$

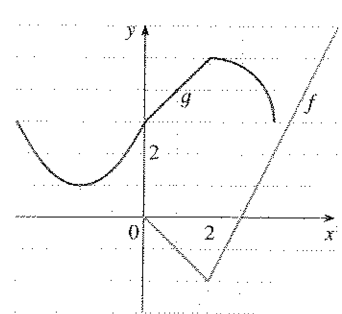
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

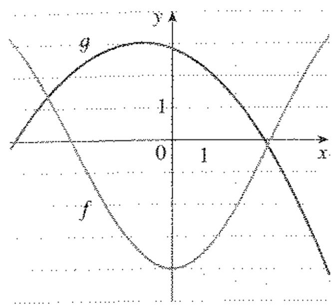
55. Use os gráficos dados de f e g para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$

(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



56. Use os gráficos dados de f e g para estimar o valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \dots, 5$. Use essas estimativas para esboçar o gráfico de $f \circ g$.



57. A queda de uma pedra em um lago cria ondas circulares que se espalham a uma velocidade de 60 cm/s.

(a) Expresse o raio desse círculo como uma função do tempo t (em segundos).

(b) Se A é a área do círculo como uma função do raio, encontre $A \circ r$ e interprete-a.

58. Um avião está voando a uma velocidade de 350 mi/h, a uma altitude de 1 milha, e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.

(a) Expresse a distância horizontal de vôo d (em milhas) como uma função de t.

(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.

(c) Use a composição para expressar s como uma função de t.

59. A **função de Heaviside** H é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.

(a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.

(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.

(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito quando é ligada uma chave em $t = 5$ segundos e 240 volts são aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$. (Note que começar em $t = 5$ corresponde a uma translação.)

60. A função de Heaviside definida no Exercício 59 pode também ser usada para definir uma **função rampa** $y = ctH(t)$, que representa um crescimento gradual na voltagem ou corrente no circuito.

(a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.

(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts em um intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.

(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito se em $t = 7$ s for ligada uma chave e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts em um período de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

61. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função f tal que $f \circ g = h$. (Pense sobre quais operações deveriam ser feitas em g para chegar em h.)

(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

62. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, encontre uma função g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponha g uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

64. Suponha g uma função ímpar e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par? E se f for ímpar? E se f for par?

1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores

Nesta seção vamos supor que você tenha acesso a uma calculadora ou a um computador com um *software* gráfico. Vamos ver como o uso desses dispositivos nos possibilita fazer o gráfico de funções complicadas e resolver problemas complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos. Vamos apontar também alguns dos perigos ocultos nessas máquinas.

As calculadoras gráficas e os computadores podem fazer gráficos bem precisos de funções. Mas, como será visto no Capítulo 4, só por meio do cálculo podemos estar seguros de ter coberto todos os aspectos interessantes dos gráficos.

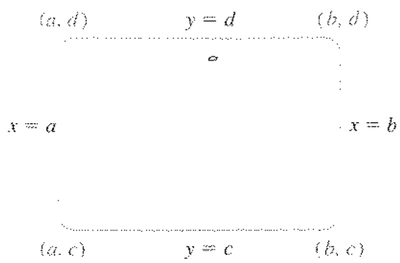


FIGURA 1
A janela retangular $[a, b]$ por $[c, d]$

Tanto calculadoras quanto computadores exibem uma parte retangular do gráfico de uma função em uma **janela de exposição** ou **tela de inspeção**, que será chamada aqui de **janela retangular**. A visão-padrão sempre nos fornece uma imagem incompleta ou enganadora, assim é importante escolher com cuidado a janela retangular. Se escolhermos a variação de x de $Xmín = a$ até $Xmáx = b$ e os valores de y de $Ymín = c$ até $Ymáx = d$, então a parte do gráfico que está no retângulo é

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

mostrada na Figura 1. Vamos nos referir a ela como *janela retangular* $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

A máquina faz o gráfico da função f da mesma forma que você faria. Ela desenha pontos da forma $(x, f(x))$ para um certo número de valores igualmente espaçados de x entre a e b. Se determinado valor de x não estiver no domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora da janela retangular, ela vai para o próximo valor de x. A máquina conecta cada ponto com o precedente, formando assim uma representação do gráfico de f.

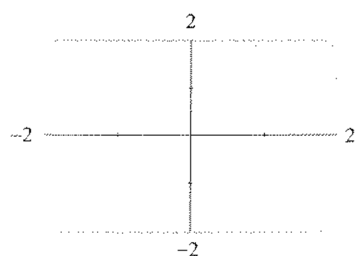
EXEMPLO 1 □ Em cada uma das janelas retangulares que se seguem faça o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$.

(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

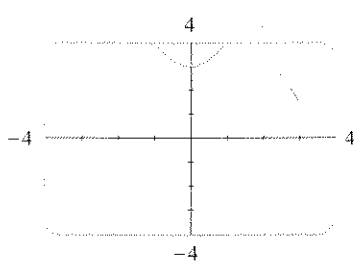
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1.000]$

SOLUÇÃO Para a parte (a) escolhemos $Xmín = -2$, $Xmáx = 2$, $Ymín = -2$ e $Ymáx = 2$. O gráfico resultante está na Figura 2(a). A janela está em branco! Um instante de reflexão nos dá a explicação: observe que $x^2 \geqslant 0$ para todo x, logo $x^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x. Assim a imagem da função $f(x) = x^2 + 3$ é $[3, \infty)$. Isso significa que o gráfico de f está inteiramente fora da janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

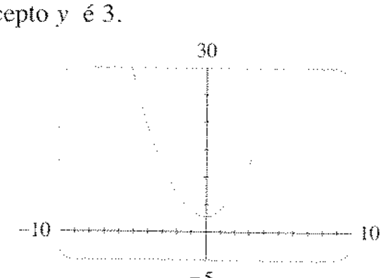
Os gráficos para as janelas retangulares das partes (b), (c) e (d) estão na Figura 2. Note que em (c) e (d) a visão está mais completa, porém em (d) não fica claro que o intercepto y é 3.



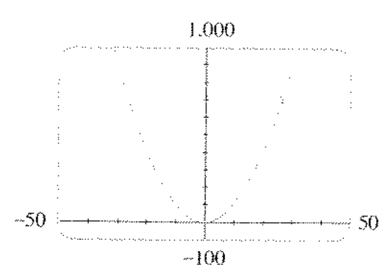
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1.000]$

FIGURA 2
Gráficos de $f(x) = x^2 + 3$

A partir do Exemplo 1 vemos que a escolha da janela retangular faz uma grande diferença no aspecto do gráfico. Algumas vezes, para obter uma visão mais completa ou mais global do gráfico, é necessário ampliar a janela. No exemplo a seguir veremos que um conhecimento prévio do domínio e da imagem da função dá pistas de como selecionar a janela retangular.

EXEMPLO 2 Determine uma janela apropriada para a função $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e use-a para fazer o gráfico de f.

SOLUÇÃO A expressão para $f(x)$ está definida quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2, 2]$. Também,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

logo a imagem de f é o intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Escolhemos a janela retangular de forma que o intervalo sobre o eixo x fosse um pouco maior que o domínio e o intervalo sobre o eixo y fosse um pouco maior que a imagem. Fazendo a janela retangular ser $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtemos o gráfico da Figura 3.

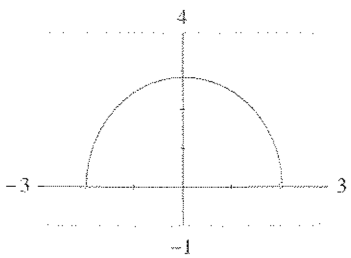


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $y = x^3 - 150x$.

SOLUÇÃO Aqui o domínio é $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os números reais. Isso não ajuda na escolha da janela. Vamos fazer algumas experiências. Se iniciarmos com a janela retangular $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obteremos o gráfico da Figura 4. Ele aparenta estar vazio, mas, na verdade, o gráfico está tão próximo de ser vertical que chega a se confundir com o eixo y.

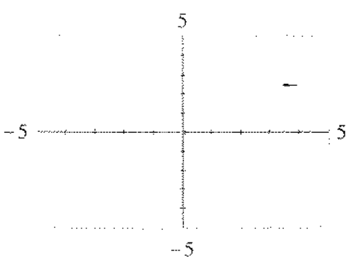


FIGURA 4

Usando o recurso *zoom* da calculadora gráfica para mudar a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtemos a imagem da Figura 5(a). O gráfico aparenta ser formado por retas verticais, mas sabemos que isso não está correto. Observando cuidadosamente enquanto o gráfico está sendo feito, vemos que o processo se interrompe para depois reaparecer. Isso indica que é necessário olhar com mais detalhes na direção vertical, dessa forma, mudamos a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. O gráfico resultante está na Figura 5(b). Todavia, ainda não temos revelados todos os aspectos principais da função; dessa forma, tentamos a janela $[-20, 20]$ por $[-1.000, 1.000]$ na Figura 5(c). Tudo indica que finalmente chegamos a uma janela apropriada. No Capítulo 4 veremos que realmente o gráfico da Figura 5(c) revela todos os principais aspectos da função.

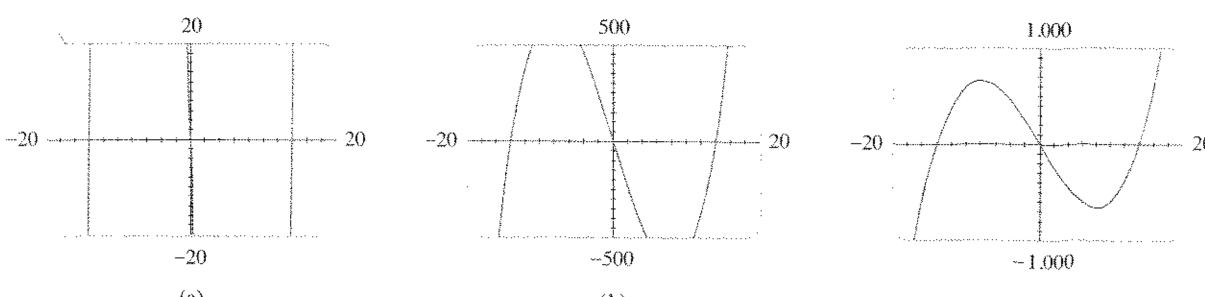
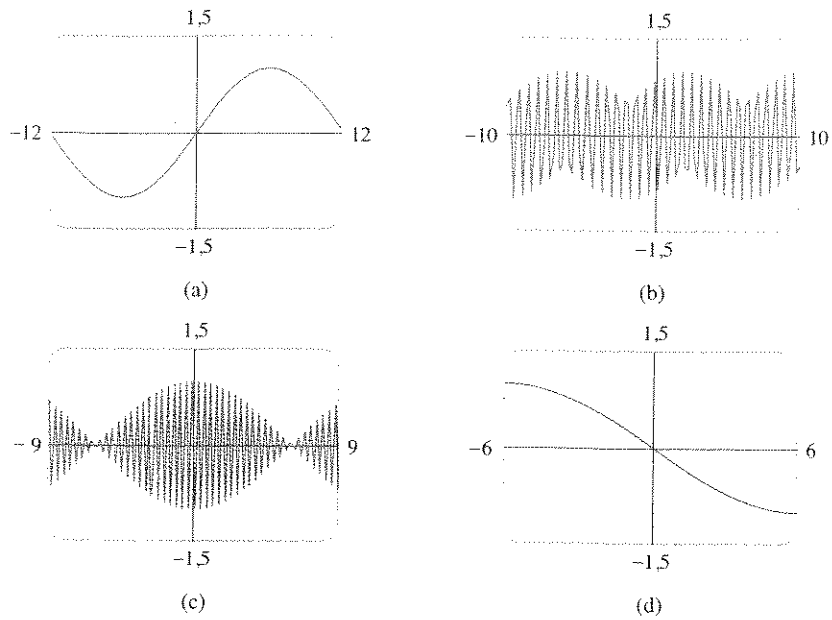


FIGURA 5
$f(x) = x^3 - 150x$

EXEMPLO 4 Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ em uma janela apropriada.

SOLUÇÃO A Figura 6(a) mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica usando uma janela retangular de $[-12, 12]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. À primeira vista o gráfico aparenta ser razoável. Porém, se mudarmos para as outras janelas da Figura 6, o gráfico mudará completamente. Algo estranho está acontecendo.



A aparência do gráfico na Figura 6 depende da máquina usada. Os gráficos que você obtiver em sua máquina podem não ser parecidos com os destas figuras, mas com certeza são igualmente imprecisos.

FIGURA 6
Gráficos de $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ em quatro janelas retangulares

A fim de explicar a grande diferença no aspecto desses gráficos e achar uma janela apropriada, é necessário encontrar o período da função $y = \operatorname{sen} 50x$. Sabemos que o período da função $y = \operatorname{sen} x$ é de 2π; assim, o período de $y = \operatorname{sen} 50x$ é

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126$$

Isso sugere que devemos trabalhar com os valores pequenos de x para mostrar somente algumas oscilações do gráfico. Se escolhermos a janela $[-0{,}25, 0{,}25]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$, obteremos o gráfico da Figura 7.

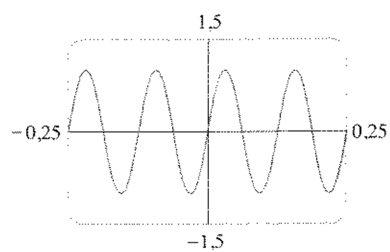


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen} 50x$

Vemos agora o erro que cometemos na Figura 6. As oscilações de $y = \operatorname{sen} 50x$ são tão rápidas que quando a calculadora desenha pontos e os une, perde o ponto máximo e o mínimo, dando assim uma impressão errada sobre o gráfico.

Vimos que a escolha de uma janela não apropriada pode levar a uma visão errônea do gráfico de uma função. Nos Exemplos 1 e 3 resolvemos o problema ampliando a janela, ao passo que no Exemplo 4 a reduzimos. No próximo exemplo examinaremos uma função para a qual não existe uma única janela satisfatória, que revele a verdadeira forma do gráfico.

EXEMPLO 5 Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica com uma janela retangular de $[-6{,}5, 6{,}5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Ele se parece com o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, talvez acrescido de algumas oscilações. Se dermos um *zoom* na janela $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[-0{,}1, 0{,}1]$ poderemos ver mais claramente a forma das oscilações acrescidas na Figura 9.

A razão para esse comportamento está no fato de que o segundo termo, $\frac{1}{100}\cos 100x$, é muito pequeno em comparação com o primeiro, sen x. Assim, realmente precisamos de dois gráficos para ver a natureza verdadeira dessa função.

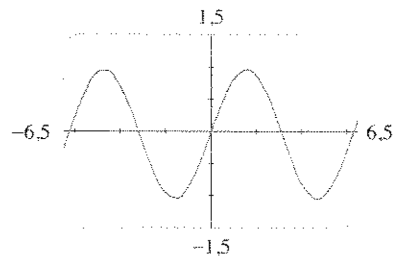


FIGURA 8

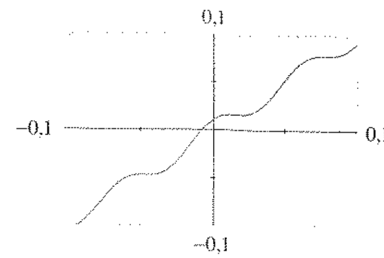


FIGURA 9

EXEMPLO 6 ◻ Faça o gráfico da função $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUÇÃO A Figura 10(a) mostra o gráfico produzido por uma calculadora com uma janela $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Ao conectar os pontos sucessivos sobre o gráfico, a calculadora produz um segmento de reta íngreme do topo até a base da tela. Esse segmento de reta realmente não faz parte do gráfico. Observe que o domínio da função $y = 1/(1 - x)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar a reta quase vertical fazendo experiências com uma mudança de escala. Quando mudamos para uma janela menor $[-4{,}7, 4{,}7]$ por $[-4{,}7, 4{,}7]$, obtemos um gráfico muito melhor, como mostrado na Figura 10(b).

◻ Para evitar a reta estranha podemos mudar a maneira de fazer o gráfico na calculadora de tal forma que os pontos não sejam conectados.

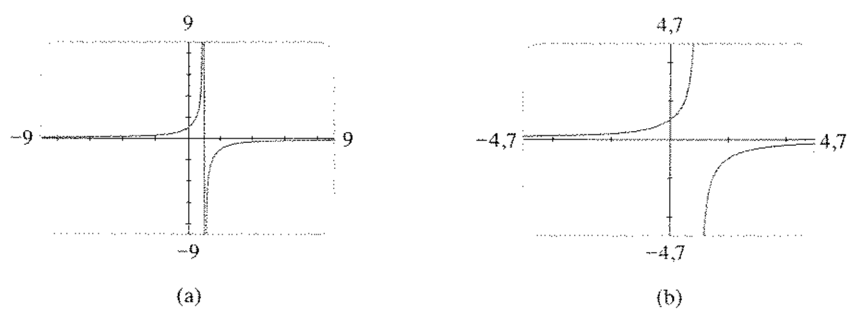


FIGURA 10 $y = \dfrac{1}{1 - x}$

EXEMPLO 7 ◻ Faça o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUÇÃO Alguns recursos gráficos dispõem a imagem como na Figura 11, enquanto outros produzem uma imagem como a da Figura 12. Sabemos da Seção 1.2 (Figura 13) que o gráfico na Figura 12 está correto; assim, o que aconteceu na Figura 11? A explicação disso é que, em algumas máquinas, $x^{1/3}$ é computado como $e^{(1/3)\ln x}$ e $\ln x$ não está definida para $x < 0$. Logo, somente a metade à direita do gráfico é produzida.

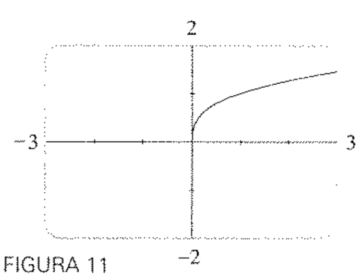


FIGURA 11

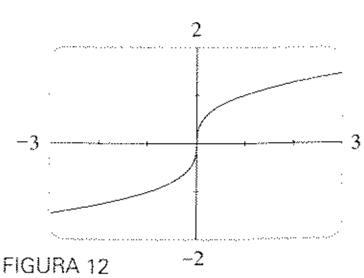


FIGURA 12

Você deve experimentar com sua máquina para ver qual desses dois gráficos será produzido. Se obtiver o gráfico da Figura 11, poderá obter a imagem correta fazendo o gráfico da função

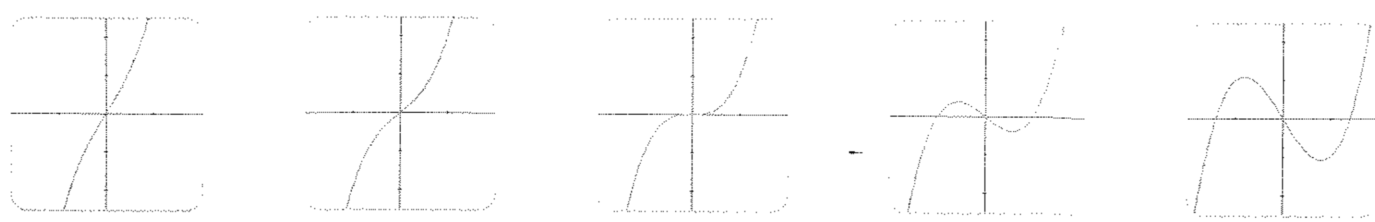
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Observe que essa função é igual a $\sqrt[3]{x}$ (exceto quando $x = 0$).

Para entender como a expressão para uma função relaciona-se com seu gráfico, é proveitoso fazer o gráfico de uma **família de funções**, isto é, uma coleção de funções cujas equações estão relacionadas. No exemplo a seguir faremos os gráficos de membros de uma família de polinômios cúbicos.

EXEMPLO 8 □ Faça o gráfico da função $y = x^3 + cx$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando fizermos c variar?

SOLUÇÃO A Figura 13 mostra os gráficos da função $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ e -2. Vemos que, para os valores positivos de c, o gráfico é crescente da esquerda para a direita sem ponto de máximo ou de mínimo (picos ou vales). Quando $c = 0$, a curva é achatada na origem. Quando c é negativo, a curva tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo. À medida que c decresce, o ponto de máximo fica cada vez mais alto, e o ponto de mínimo, cada vez mais baixo.



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Vários membros da família de funções $y = x^3 + cx$ têm seus gráficos na janela $[-2, 2]$ por $[-2,5, 2,5]$

EXEMPLO 9 □ Encontre as soluções da equação $\cos x = x$ com duas casas decimais de precisão.

SOLUÇÃO As soluções da equação $\cos x = x$ são as coordenadas x dos pontos de interseção das curvas $y = \cos x$ e $y = x$. Da Figura 14(a) vemos que há uma única solução e ela está entre 0 e 1. Dando um *zoom* na janela $[0, 1]$ por $[0, 1]$, vemos, da Figura 14(b), que a solução está entre 0,7 e 0,8. Damos mais um *zoom* para a janela $[0,7, 0,8]$ por $[0,7, 0,8]$ na Figura 14(c). Movendo o cursor para o ponto de interseção das duas curvas, ou por inspeção e pelo fato de que a escala em x é 0,01, vemos que a solução da equação é cerca de 0,74. (Muitas calculadoras possuem dispositivos que fornecem pontos de interseção.)

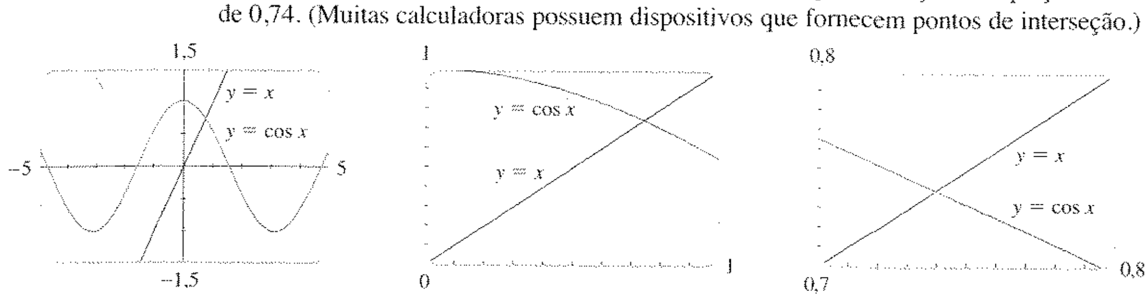


FIGURA 14
Localização das soluções de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1,5, 1,5]$ escala $x = 1$

(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala $x = 0,1$

(c) $[0,7, 0,8]$ por $[0,7, 0,8]$ escala $x = 0,01$

1.4 Exercícios

1. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^4 + 2$.
   (a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
   (b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$
   (c) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (d) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$
   (e) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^2 + 7x + 6$.
   (a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
   (b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
   (c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$
   (d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = 10 + 25x - x^3$.
   (a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
   (d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

4. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$.
   (a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
   (c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
   (d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

5–18 Determine uma janela retangular apropriada para a função dada e use-a para fazer o gráfico da função.

5. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
6. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
7. $f(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 5$
8. $f(x) = x(x + 6)(x - 9)$
9. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
10. $f(x) = \sqrt{0{,}1x + 20}$
11. $f(x) = x^2 + \dfrac{100}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
13. $f(x) = \cos 100x$
14. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$
15. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$
16. $y = \operatorname{tg} 25x$
17. $y = 3^{\cos(x^2)}$
18. $y = x^2 + 0{,}02 \operatorname{sen} 50x$

19. Faça o gráfico da elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior da elipse.

20. Faça o gráfico da hipérbole $y^2 - 9x^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior dos ramos da hipérbole.

21–23 Encontre todas as soluções da equação com duas casas decimais de precisão.

21. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$

22. $x^3 = 4x - 1$

23. $x^2 = \operatorname{sen} x$

24. Vimos no Exemplo 9 que a equação $\cos x = x$ tem exatamente uma solução.
   (a) Use um gráfico para mostrar que a equação $\cos x = 0{,}3x$ tem três soluções e encontre-as com duas casas decimais de precisão.
   (b) Encontre um valor aproximado m tal que a equação $\cos x = mx$ tenha exatamente duas soluções.

25. Use os gráficos para determinar qual das funções $f(x) = 10x^2$ e $g(x) = x^3/10$ é, em última análise, maior (isto é, maior quando x for muito grande).

26. Use os gráficos para determinar qual dentre as funções $f(x) = x^4 - 100x^3$ e $g(x) = x^3$ é, em última análise, maior.

27. Para quais valores de x é válido que $|\operatorname{sen} x - x| < 0{,}1$?

28. Faça o gráfico dos polinômios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ e $Q(x) = 3x^5$ na mesma tela, usando primeiro a janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e então mudando para $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$. O que você pode observar a partir desses gráficos?

29. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = \sqrt[n]{x}$ onde n é um inteiro positivo.
   (a) Faça o gráfico da função raiz $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[6]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
   (b) Faça o gráfico das funções $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Veja o Exemplo 7.)
   (c) Faça o gráfico das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
   (d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

30. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = 1/x^n$, onde n é um inteiro positivo.

(a) Faça o gráfico das funções $y = 1/x$ e $y = 1/x^3$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.

(b) Faça o gráfico das funções $y = 1/x^2$ e $y = 1/x^4$ na mesma tela usando a janela retangular dada na parte (a).

(c) Faça o gráfico de todas as funções das partes (a) e (b) na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.

(d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

31. Faça o gráfico da função $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando c variar?

32. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para vários valores de c. Descreva como a variação de c afeta o gráfico.

33. Faça o gráfico da função $y = x^n 2^{-x}$, $x \geq 0$, para $n f(x) = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Como varia o gráfico com o crescimento de n?

34. As curvas com equações

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

são chamadas **curvas ponta de bala**. Faça o gráfico de algumas dessas curvas para entender o porquê de seu nome. O que acontece quando c cresce?

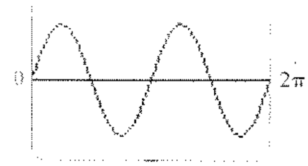
35. O que acontece com o gráfico da equação $y^2 = cx^3 + x^2$ com a variação de c?

36. Este exercício explora o efeito da função interior g sobre a função composta $y = f(g(x))$.

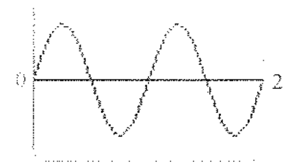
(a) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(\sqrt{x})$ usando a janela $[0, 400]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença entre esse gráfico e o da função seno?

(b) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(x^2)$ usando a janela $[-5, 5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença com esse gráfico e o da função seno?

37. As figuras a seguir mostram os gráficos de $y = \text{sen}\, 96x$ e de $y = \text{sen}\, 2x$, conforme são exibidas por uma calculadora gráfica TI-83.



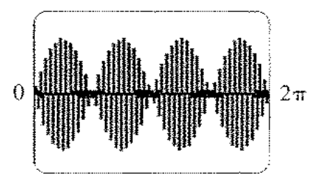
$y = \text{sen}\, 96x$

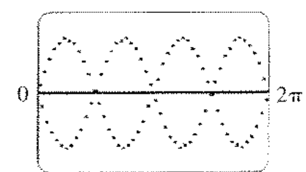


$y = \text{sen}\, 2x$

O primeiro gráfico é inexato. Explique por que os dois gráficos aparentam ser idênticos. [*Dica*: A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels. Quais pontos específicos a calculadora desenha?]

38. O primeiro gráfico da figura a seguir é aquele que uma calculadora gráfica TI-83 exibe como função $y = \text{sen}\, 45x$. Ele é incorreto e, portanto, para ajudar a explicar sua aparência, desenhamos a curva em questão no modo pontual da calculadora obtendo o segundo gráfico.





Que duas curvas senoidais a calculadora aparenta estar desenhando? Mostre que cada ponto do gráfico de $y = \text{sen}\, 45x$ que a TI-83 escolhe para desenhar está, de fato, em uma dessas duas curvas. (A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels.)

1.5 Funções Exponenciais

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial*, pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa.

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas, qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Para ajudá-lo a responder a essa questão olhamos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, no qual x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos alargar o domínio de $y = 2^x$ para incluir os números racionais e irracionais.

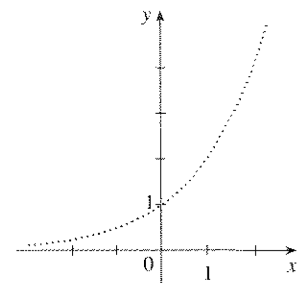


FIGURA 1
Representação de $y = 2^x$, x racional

No gráfico da Figura 1 existem buracos correspondentes aos valores irracionais de x. Queremos preencher os buracos definindo $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f seja uma função crescente. Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

devemos ter

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$$

e sabemos que $2^{1{,}7}$ e $2^{1{,}8}$ têm um significado, pois 1,7 e 1,8 são números racionais. Da mesma forma, usando as melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$:

□ Uma prova dessa afirmação é dada em J. Marsden e A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1980).

$$\begin{aligned}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1{,}7}, \quad 2^{1{,}73}, \quad 2^{1{,}732}, \quad 2^{1{,}7320}, \quad 2^{1{,}73205}, \quad \ldots$$

e menor que todos os números

$$2^{1{,}8}, \quad 2^{1{,}74}, \quad 2^{1{,}733}, \quad 2^{1{,}7321}, \quad 2^{1{,}73206}, \quad \ldots$$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como sendo esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos computá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$$

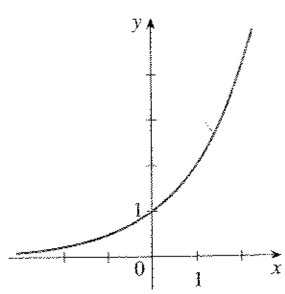


FIGURA 2
$y = 2^x$, x real

Da mesma forma, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$) onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3 para vários valores da base a. Note que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto $(0, 1)$, pois $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica cada vez maior (para $x > 0$).

Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de 0 à medida que x cresce. Se $a > 1$, então a^x tende a 0 conforme x decresce por valores negativos. Em ambos os casos o eixo x é uma assíntota horizontal. Esses assuntos serão discutidos na Seção 2.6.

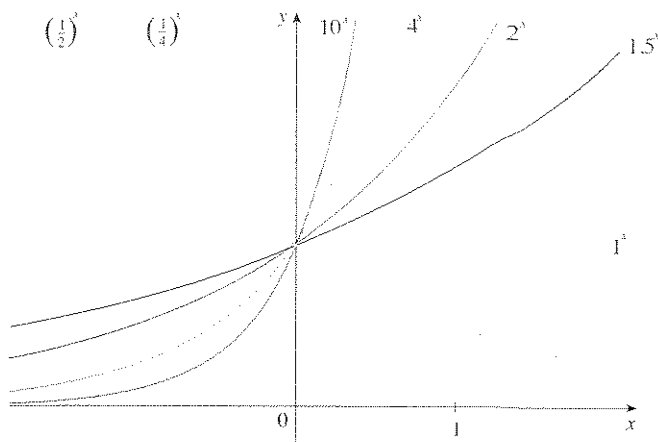
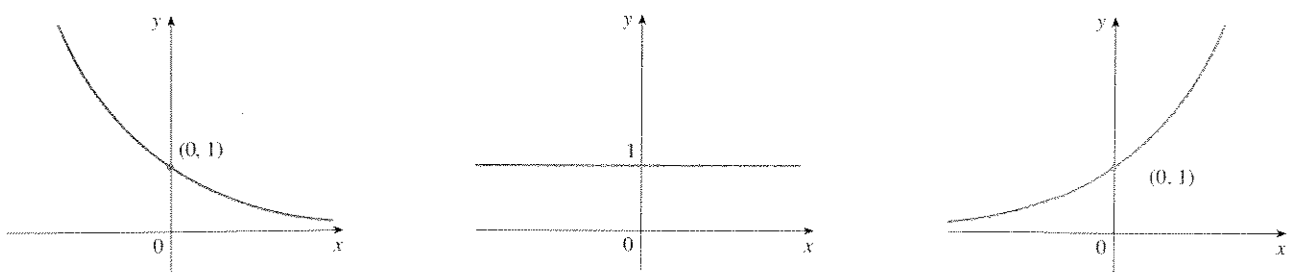


FIGURA 3

Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$. Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce. Esses três casos estão na Figura 4. Observe que se $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem o domínio $\mathbb{R}$ e a imagem $(0, \infty)$. Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se provar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y.

Na Seção 5.6 apresentaremos uma definição para a função exponencial que vai nos capacitar a dar demonstrações simples para as Leis dos Expoentes.

Lei dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Para uma revisão sobre as reflexões e deslocamentos de gráficos, veja a Seção 1.3.

SOLUÇÃO Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ (mostrado na Figura 2) em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b). A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem, $(-\infty, 3)$.

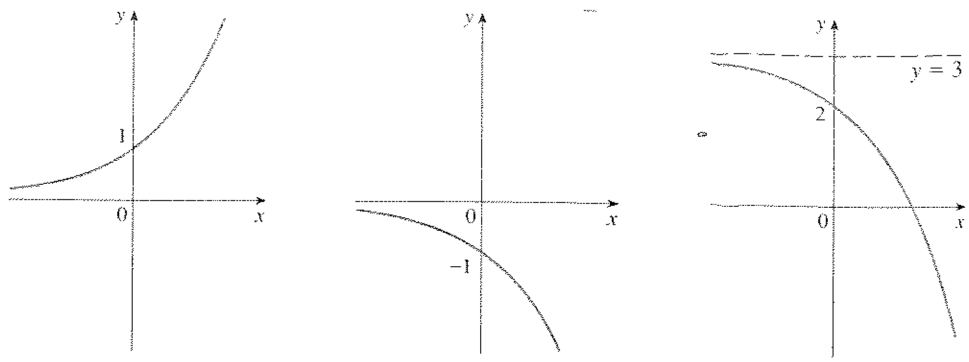


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

EXEMPLO 2 Use um recurso gráfico para comparar a função exponencial $f(x) = 2^x$ e a função potência $g(x) = x^2$. Qual função crescerá mais rapidamente quando x for grande?

O Exemplo 2 mostra que $y = 2^x$ aumenta mais rapidamente que $y = x^2$. Para verificar quão rapidamente $f(x) = 2^x$ cresce, vamos fazer o seguinte experimento mental. Começaremos com um pedaço de papel com uma espessura de 1 milésimo de polegada e vamos dobrá-lo pela metade 50 vezes. Cada vez que dobramos o papel pela metade, a sua espessura se duplica; assim, a sua espessura resultante seria de $2^{50}/1.000$ polegadas. Que espessura você acha que isso representa? De fato, isso é mais que 17 milhões de milhas!

SOLUÇÃO A Figura 6 mostra os gráficos das duas funções na janela retangular $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que os gráficos se interceptam três vezes, mas, para $x > 4$, o gráfico de $f(x) = 2^x$ fica acima do gráfico de $g(x) = x^2$. A Figura 7 dá uma visão mais abrangente e mostra que, para grandes valores de x, a função exponencial $y = 2^x$ cresce muito mais rapidamente que a função potência $y = x^2$.

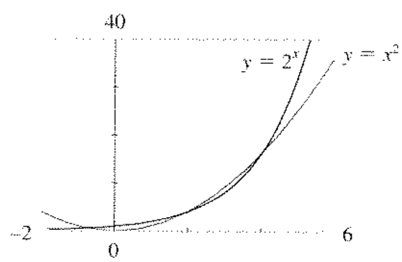


FIGURA 6

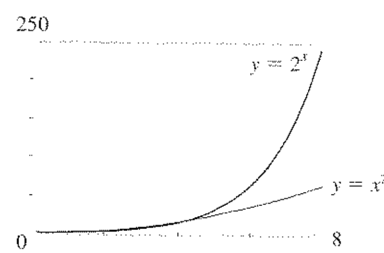


FIGURA 7

Aplicações das Funções Exponenciais

A função exponencial ocorre freqüentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade. Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e decaimento radioativo. Em capítulos posteriores daremos essas e outras aplicações com mais detalhes.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que fazendo amostras da população em certos intervalos fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1.000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1.000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1.000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1.000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1.000 = (1.000)2^t$$

A função população é um múltiplo constante da função exponencial $y = 2^t$; logo, ela exibe o rápido crescimento que observamos nas Figuras 2 e 7. Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças) esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

O que pode ser dito sobre a população? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente mapa de dispersão.

TABELA 1

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

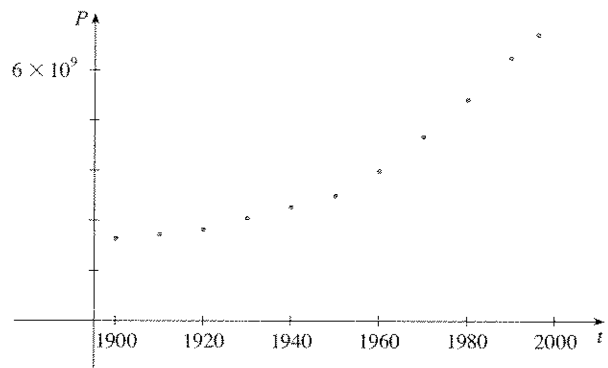


FIGURA 8 Mapa de dispersão para o crescimento populacional mundial

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para uma regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (0,008079266) \cdot (1,013731)^t$$

A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais. Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de lento crescimento populacional podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 30.

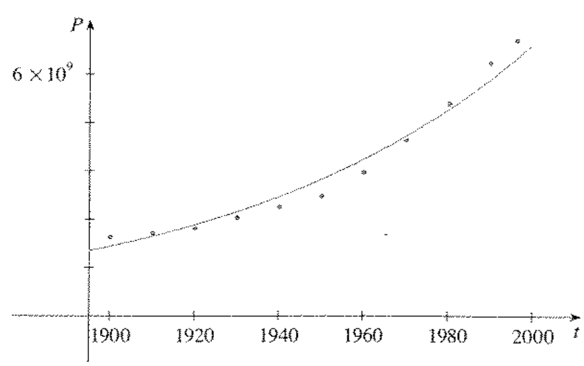


FIGURA 9

Modelo exponencial para o crescimento populacional

EXEMPLO 3 A *vida média* do estrôncio-90, ^{90}Sr, é de 25 anos. Isso significa que a metade de qualquer quantidade do ^{90}Sr vai se desintegrar em 25 anos.
(a) Se uma amostra de ^{90}Sr tiver uma massa de 24 mg, encontre uma expressão para a massa $m(t)$ que sobrará após t anos.
(b) Encontre a massa remanescente após 40 anos, correta até o miligrama mais próximo.
(c) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico de $m(t)$ e use esse gráfico para estimar o tempo necessário para que a massa fique reduzida a 5 mg.

SOLUÇÃO
(a) A massa inicial de 24 mg é dividida ao meio a cada período de 25 anos, assim

$$m(\underset{\text{anos}}{0}) = \underset{\text{mg}}{24}$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24) \quad \text{metade em 25 anos}$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

Desse padrão estipulamos que a massa remanescente após t anos é

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25}$$

$\rightarrow$ t anos/25 = quantas vezes o 25 se repete

Trate-se de uma função exponencial com a base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.
(b) A massa remanescente após 40 anos é

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7{,}9 \text{ mg}$$

(c) Usamos uma calculadora gráfica ou um computador para fazer o gráfico da função $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ que está na Figura 10. Nele está também a reta $m = 5$, e usando o cursor podemos estimar que $m(t) = 5$ quando $t \approx 57$. Dessa forma, a massa da amostra ficará reduzida a 5 mg após cerca de 57 anos.

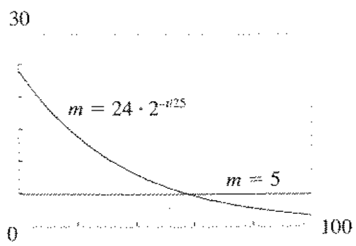


FIGURA 10

O Número e

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. Na escolha de uma base a pesa muito a forma como a função $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 11 e 12 mostram as retas tangentes ao gráfico de $y = 2^x$ e

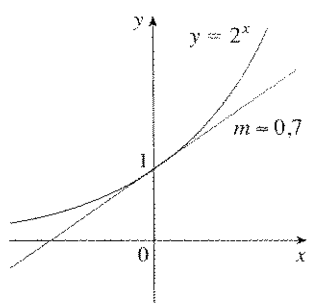


FIGURA 11

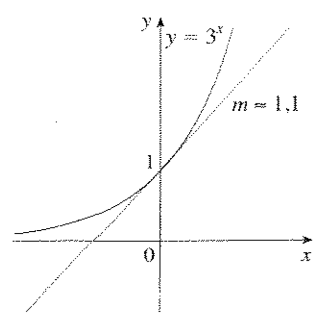


FIGURA 12

$y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$. (As retas tangentes serão definidas precisamente na Seção 2.7: por ora vamos pensar a reta tangente ao gráfico da exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico em um único ponto.) Se medirmos as inclinações das retas tangentes em $(0, 1)$, encontraremos $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos para a base a aquela para a qual resulta uma reta tangente $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1 (veja a Figura 13). Esse número *existe* (como veremos na Seção 5.6) realmente e é denotado pela letra e. (Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra *exponencial*.) Vendo as Figuras 11 e 12, não nos surpreende que o número e esteja entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$, entre $y = 2^x$ e $y = 3^x$ (veja a Figura 14). No Capítulo 3 veremos que o valor de e, correto até a quinta casa decimal, é

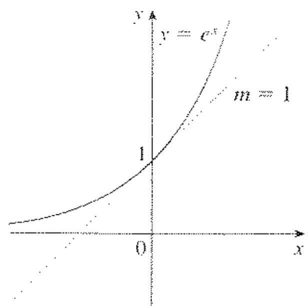


FIGURA 13

A função exponencial natural cruza o eixo y com uma inclinação 1

$$e \approx 2{,}71828$$

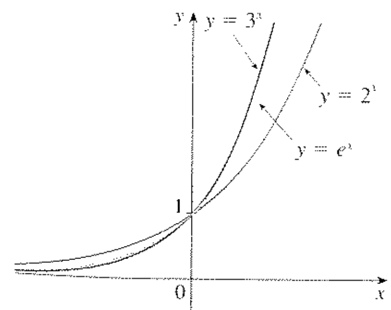
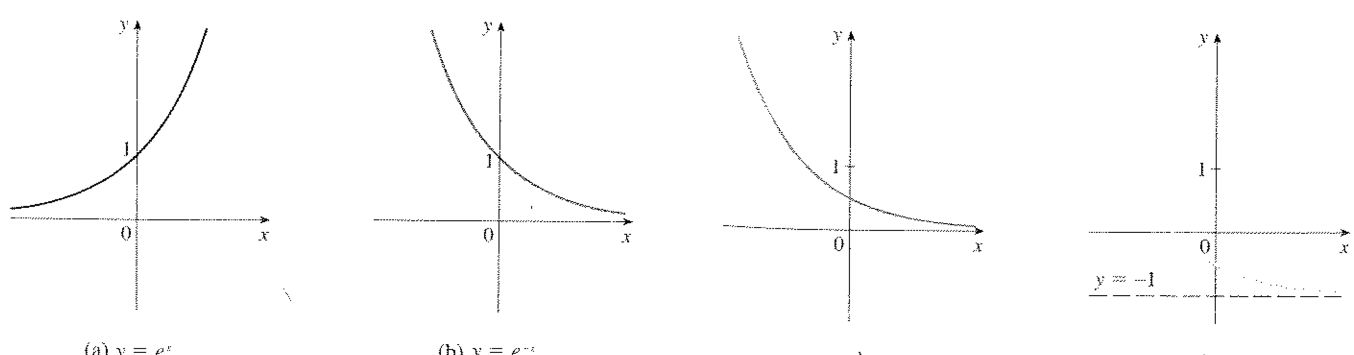


FIGURA 14

EXEMPLO 4 □ Faça o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e estabeleça qual o domínio e a imagem.

SOLUÇÃO Começamos com o gráfico de $y = e^x$ das Figuras 13 e 15(a) e o refletimos em torno do eixo y para obter o gráfico de $y = e^{-x}$ ilustrado na Figura 15(b). (Note que essa curva cruza o eixo y com uma inclinação de -1.) Então comprimimos verticalmente o gráfico por um fator de 2 para obter o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ mostrado na Figura 15(c). Finalmente deslocamos o gráfico para baixo uma unidade, para obter o que foi pedido na Figura 15(d). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 15

A que distância à direita da origem você estará quando o gráfico de $y = e^x$ ultrapassar 1 milhão? O próximo exemplo mostra a rapidez do crescimento dessa função dando uma resposta a essa pergunta que poderá surpreendê-lo.

EXEMPLO 5 Use um recurso gráfico para encontrar os valores de x para os quais $e^x > 1.000.000$.

SOLUÇÃO Na Figura 16 fizemos os gráficos de $y = e^x$ e da reta horizontal $y = 1.000.000$. Vemos que essas curvas se interceptam quando $x \approx 13{,}8$. Assim, $e^x > 10^6$ quando $x > 13{,}8$. É realmente surpreendente que a função exponencial já ultrapassou 1 milhão quando x é somente 14.

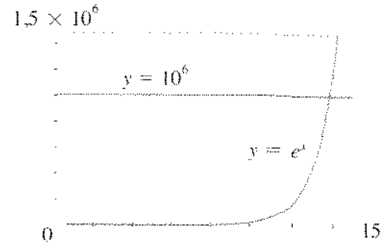


FIGURA 16

1.5 Exercícios

1. (a) Escreva uma equação que defina a função exponencial com base $a > 0$.
   (b) Qual é o domínio dessa função?
   (c) Se $a \neq 1$, qual a imagem dessa função?
   (d) Esboce a forma geral do gráfico da função exponencial nos seguintes casos.
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) Como é definido o número e?
   (b) Qual o valor aproximado de e?
   (c) Qual a função exponencial natural?

3–6 Faça em uma mesma tela os gráficos das funções dadas. Como estão relacionados esses gráficos?

3. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0{,}9^x$, $y = 0{,}6^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = 0{,}1^x$

7–12 Faça um esboço do gráfico de cada função. Não use calculadora. Utilize somente os gráficos dados nas Figuras 3 e 14 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

7. $y = 4^x - 3$

8. $y = 4^{x-3}$

9. $y = -2^{-x}$

10. $y = 1 + 2e^x$

11. $y = 3 - e^x$

12. $y = 2 + 5(1 - e^{-x})$

13. Começando com o gráfico de $y = e^x$, escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam de
   (a) deslocar 2 unidades para baixo
   (b) deslocar 2 unidades para a direita
   (c) refletir em torno do eixo x
   (d) refletir em torno do eixo y
   (e) refletir em torno do eixo x e, depois, em torno do eixo y

14. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam de
   (a) refletir em torno da reta $y = 4$
   (b) refletir em torno da reta $x = 2$

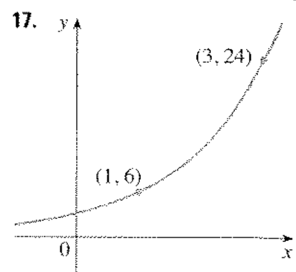
15–16 Encontre o domínio de cada função

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$
    (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

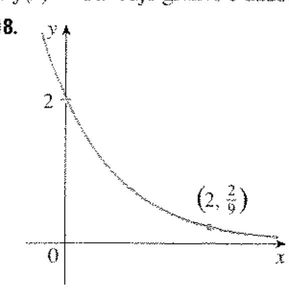
16. (a) $f(t) = \text{sen}(e^{-t})$
    (b) $f(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

17–18 Encontre a função exponencial $f(x) = Ca^x$ cujo gráfico é dado.

17.



18.



19. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

20. Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?
   I. Um milhão de dólares no fim do mês.
   II. Um centavo de dólar no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos de dólar no n-ésimo dia.

21. Mostre que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ foram traçados sobre uma malha coordenada com 1 polegada; então, a uma dis-

tância de 2 pés à direita da origem a altura do gráfico de f é de 48 pés, enquanto a altura do gráfico de g é cerca de 265 milhas.

22. Compare as funções $f(x) = x^5$ e $g(x) = 5^x$ por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todas as interseções dos gráficos corretas até uma casa decimal. Para grandes valores de x, qual função cresce mais rapidamente?

23. Compare as funções $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = e^x$ por meio dos gráficos f e g em várias janelas retangulares. Quando o gráfico de g ultrapassa o de f?

24. Use um gráfico para estimar os valores de x tais que $e^x > 1.000.000.000$.

25. Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias

(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?

(b) Qual o tamanho da população após t horas?

(c) Qual o tamanho da população após 20 horas?

(d) Faça o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50.000 bactérias.

26. Um isótopo do sódio, ^{24}Na, tem uma vida média de 15 horas. Uma amostra desse isótopo tem massa de 2 g.

(a) Encontre a quantidade remanescente após 60 horas.

(b) Encontre a quantidade remanescente após t horas.

(c) Estime a quantidade remanescente após 4 dias.

(d) Use um gráfico para estimar o tempo necessário para que a massa fique reduzida a 0,01 g.

27. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população mundial com os dados de 1950 a 2000 da Tabela 1 da página 60. Use o modelo para estimar a população em 1993 e para predizer a população em 2010.

28. A tabela fornece a população dos Estados Unidos, em milhões, para os anos 1900 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

Use uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população do país desde 1900. Utilize o modelo para estimar a população em 1925 e para predizer a população em 2010 e 2020.

1.6 Funções Inversas e Logaritmos

A Tabela 1 fornece os dados de um experimento no qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de horas. O número N de bactérias é uma função do tempo t: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude de idéia e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ele está pensando em t como uma função de N. Essa função, chamada *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f". Assim, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N. Os valores de f^{-1} podem ser encontrados olhando a Tabela 1 ao reverso ou consultando a Tabela 2. Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

TABELA 1 N como uma função de t

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABELA 2 t como uma função de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

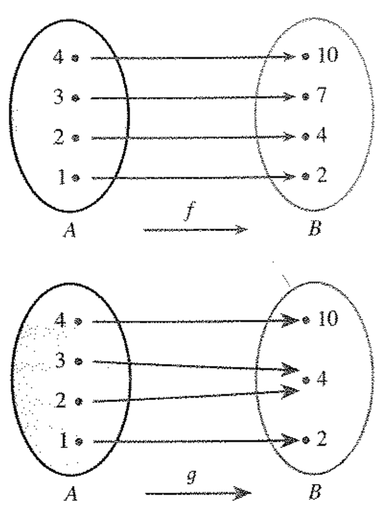


FIGURA 1

Nem todas as funções possuem inversas. Vamos comparar as funções f e g cujo diagrama de flechas está na Figura 1.

Observe que f nunca assume duas vezes o mesmo valor (dois *inputs* quaisquer em A têm *outputs* diferentes), embora g adquira o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm o mesmo *output*, 4). Em símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

mas $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Funções que tenham essa última propriedade são chamadas *funções um a um*.

Na linguagem de *inputs* e *outputs*, essa definição diz que f é um a um se cada *output* corresponde a um único *input*.

1 Definição Uma função f é chamada **função um a um** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

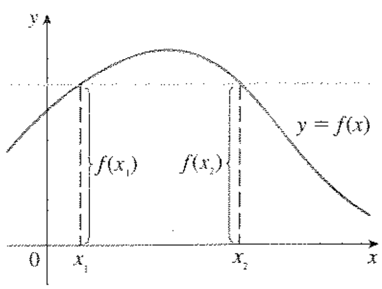


FIGURA 2
Esta função não é um a um, pois $f(x_1) = f(x_2)$

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de f em mais de um ponto, então vemos da Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isso significa que f não é uma função um a um. Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é um a um.

Teste da Reta Horizontal Uma função é um a um se e somente se toda reta horizontal intercepta seu gráfico em apenas um ponto.

EXEMPLO 1 A função $f(x) = x^3$ é um a um?

SOLUÇÃO 1 Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é um a um.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 3 vemos que toda reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em apenas um ponto. Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é um a um.

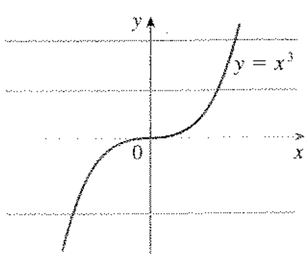


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ é um a um

EXEMPLO 2 A função $g(x) = x^2$ é um a um?

SOLUÇÃO 1 A função não é um a um, pois, por exemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

e, portanto, 1 e -1 têm o mesmo *output*.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 4 vemos que existem retas horizontais que interceptam o gráfico de g mais de uma vez. Assim, pelo Teste da Reta Horizontal, g não é um a um.

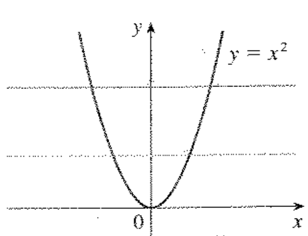


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ não é um a um

As funções um a um são importantes, pois, precisamente, são as que possuem funções inversas de acordo com a seguinte definição.

2 Definição Seja f uma função um a um com domínio A e imagem B. Então sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A, sendo definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.

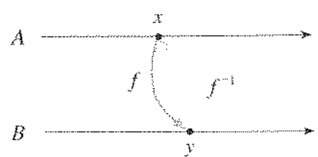


FIGURA 5

Essa definição estabelece que se f transforma x em y, então f^{-1} transforma de volta y em x. (Se f não fosse um a um, então f^{-1} não seria definida de forma única.) O diagrama de flechas da Figura 5 indica que f^{-1} reverte o efeito de f. Note que

domínio de f^{-1} = imagem de f

imagem de f^{-1} = domínio de f

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ADVERTÊNCIA Não confunda -1 de f^{-1} com um expoente. Assim

$$f^{-1}(x) \textit{ não } \text{significa } \frac{1}{f(x)}$$

O recíproco $1/f(x)$ pode, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

EXEMPLO 3 Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

SOLUÇÃO Da definição de f^{-1} temos

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

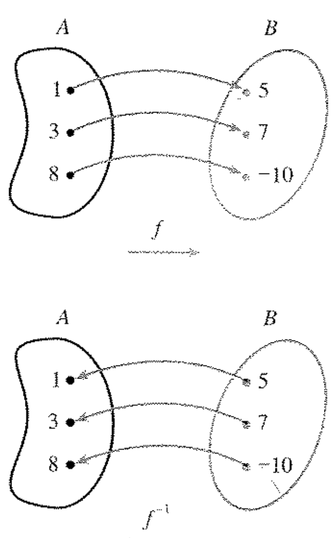


FIGURA 6

A função inversa reverte *inputs* e *outputs*

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesse caso.

A letra x é usada tradicionalmente como a variável independente; logo, quando nos concentrarmos em f^{-1} em vez de f, geralmente reverteremos os papéis de x e y na Definição 2 e escreveremos

3 $$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Substituindo y na Definição 2 e x na (3), obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } B$$

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos em x, aplicando f e, em seguida, f^{-1}, obteremos de volta x, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7). Assim, f^{-1} desfaz o que f faz. A segunda equação diz que f desfaz o que f^{-1} faz.

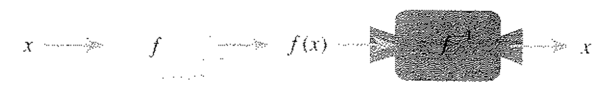


FIGURA 7

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ e a equação de cancelamento fica

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se de modo recíproco quando aplicadas sucessivamente.

Vamos ver agora como computar as funções inversas. Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de resolver essa equação para x em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$. Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 **Como Achar a Função Inversa de uma Função f Um a Um**

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.

Passo 2 Resolva essa equação para x em termos de y (se possível).

Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 4 Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUÇÃO De acordo com (5) escrevemos

$$y = x^3 + 2$$

Então resolvemos essa equação para x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, trocando x por y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

No Exemplo 4, note como f^{-1} reverte o efeito de f. A função f estabelece que "eleve ao cubo e então adicione 2"; f^{-1} estabelece que "subtraia 2 e então tome a raiz cúbica".

O princípio de trocar x por y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico de f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver sobre o gráfico de f^{-1}. Mas obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 8).

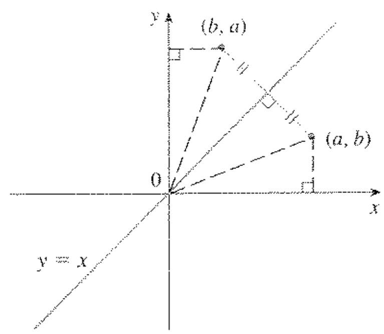


FIGURA 8

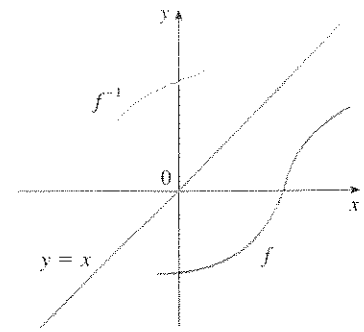


FIGURA 9

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

> O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

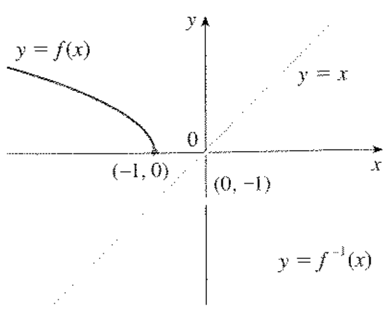


FIGURA 10

EXEMPLO 5 □ Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

SOLUÇÃO Esboçamos primeiro a curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (a metade superior da parábola $y^2 = -1 - x$ ou $x = -y^2 - 1$), e então refletindo em torno da reta $y = x$ obtemos o gráfico de f^{-1} (veja a Figura 10). Conforme pode ser verificado em nosso gráfico, observe que a expressão para f^{-1} é $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. Assim, o gráfico de f^{-1} é a metade à direita da parábola $y = -x^2 - 1$, e isso parece razoável pela Figura 10.

Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, um a um pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

teremos

6 $$\boxed{\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$$

Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_a x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base a para se obter x. Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ porque $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento (4), quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

7 $$\boxed{\begin{aligned} &\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo } x > 0 \end{aligned}}$$

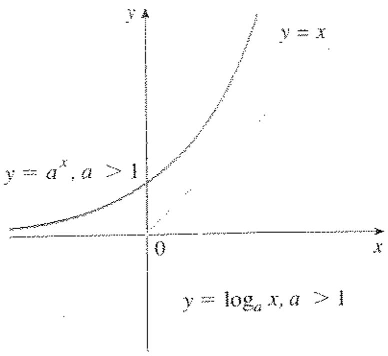


FIGURA 11

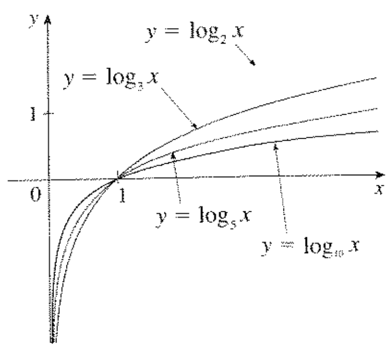


FIGURA 12

□ **Notação para Logaritmos**
Na maioria dos livros de cálculo e ciências, bem como nas calculadoras, a notação usada para os logaritmos naturais é $\ln x$, enquanto a de $\log x$ é utilizada para "logaritmos comuns", $\log_{10} x$. Em textos mais avançados de matemática e literatura científica, e em linguagens de computação, porém, a notação $\log x$ geralmente denota o logaritmo natural.

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexã do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têr base $a > 1$.) O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ est refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base a. Uma ve que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto $(1, 0)$.

As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades cor respondentes das funções exponenciais dadas na Seção 1.5.

Leis dos Logaritmos Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

EXEMPLO 6 □ Use as leis dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUÇÃO Usando a Lei 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$.

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases a para os logaritmos, veremos no Capítulo 3 que a escolh mais conveniente para uma base é e, definido na Seção 1.5. Os logaritmos na base e sã chamados **logaritmos naturais** e têm uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos $a = e$ e substituirmos $\log_e$ por "ln" em (6) e (7), então as propriedades qu definem a função logaritmo natural ficam

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\ln e = 1$$

EXEMPLO 7 Encontre x sendo $\ln x = 5$.

SOLUÇÃO 1 De (8) vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Portanto, $x = e^5$.

(Se você tiver problemas com a notação "ln", substitua-a por $\log_e$. Então a equação torna-se $\log_e x = 5$; portanto, pela definição de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUÇÃO 2 Comece com a equação

$$\ln x = 5$$

e então aplique a função exponencial a ambos os lados da equação:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Mas a segunda equação do cancelamento em (9) estabelece que $e^{\ln x} = x$. Portanto, $x = e^5$.

EXEMPLO 8 Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

SOLUÇÃO Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação e usando (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Uma vez que o logaritmo natural é encontrado em calculadoras científicas, podemos aproximar a solução para quatro casas decimais: $x \approx 0{,}8991$.

EXEMPLO 9 Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo.

SOLUÇÃO Usando as Leis 3 e 1 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos dos logaritmos naturais.

10 Fórmula de Mudança de Base Para todos os números positivos a ($a \neq 1$), temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Prova Seja $y = \log_a x$. Então, de (6), temos $a^y = x$. Tomando-se os logaritmos naturais de ambos os lados da equação, obtemos $y \ln a = \ln x$. Portanto

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

As calculadoras científicas têm uma tecla para os logaritmos naturais; assim, a Fórmula 10 nos capacita a usar a calculadora para computar o logaritmo em qualquer base (conforme mostra o próximo exemplo). Do mesmo modo, a Fórmula 10 nos permite fazer o gráfico de qualquer função logarítmica em calculadoras e computadores (veja os Exercícios 43 e 44).

EXEMPLO 10 Calcule $\log_8 5$ correta até a sexta casa decimal.

SOLUÇÃO A Fórmula 10 nos dá

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976$$

EXEMPLO 11 No Exemplo 3 da Seção 1.5 mostramos que a massa do ^{90}Sr que permanece após t anos de uma amostra com 24 mg é $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Encontre a função inversa e interprete-a.

SOLUÇÃO Precisamos resolver a equação $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$ para t. Vamos começar tomando os logaritmos naturais de ambos os lados:

$$2^{-t/25} = \frac{m}{24}$$

$$\ln\left(2^{-t/25}\right) = \ln\frac{m}{24}$$

$$-\frac{t}{25}\ln 2 = \ln m - \ln 24$$

$$-\frac{25}{\ln 2}(\ln m - \ln 24) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Logo, a função inversa é

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Essa função dá o tempo necessário para a massa decair para m miligramas. Em particular, o tempo requerido para a massa ficar reduzida a 5 mg é

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56{,}58 \text{ anos}$$

Essa resposta está de acordo com o gráfico estimado feito no Exemplo 3 da Seção 1.5.

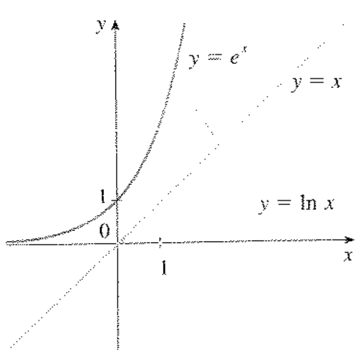


FIGURA 13

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função inversa, o logaritmo natural, estão na Figura 13. Uma vez que a curva $y = e^x$ cruza o eixo y com uma inclinação de 1, segue que a curva $y = \ln x$ cruza o eixo x com uma inclinação de 1.

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo y como assíntota vertical. (Ou seja, os valores de $\ln x$ ficam negativamente muito grandes quando x tende a 0.)

EXEMPLO 12 Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUÇÃO Começamos pelo gráfico $y = \ln x$ dado na Figura 13. Usando as transformações da Seção 1.3, o deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então o deslocamos uma unidade para cima, para obter o gráfico de $y = \ln(x - 2) - 1$ (veja a Figura 14).

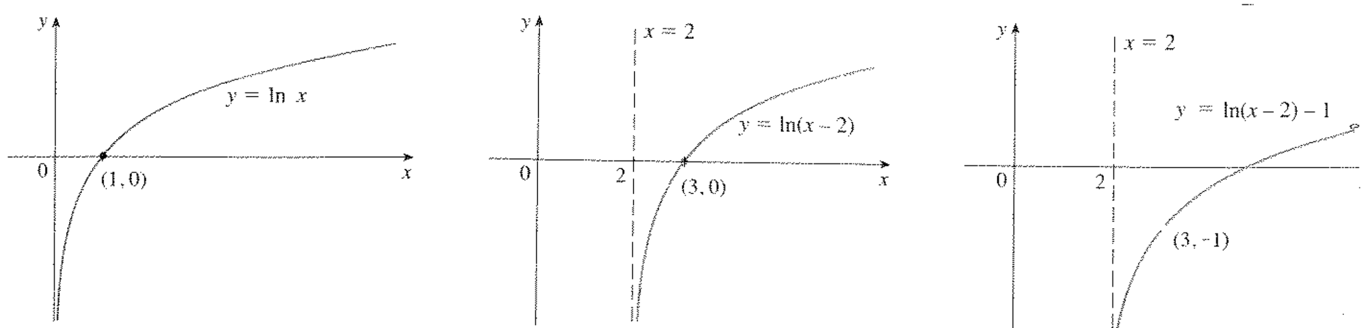


FIGURA 14

Embora $\ln x$ seja uma função crescente, seu crescimento é *muito* lento quando $x > 1$. De fato, $\ln x$ cresce mais lentamente que qualquer potência de x. Para ilustrar esse fato, vamos comparar os valores aproximados das funções $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ na tabela a seguir, bem como em seus gráficos nas Figuras 15 e 16. Você pode ver que inicialmente os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \ln x$ crescem a taxas comparáveis, mas, finalmente, a função raiz ultrapassa muito o logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

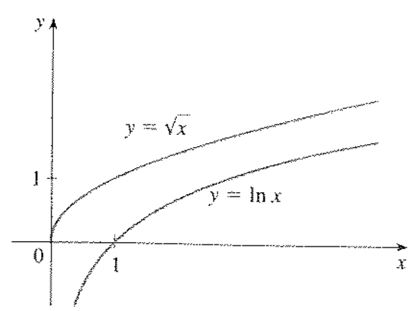


FIGURA 15

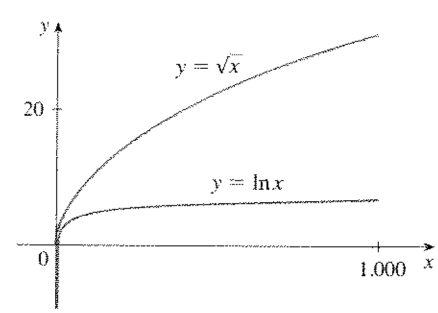


FIGURA 16

Funções Inversas Trigonométricas

Quando tentamos encontrar as funções inversas trigonométricas, temos uma dificuldade sem muita importância. Como as funções trigonométricas não são funções um a um, eles não têm funções inversas. A dificuldade é superada restringindo-se os domínios dessas funções de forma a torná-las um a um.

Você pode ver da Figura 17 que a função seno $y = \operatorname{sen} x$ não é um a um (use o Teste da Reta Horizontal). Mas a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ (veja a Figura 18) *é* um a um. A função inversa dessa função seno restrita f existe e é denotada por sen^{-1}, ou arcsen. Ela é chamada **inversa da função seno**, ou **função arcsen**.

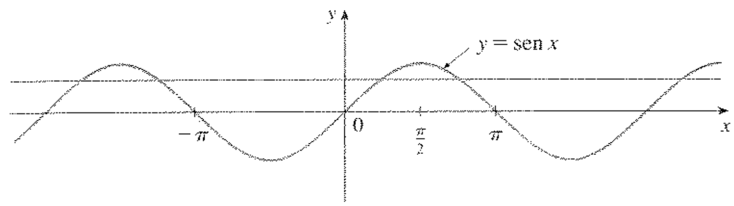


FIGURA 17

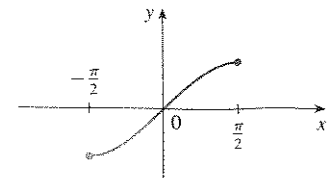


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

Uma vez que a definição de uma função inversa diz que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

temos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Assim, se $-1 \le x \le 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ é o número entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ cujo seno é x.

EXEMPLO 13 Calcule (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$ e (b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3})$.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$\operatorname{sen}^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\pi/6$ situa-se entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

(b) Seja $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$, logo $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$. Então podemos desenhar um triângulo retângulo com o ângulo θ, como na Figura 19 e deduzir do Teorema de Pitágoras que o terceiro lado tem comprimento $\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Isso nos possibilita interpretar a partir do triângulo que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{3}) = \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

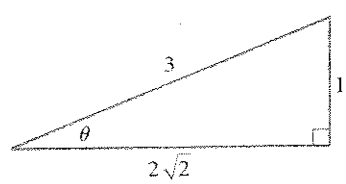


FIGURA 19

O cancelamento de equações para as funções inversas torna-se, nesse caso,

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ &\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \le x \le 1 \end{aligned}}$$

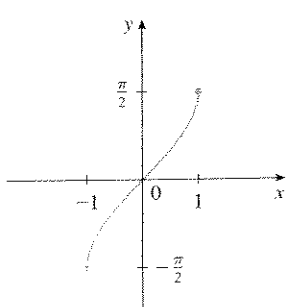


FIGURA 20

$y = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$

A função inversa do seno, sen^{-1}, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[-\pi/2, \pi/2]$, e seu gráfico, mostrado na Figura 20, é obtido daquela restrição da função seno (Figura 18) por reflexão sobre a reta $y = x$.

A **função inversa do cosseno** é tratada de modo similar. A função cosseno restrita $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \pi$, é um a um (veja a Figura 21); logo, ela tem uma função inversa denotada por $\cos^{-1}$ ou arccos.

$$\boxed{\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \pi}$$

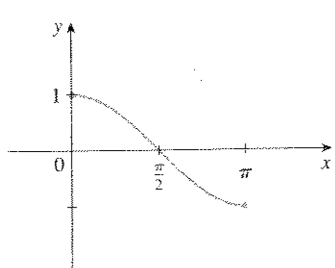


FIGURA 21

$y = \cos x, 0 \le x \le \pi$

As equações de cancelamento são

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \le x \le \pi \\ &\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \le x \le 1 \end{aligned}}$$

A função inversa do cosseno, $\cos^{-1}$, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[0, \pi]$. Seu gráfico está mostrado na Figura 22.

A função tangente pode se tornar um a um restringindo-se ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, a **função inversa da tangente** é definida como a inversa da função $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (veja a Figura 23). Ela é denotada por tg^{-1}, ou arctg.

$$\operatorname{tg}^{-1} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

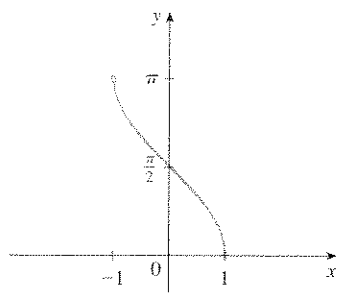


FIGURA 22 $y = \cos^{-1} x = \arccos x$

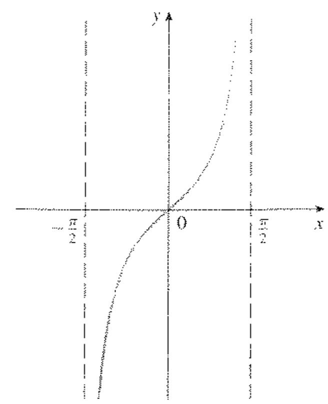


FIGURA 23 $y = \operatorname{tg} x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

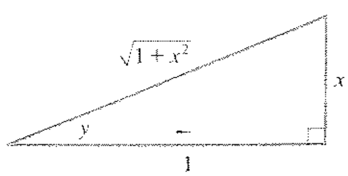


FIGURA 24

EXEMPLO 14 □ Simplifique a expressão $\cos(\operatorname{tg}^{-1} x)$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \operatorname{tg}^{-1} x$. Então $\operatorname{tg} y = x$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos determinar $\cos y$, mas, uma vez que $\operatorname{tg} y$ é conhecida, é mais fácil determinar $\sec y$ primeiro:

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim $$\cos(\operatorname{tg}^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil usar um diagrama. Se $y = \operatorname{tg}^{-1} x$, então $\operatorname{tg} y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

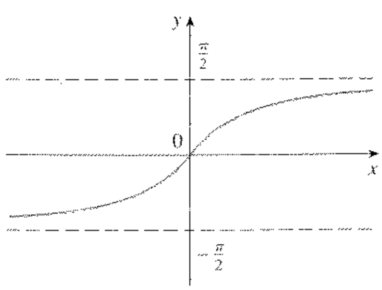


FIGURA 25

$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$

A função inversa da tangente, $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com freqüência e estão resumidas aqui.

19 $y = \operatorname{cossec}^{-1} x \ (|x| \geq 1) \iff \operatorname{cossec} y = x$ e $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1} x \ (|x| \geq 1) \iff \sec y = x$ e $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \operatorname{cotg}^{-1} x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \operatorname{cotg} y = x$ e $y \in (0, \pi)$

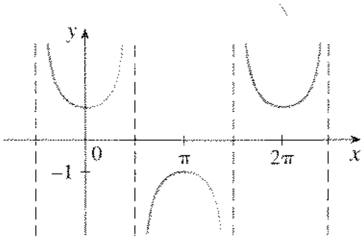


FIGURA 26 $y = \sec x$

A escolha dos intervalos para y nas definições de cossec^{-1} e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante da Figura 26 que ambas as escolhas vão funcionar.)

1.6 Exercícios

1. (a) O que é uma função um a um?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é um a um?

2. (a) Seja f uma função um a um com domínio A e imagem B. Como é definida a função inversa f^{-1}? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função f pode ser dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é um a um.

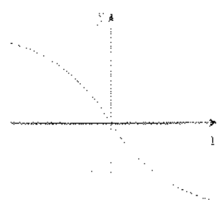
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

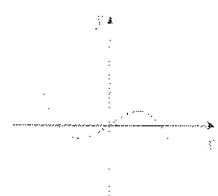
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

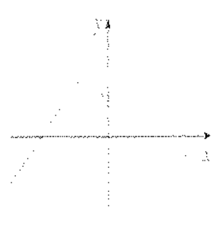
5.



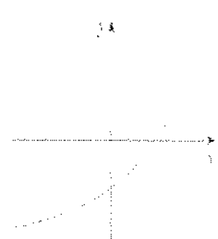
6.



7.



8.



9. $f(x) = \frac{1}{2}(x+5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

14. $f(t)$ é sua altura no tempo t.

15–16 Use um gráfico para decidir se f é um a um.

15. $f(x) = x^3 - x$

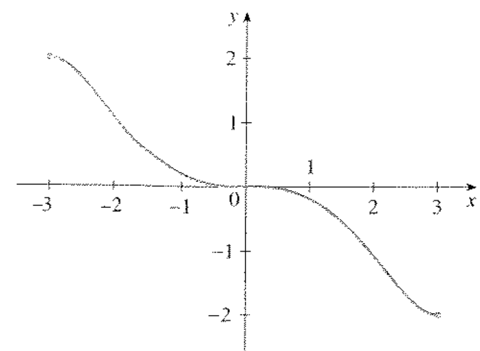
16. $f(x) = x^3 + x$

17. Se f for uma função um a um tal que $f(2) = 9$, quanto é $f^{-1}(9)$?

18. Se $f(x) = 3 + x^2 + \text{tg}(\pi x/2)$, onde $-1 < x < 1$,
(a) Encontre $f^{-1}(3)$. (b) Encontre $f(f^{-1}(5))$.

19. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, ache $g^{-1}(4)$.

20. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é um a um?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}.
(c) Estime o valor de $f^{-1}(1)$.



21. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula pa a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função invers

22. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

23–28 Encontre uma fórmula para a função inversa.

23. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

24. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

25. $f(x) = e^{x^3}$

26. $y = 2x^3 + 3$

27. $y = \ln(x + 3)$

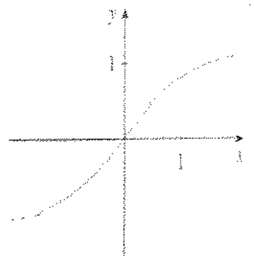
28. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29–30 Encontre uma fórmula explícita de f^{-1} e use-a para faze na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torn da reta.

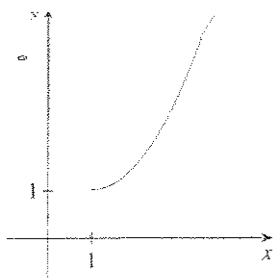
29. $f(x) = 1 - 2/x^2$, $x > 0$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$, $x > 0$

31. Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.



32. Use o gráfico dado de f para esboçar os gráficos de f^{-1} e $1/f$.



33. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos no mesmo conjunto de eixos das funções logaritmo natural e exponencial natural.

35–38 Encontre o valor exato de cada expressão.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1{,}25 + \log_{10} 80$
(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3 \log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3 \ln 2}$

39–41 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

39. $2 \ln 4 - \ln 2$

40. $\ln x + a \ln y - b \ln z$

41. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x - \ln \operatorname{sen} x$

42. Use a Fórmula 10 para computar cada logaritmo correto até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

43–44 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

43. $y = \log_{1,5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ é feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento é de 1 polegada. Quantas milhas à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 3 pés?

46. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ por meio de seus gráficos f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

47–48 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–52 Resolva cada equação em x.

49. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

50. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

53–54 Resolva as equações em x.

53. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

54. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

55–56 Determine (a) o domínio de f e (b) f^{-1} e seu domínio.

55. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$

56. $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

57. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é um a um. Use então um CAS para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu CAS vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

58. (a) Se $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, use um sistema algébrico computacional para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer um gráfico na mesma tela de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

59. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (veja o Exercício 25 na Seção 1.5).
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

60. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, o qual armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a = 2$?

61. Começando pelo gráfico de $y = \ln x$, encontre a equação do gráfico que resulta de
(a) deslocar 3 unidades para cima
(b) deslocar 3 unidades para a esquerda
(c) fazer a reflexão em torno do eixo x

(d) fazer a reflexão em torno do eixo y
(e) fazer a reflexão em torno da reta $y = x$
(f) fazer a reflexão em torno do eixo x e então em torno da reta $y = x$
(g) fazer a reflexão em torno do eixo y e então em torno da reta $y = x$
(h) deslocar 3 unidades para a esquerda e então fazer a reflexão em torno da reta $y = x$

62. (a) Se deslocarmos uma curva para a esquerda, o que acontecerá com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista desse princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, onde f é uma função um a um.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, onde $c \neq 0$.

63–68 Encontre o valor exato de cada expressão.

63. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

64. (a) $\operatorname{arctg}(-1)$ (b) $\csc^{-1} 2$

65. (a) $\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\operatorname{arcsen}(-1/\sqrt{2})$

66. (a) $\sec^{-1}\sqrt{2}$ (b) $\operatorname{arcsen} 1$

67. (a) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 0{,}7)$ (b) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

68. (a) $\sec(\operatorname{arctg} 2)$ (b) $\cos\left(2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

69. Prove que $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$

70–72 Simplifique a expressão.

70. $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

71. $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^{-1} x)$

72. $\operatorname{sen}(2\cos^{-1} x)$

73–74 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

73. $y = \operatorname{sen} x;\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2,\quad y = \operatorname{sen}^{-1} x, y = x$

74. $y = \operatorname{tg} x;\ -\pi/2 < x < \pi/2,\quad y = \operatorname{tg}^{-1} x, y = x$

75. Determine o domínio e a imagem da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x +$

76. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

1 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função? O que são domínio e imagem da função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como, a partir de uma curva dada, sabemos tratar-se de um gráfico de uma função?

2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.

3. (a) O que é uma função par? Como saber a partir do gráfico se uma função é par ou não?
(b) O que é uma função ímpar? Como saber a partir do gráfico se uma função é ímpar ou não?

4. O que é uma função crescente?

5. O que é um modelo matemático?

6. Dê um exemplo de cada tipo de função.
(a) Função linear (b) Função potência
(c) Função exponencial (d) Função quadrática
(e) Função polinomial de grau 5 (f) Função racional

7. Esboce à mão no mesmo conjunto de eixos os gráficos das seguintes funções.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Esboce à mão o gráfico de cada função.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \operatorname{tg} x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

9. Suponha que os domínios de f e g sejam A e B, respectivamente.
(a) Qual o domínio de $f + g$?
(b) Qual o domínio de fg?
(c) Qual o domínio de f/g?

10. Como está definida a função composta $f \circ g$? Qual seu domínio?

11. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva uma equação para ca um dos gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma.
(a) Deslocando 2 unidades para cima.
(b) Deslocando 2 unidades para baixo.
(c) Deslocando 2 unidades para a direita.
(d) Deslocando 2 unidades para a esquerda.
(e) Refletindo em torno do eixo x.
(f) Refletindo em torno do eixo y.
(g) Esticando verticalmente por um fator de 2.
(h) Encolhendo verticalmente por um fator de 2.
(i) Esticando horizontalmente por um fator de 2.
(j) Encolhendo horizontalmente por um fator de 2.

12. (a) O que é uma função um a um? Como decidir pelo gráfic se uma função é um a um?
(b) Seja f uma função um a um. Como está definida sua funçã inversa f^{-1}? Como obter o gráfico de f^{-1} a partir do de f

13. (a) Como a inversa da função seno $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ é definida? O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?
(b) Como a inversa da função cosseno $f(x) = \cos^{-1} x$ é definid O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?
(c) Como a inversa da função seno $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ é definida? O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?

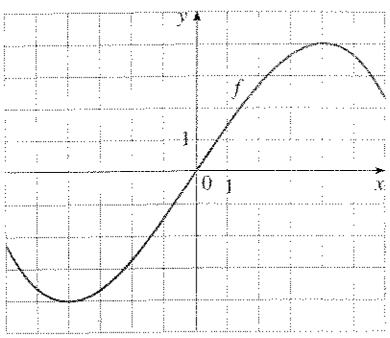
TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, também explique ou dê um exemplo em que a afirmativa não funciona.

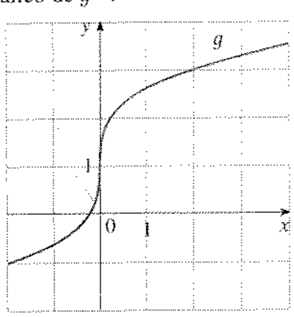
1. Se f for uma função, então $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.
3. Se f for uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.
4. Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então, $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Uma reta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.
6. Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.
7. Se f for um a um, então $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. É sempre possível dividir por e^x.
9. Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.
10. Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Se $x > 0$ e $a > 1$, então $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

EXERCÍCIOS

1. Seja f uma função cujo gráfico é dado.
   (a) Estime o valor de $f(2)$.
   (b) Estime os valores de x tais que $f(x) = 3$.
   (c) Estabeleça o domínio de f.
   (d) Estabeleça a imagem de f.
   (e) Sobre que intervalo a função f está crescendo?
   (f) f é um a um? Explique.
   (g) f é par, ímpar ou nenhum dos dois? Explique.



2. É dado o gráfico de g.
   (a) Estabeleça o valor de $g(2)$.
   (b) Por que g é um a um?
   (c) Estime o valor de $g^{-1}(2)$.
   (d) Estime o domínio de g^{-1}.
   (e) Esboce o gráfico de g^{-1}.



3. A distância percorrida por um carro é dada pelos valores na tabela.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
d (pés)	0	10	32	70	119	178

   (a) Use os dados para esboçar o gráfico de d como uma função de t.
   (b) Use o gráfico para estimar a distância percorrida depois de 4,5 segundos.

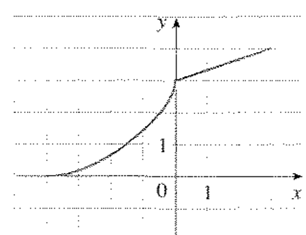
4. Esboce o gráfico do rendimento de uma colheita como uma função da quantidade de fertilizante usado.

5–8 □ Determine o domínio e a imagem da função.

5. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$
6. $g(x) = 1/(x + 1)$
7. $y = 1 + \operatorname{sen} x$
8. $y = \ln x$

9. Suponha que seja dado o gráfico de f. Descreva como os gráficos das seguintes funções podem ser obtidos a partir do gráfico de f.
   (a) $y = f(x) + 8$
   (b) $y = f(x + 8)$
   (c) $y = 1 + 2f(x)$
   (d) $y = f(x - 2) - 2$
   (e) $y = -f(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Dado o gráfico de f, desenhe os gráficos das seguintes funções.
   (a) $y = f(x - 8)$
   (b) $y = -f(x)$
   (c) $y = 2 - f(x)$
   (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
   (e) $y = f^{-1}(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 □ Use as transformações para esboçar o gráfico da função.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$
12. $y = 3 \ln(x - 2)$
13. $y = (1 + e^x)/2$
14. $y = 2\sqrt{-x}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

17. Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois.
   (a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
   (b) $f(x) = x^3 - x^7$
   (c) $f(x) = e^{-x^2}$
   (d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encontre uma expressão para a função cujo gráfico consiste no segmento de reta ligando o ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(-1, 0)$ junto com a parte de cima do círculo com centro na origem e raio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, e seus domínios.

20. Expresse a função $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como uma composição de três funções.

21. A expectativa de vida aumentou significativamente no século XX. A tabela mostra a expectativa de vida no nascimento (em anos) de homens nascidos nos Estados Unidos.

Ano do nascimento	Expectativa de vida
1900	48,3
1910	51,1
1920	55,2
1930	57,4
1940	62,5
1950	65,6
1960	66,6
1970	67,1
1980	70,0
1990	71,8
2000	73,0

Utilize um mapa de dispersão para escolher um tipo apropriado de modelo. Use seu modelo para predizer a duração de vida de um homem nascido no ano 2010.

22. Um pequeno fabricante descobre que custa \$ 9.000 para produzir 1.000 torradeiras elétricas em uma semana e \$ 12.000 para produzir 1.500 torradeiras em uma semana.
(a) Expresse o custo como uma função do número de torradeiras produzidas, supondo que ele é linear. Então esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual o intercepto y do gráfico e o que ele representa?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, encontre $f^{-1}(2)$.

24. Encontre a função inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encontre o valor exato de cada expressão.
(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$
(c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ (d) $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{4}{5})$

26. Resolva cada equação para x.
(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$
(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\operatorname{tg}^{-1} x = 1$

27. A meia-vida do paládio-100, ^{100}Pd, é de quatro dias. (Assim, a metade de qualquer quantidade de ^{100}Pd vai se desintegrar em 4 dias.) A massa inicial de uma amostra é 1 grama.
(a) Encontre a massa restante após 16 dias.
(b) Encontre a massa $m(t)$ restante após t dias.
(c) Encontre a função inversa de $m(t)$ e explique seu significado.
(d) Quando a massa ficará reduzida a 0,01 g?

28. A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com a população inicial igual a 100 e capacidade para suportar 1.000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100.000}{100 + 900e^{-t}}$$

onde t é medido em anos.
(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.
(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.
(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare o resultado com o da parte (a).

29. Faça o gráfico dos membros da família de funções $f(x) = \ln(x^2 - c)$ para vários valores de c. Como o gráfico se modificará quando c variar?

30. Faça o gráfico de três funções $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ e sobre a mesma tela para dois ou três valores de $a > 1$. Para os grandes valores de x, quais dessas funções terão valores maiores e quais terão valores menores?

Princípios para a Solução de Problemas

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na solução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de problema–solução e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis na solução de certos problemas. Esses passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de George Polya, *How to Solve It*.

1 Entendendo o problema

O primeiro passo é ler o problema e assegurar-se de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

O que é desconhecido?

Quais são as quantidades dadas?

Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso

fazer um diagrama

e identificar no diagrama as quantidades dadas e pedidas.

Geralmente é necessário

introduzir uma notação apropriada

Ao escolher os símbolos para as quantidades desconhecidas freqüentemente utilizamos as letras tais como a, b, c, m, n, x e y, mas, em alguns casos, ajuda usar as iniciais como símbolos sugestivos; por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2 Planejando

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajudará a encontrar a desconhecida. Em geral ajuda perguntar-se explicitamente: "Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?". Se não for possível visualizar a conexão imediatamente, as idéias que se seguem podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Focalize na incógnita e tente se lembrar de um problema mais familiar que a envolva.

Tente Reconhecer os Padrões Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorrem. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver a regularidade ou a repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois prová-lo.

Use Analogias Tente pensar sobre os problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas para a solução do problema original, mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. Caso o problema envolva a geometria tridimensional, você poderá tentar primeiro um problema similar bidimensional. Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduzindo Alguma Coisa Extra Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. Por exemplo, em um problema no qual o diagrama é fundamental, a ajuda extra pode ser o traçado de uma nova reta nele. Em problemas mais algébricos pode ser a introdução de uma nova incógnita relacionada com a original.

Dividindo em Casos Algumas vezes temos de dividir o problema em vários casos e usar para cada um deles um argumento diferente. Por exemplo, empregamos essa estratégia quando tratamos com os valores absolutos.

Trabalhando Retroativamente Às vezes é proveitoso imaginar que seu problema foi resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao que foi dado. E então você poderá ser capaz de reverter seus passos e, portanto, construir uma solução para o problema original. Esse procedimento é usado freqüentemente na solução de equações. Por exemplo, ao resolver a equação $3x - 5 = 7$, supomos que x seja um número que satisfaça $3x - 5 = 7$ e trabalhamos retroativamente. Adicionamos 5 a ambos os lados da equação e então dividimos cada lado por 3 para obter $x = 4$. Como cada um desses passos pode ser revertido, resolvemos o problema.

Estabelecendo Submetas Em um problema complexo é freqüentemente proveitoso estabelecer submetas (nas quais a situação desejada está apenas parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e, depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocínio Indireto Algumas vezes é apropriado atacar o problema indiretamente. Para provar, por contradição, que P implica Q, supomos que P e Q são falsos e tentamos mostrar por que isso não pode acontecer. De certa forma temos de usar essa informação e chegar a uma contradição do que sabemos perfeitamente ser verdadeiro.

Indução Matemática Para provar as afirmações que envolvem um número inteiro positivo n, é freqüentemente útil usar o princípio que se segue.

Princípio da Indução Matemática Seja S_n uma afirmação sobre o número inteiro n. Suponha que

1. S_1 seja verdadeira.
2. S_{k+1} seja verdadeira sempre que S_k for verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Isso é razoável, pois uma vez que S_1 é verdadeira, segue, da condição 2 (com $k = 1$), que S_2 é verdadeira. Então, utilizando a condição 2 com $k = 2$, vemos que S_3 é verdadeira. E novamente usando a condição 2 e, dessa vez, com $k = 3$, temos S_4 como verdadeira. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente.

3 Cumprindo o Plano

Na etapa 2 um plano foi delineado. Para cumpri-lo devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que provam a correção de cada etapa.

4 Revendo

Tendo completado nossa solução, é prudente revisá-la, em parte, para ver se foram cometidos erros e, em parte, para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver um problema. Outra razão para a revisão é que ela nos familiarizará com o método de solução que poderá ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: "Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas".

Esses princípios da solução de problemas estão ilustrados nos exemplos a seguir. Antes de ver as soluções, tente resolvê-los usando os princípios estudados anteriormente.

Pode ser proveitoso consultar de tempos em tempos esta seção, quando estiver resolvendo os exercícios nos demais capítulos do livro.

Exemplo 1 Expresse a hipotenusa h do triângulo retângulo com uma área de 25 m^2 como uma função do seu perímetro P.

▪ Entendendo o problema

Solução Classifique primeiro as informações identificando a quantidade desconhecida e os dados:

Incógnita: hipotenusa h

Quantidades dadas: perímetro P, área 25 m^2

▪ Desenhando um diagrama

É útil fazer um diagrama; assim, fizemos isto na Figura 1.

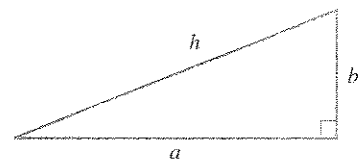


FIGURA 1

▪ Ligando os dados com a incógnita

▪ Introduzindo alguma coisa extra

A fim de conectar o que foi dado à incógnita, introduzimos duas variáveis extras, a e b, que são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Isso nos possibilitará expressar a condição dada, de o triângulo ser retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

As outras conexões entre as variáveis surgem escrevendo-se as expressões para a área e o perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Uma vez que P é dado, observe que temos agora três equações em três incógnitas a, b e h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

▪ Relacionando com algo familiar

Embora tenhamos um número correto de equações, elas não são fáceis de ser resolvidas diretamente. Porém, se usarmos as estratégias de problema–solução para tentar reconhecer algo familiar, então poderemos resolver essas equações de forma mais fácil. Olhando os segundos membros das Equações 1, 2 e 3, eles não lhe lembram algo familiar? Observe que eles contêm os ingredientes de uma fórmula familiar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando essa idéia, vamos expressar $(a + b)^2$ de duas maneiras. Das Equações 1 e 2 temos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Da Equação 3 temos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Assim
$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$
$$2Ph = P^2 - 100$$
$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Essa é a expressão requerida para h como uma função de P. □

Como no exemplo ilustrado a seguir, é freqüentemente necessário usar o princípio de *dividir em casos* quando tratamos com valores absolutos.

Exemplo 2 Resolva a desigualdade $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

Solução Lembre-se da definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue-se que
$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Analogamente
$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

■ Dividindo em casos

Essas expressões mostram que devemos considerar três casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I □ Se $x < -2$, temos

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$
$$-x + 3 - x - 2 < 11$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

CASO II □ Se $-2 \leqslant x < 3$, a desigualdade dada torna-se

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$
$$5 < 11 \qquad \text{(sempre é verdadeiro)}$$

CASO III □ Se $x \geqslant 3$, a desigualdade torna-se

$$x - 3 + x + 2 < 11$$
$$2x < 12$$
$$x < 6$$

Combinando os casos I, II e III, vemos que a desigualdade está satisfeita quando $-5 < x < 6$. Logo a solução é o intervalo $(-5, 6)$.

No exemplo a seguir tentaremos configurar a resposta examinando os casos especiais e reconhecendo um padrão. A seguir vamos prová-lo por indução matemática.

Ao usar o Princípio da Indução Matemática, vamos seguir as três etapas:

Passo 1 Prove que S_n é verdadeira quando $n = 1$.

Passo 2 Presuma que S_n é verdadeira quando $n = k$ e deduza que S_n é verdadeira quando $n = k + 1$.

Passo 3 Conclua que S_n é verdadeira para todo n pelo Princípio da Indução Matemática.

Exemplo 3 Se $f_0(x) = x/(x + 1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

▨ Analogia: Vamos tentar um problema mais simples

Solução Começamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ nos casos especiais $n = 1, 2$ e 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

▨ Procurando por um padrão

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Observamos um padrão: o coeficiente de x no denominador de $f_n(x)$ é $n + 1$ nos três casos calculados. Assim sendo, fazemos a seguinte conjectura, no caso geral,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para provar, usamos o Princípio da Indução Matemática. Já vimos que (4) é verdadeira para $n = 1$. Suponha que ela é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Então $\quad f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Essa expressão mostra que (4) é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, por indução matemática, é verdadeira para todo n inteiro positivo. ☐

Problemas

1. Um dos lados de um triângulo retângulo tem 4 cm de comprimento. Expresse o comprimento da altura perpendicular à hipotenusa como uma função do comprimento da hipotenusa.

2. A altura perpendicular da hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Expresse o comprimento da hipotenusa como uma função do perímetro.

3. Resolva a equação $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resolva a desigualdade $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Faça o gráfico da equação $x + |x| = y + |y|$.

8. Faça o gráfico da equação $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.

9. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tal que $|x| + |y| \leqslant 1$.

10. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tal que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

11. Compute $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. (a) Mostre que a função $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ é ímpar.
(b) Encontre a função inversa de f.

13. Resolva a desigualdade $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use de um raciocínio inverso para provar que $\log_2 5$ é um número irracional.

15. Uma pessoa inicia uma viagem. Na primeira metade do percurso ela viaja sossegadamente a 30 mi/h; na segunda, ela vai a 60 mi/h. Qual sua velocidade média na viagem?

16. É verdadeiro que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Prove que, se n for um inteiro positivo, então $7^n - 1$ é divisível por 6.

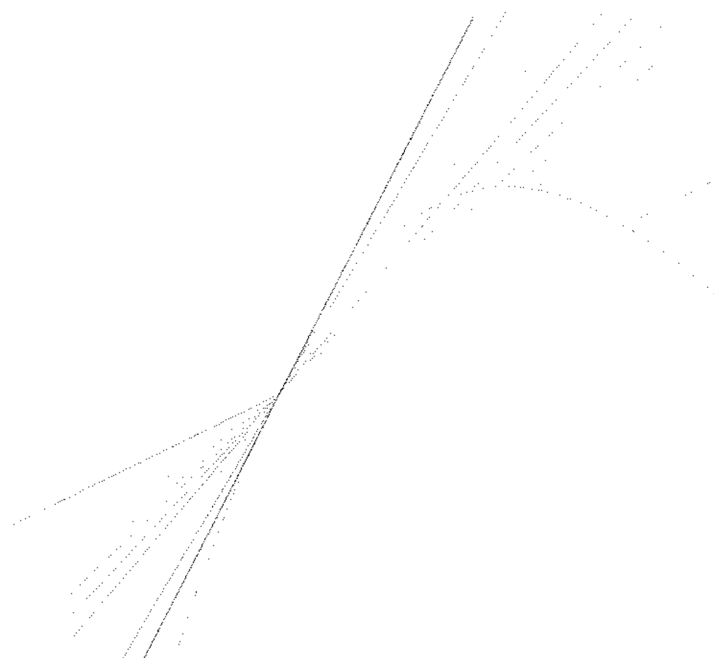
18. Prove que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Se $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Se $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma expressão para $f_n(x)$ e use a indução matemática para prová-la.

(b) Faça os gráficos na mesma tela de f_0, f_1, f_2, f_3 e descreva os efeitos da composição repetida.

2
Limites e Derivadas



A idéia de um limite é ilustrada por retas secantes tendendo a uma reta tangente.

Em Uma *Apresentação do Cálculo* vimos como a idéia de limite está subentendida em vários ramos do cálculo. Por isso, é apropriado começar nosso estudo de cálculo pesquisando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à idéia central do cálculo diferencial – a derivada.

2.1 Os Problemas da Tangente e da Velocidade

Nesta seção vamos ver como surgem os limites quando tentamos encontrar a tangente a uma curva ou a uma velocidade de um objeto.

O Problema da Tangente

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Ou seja, uma reta tangente deve ter a mesma direção e sentido que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa idéia?

Para um círculo poderíamos simplesmente seguir Euclides e dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura 1(b) mostra duas retas, l e t, passando por um ponto P sobre uma curva C. A reta l intercepta C somente uma vez, mas certamente não aparenta o que pensamos ser uma reta tangente. A reta t, por outro lado, aparenta ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.

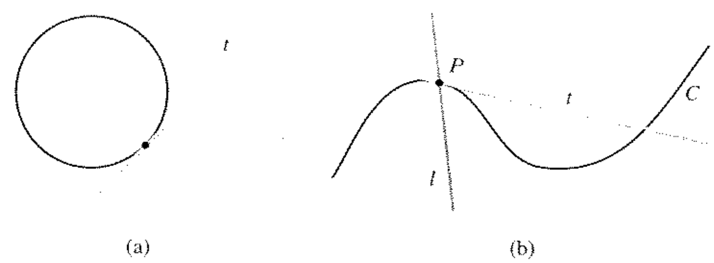


FIGURA 1

Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta tangente t à parábola $y = x^2$.

EXEMPLO 1 — Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Se soubermos como encontrar a inclinação m seremos capazes de achar uma equação da reta tangente t. A dificuldade está em termos somente um ponto P, sobre t, ao passo que para calcular a inclinação são necessários dois pontos. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2) e computando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ.

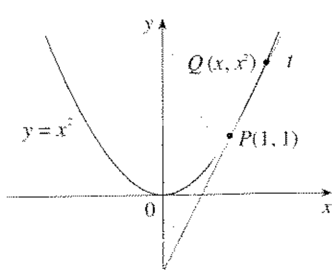


FIGURA 2

Vamos escolher $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por exemplo, para o ponto $Q(1{,}5,\ 2{,}25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos de 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e fica evidente que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deva ser $m = 2$.

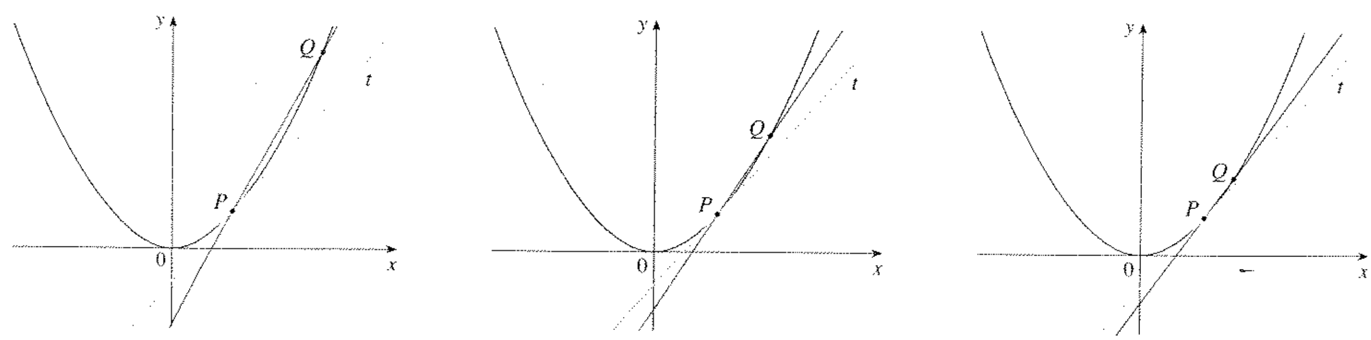
Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes, e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto–inclinação da equação de uma reta (veja o Apêndice B) para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.



Q tende a P pela direita

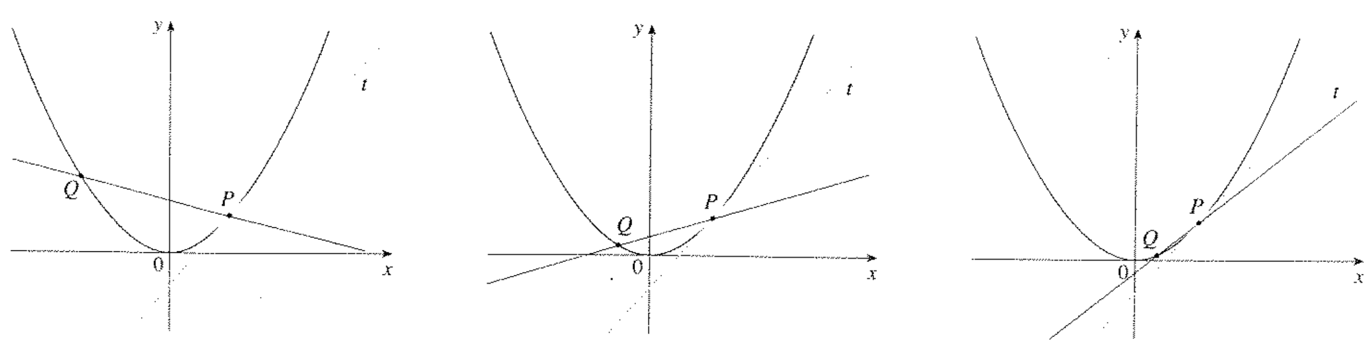


FIGURA 3

Q tende a P pela esquerda

Em ciências, muitas funções não são descritas por equações explícitas; elas são definidas por dados experimentais. O exemplo a seguir mostra como estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma dessas funções.

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

EXEMPLO 2 O *flash* de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente quando o *flash* é disparado. Os dados à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o *flash* ter sido disparado). Use os dados para fazer o gráfico dessa função e estime a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0{,}04$. [*Nota*: A inclinação da reta tangente representa um fluxo de corrente elétrica do capacitor para o *flash* (medido em microampères).]

SOLUÇÃO Na Figura 4 desenhamos os dados usados para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

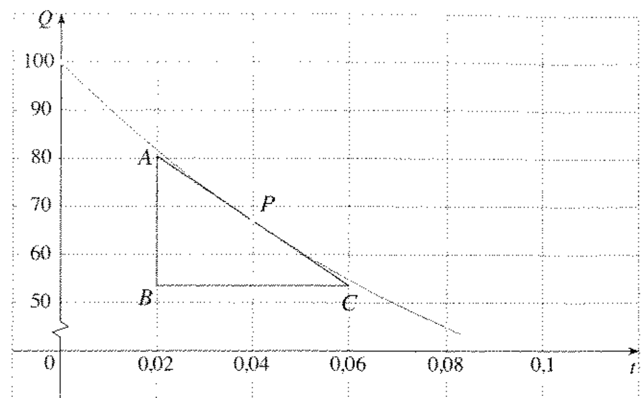


FIGURA 4

Dados os pontos $P(0{,}04,\ 67{,}03)$ e $R(0{,}00,\ 100{,}00)$ sobre o gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante PR é

$$m_{PR} = \frac{100{,}00 - 67{,}03}{0{,}00 - 0{,}04} = -824{,}25$$

R	m_{PR}
(0,00, 100,00)	−824,25
(0,02, 81,87)	−742,00
(0,06, 54,88)	−607,50
(0,08, 44,93)	−552,50
(0,10, 36,76)	−504,50

A tabela à esquerda mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos prever que a inclinação da reta tangente em $t = 0{,}04$ está em algum ponto entre -742 e $-607{,}5$. De fato, a média das inclinações da duas retas secantes mais próximas é

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607{,}5) = -674{,}75$$

Logo, por esse método estimamos que a inclinação da reta tangente é -675.

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P e medir os lados do triângulo ABC, como na Figura 4. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80{,}4 - 53{,}6}{0{,}06 - 0{,}02} = -670$$

O significado físico da resposta no Exemplo 2 é que a corrente que flui do capacitor para o *flash* após 0,04 s é cerca de -670 microampères.

O Problema da Velocidade

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro nã fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante (não estamc considerando os congestionamentos). Podemos supor da observação do velocímetro que carro tenha uma velocidade definida em cada momento. Mas como está definida ess velocidade "instantânea"? Vamos esmiuçar o exemplo da bola caindo.

EXEMPLO 3 Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo (esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada computando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5{,}1$:

$$\begin{aligned}\text{velocidade média} &= \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}\\ &= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1}\\ &= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

Fica evidente que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A **velocidade instantânea** quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é

$$v = 49 \text{ m/s}$$

Você deve ter visto que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre os problemas da tangente e do cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a, 4{,}9a^2)$ e $Q(a + h, 4{,}9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a+h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

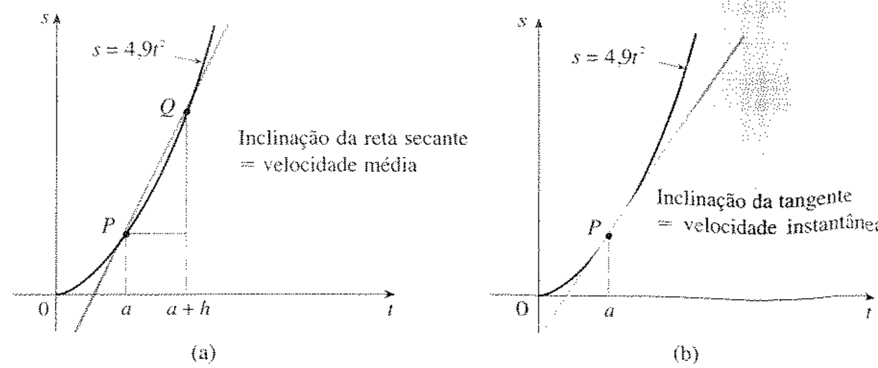


FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver os problemas da velocidade e da tangente devemos ser capazes de encontrar os limites. Após estudarmos os métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, vamos retornar aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 Exercícios

1. Um tanque com capacidade para 1.000 galões de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em galões) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (galões)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P for o ponto (15, 250) sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico correspondente a $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.
(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.
(c) Use o gráfico da função para estimar a inclinação da reta tangente em P. (Essa inclinação representa a taxa segundo a qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos utilizando a reta secante entre os pontos com os valores de t dados.
(a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$
(c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$
Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P(1, \frac{1}{2})$ pertence à curva $y = x/(1 + x)$.
(a) Se Q é o ponto $(x, x/(1 + x))$, use a calculadora para determinar o coeficiente da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:
(i) 0,5 (ii) 0,9 (iii) 0,99 (iv) 0,999
(v) 1,5 (vi) 1,1 (vii) 1,01 (viii) 1,001
(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(1, \frac{1}{2})$.
(c) Utilize a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(1, \frac{1}{2})$.

4. O ponto $P(2, \ln 2)$ pertencente à curva $y = \ln x$.
(a) Se Q é o ponto $(x, \ln x)$, use sua calculadora para determinar o coeficiente angular da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:
(i) 1,5 (v) 2,5
(ii) 1,9 (vi) 2,1
(iii) 1,99 (vii) 2,01
(iv) 1,999 (viii) 2,001
(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, \ln 2)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(2, \ln 2)$.
(d) Faça uma figura utilizando duas dessas retas secantes e a reta tangente.

5. Uma bola é atirada no ar com uma velocidade de 40 pés/s, e sua altura em pés após t segundos é dada por $y = 40t - 16t^2$.
(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 2$ e dura de
(i) 0,5 s (ii) 0,1 s
(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 2$.

6. Uma flecha é lançada para cima com uma velocidade de 58 m/s, e sua altura em metros após t segundos é dada por $h = 58t - 0{,}83t^2$.
(a) Encontre a velocidade média durante os intervalos de tempo dados:
(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1{,}5]$ (iii) $[1, 1{,}1]$
(iv) $[1, 1{,}01]$ (v) $[1, 1{,}001]$
(b) Encontre a velocidade instantânea após 1 segundo.

7. O deslocamento (em pés) de uma certa partícula movendo-se em linha reta é dado por $s = t^3/6$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre a velocidade média durante os períodos de tempo a seguir:
(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$
(iii) $[1, 1{,}5]$ (iv) $[1, 1{,}1]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.
(c) Faça um gráfico de s como uma função de t e trace retas secantes com inclinações iguais às velocidades médias encontradas na parte (a).
(d) Trace a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

8. A posição de um carro é dada pelos valores mostrados na tabela.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (pés)	0	10	32	70	119	178

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo começando quando $t = 2$ e durando
(i) 3 s (ii) 2 s (iii) 1 s
(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 2$.

9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \text{sen}(10\pi/x)$.
(a) Se Q for o ponto $(x, \text{sen}(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (correta até a quarta casa decimal) para $x = 2, 1{,}5, 1{,}4, 1{,}3, 1{,}2, 1{,}1, 0{,}5, 0{,}6, 0{,}7, 0{,}8$ e $0{,}9$. Fica evidente ou não que as inclinações tendem a um limite?
(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P.
(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P.

2.2 O Limite de uma Função

Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a uma velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de computá-los.

Vamos investigar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

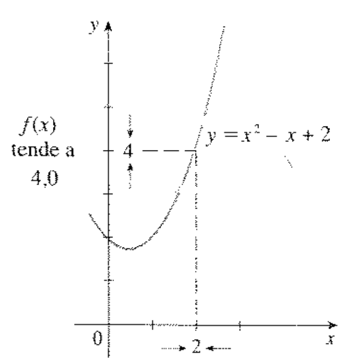


FIGURA 1

Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1 vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ estará próximo de 4. De fato, é evidente que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos tornando x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4".

A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Em geral, usamos a seguinte notação.

1 Definição Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a) mas não igual a a.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é

$$f(x) \to L \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

que deve ser lida assim: "$f(x)$ tende a L quando x tende a a".

Preste atenção na frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a nunca consideramos $x = a$. Na realidade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas em cada caso, não importando o que acontece em a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

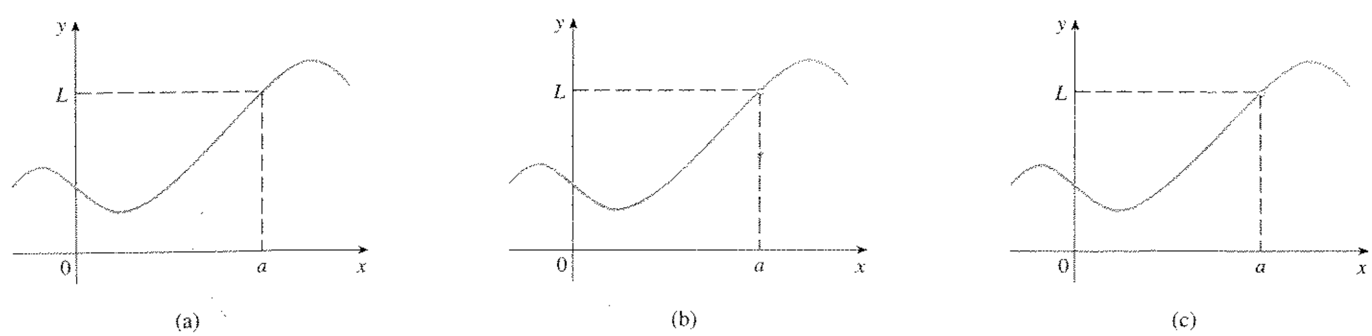


FIGURA 2

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

EXEMPLO 1 Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$. Mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas que não são iguais a a. As tabelas dão os

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

valores de $f(x)$ (corretas até a sexta casa decimal) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores podemos determinar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0{,}5$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Vamos agora mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (ver Figura 4).

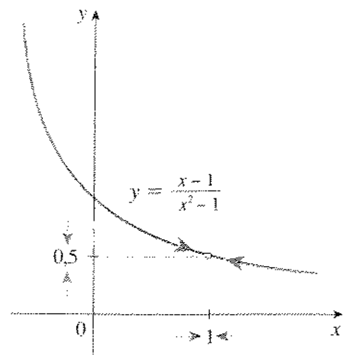


FIGURA 3

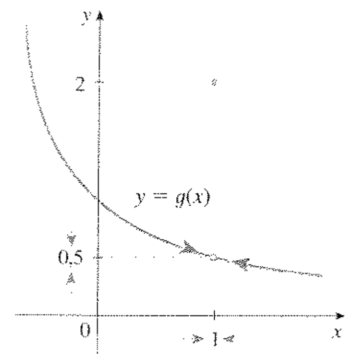


FIGURA 4

EXEMPLO 2 □ Encontre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

À medida que t tende a 0, os valores da função dão a impressão de que eles aproximam-se de 0,1666666... Assim, depreendemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±0.0005	0,16800
±0.0001	0,20000
±0.00005	0,00000
±0.00001	0,00000

O que aconteceria no Exemplo 2 se tivéssemos tomado os valores ainda menores para t? A tabela mostra os resultados obtidos em uma calculadora; você pode notar que algo estranho está acontecendo.

Para maiores esclarecimentos do porquê de as calculadoras darem resultados eventualmente falsos, veja a página na web *www.stewartcalculus.com*

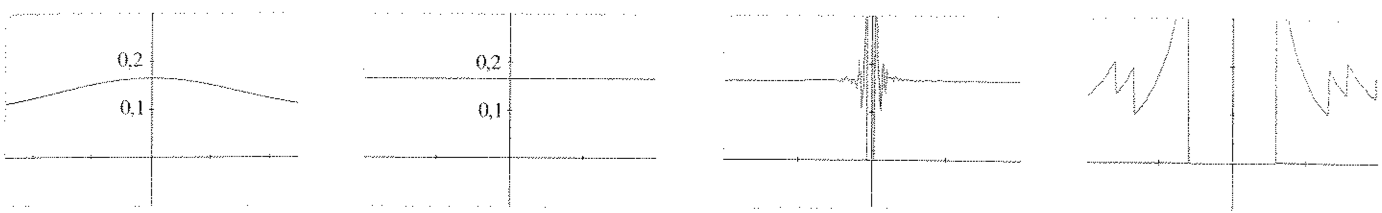
Clique em *Additional Topics* e depois em *Lies My Calculator and Computer Told Me*. Em particular, veja a seção chamada *The Perils of Subtraction*.

Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter os valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 se fizer t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0 e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, conforme veremos na próxima seção. O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2+9}$ é muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, um valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ é 3,000 . . . com tantas casas decimais exatas quanto for capaz de computar a calculadora.)

Algo muito parecido acontece quando tentamos fazer o gráfico da função

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f, e, quando usamos *trace mode* (se disponível), podemos facilmente estimar que o limite é cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um *zoom*, como nas partes (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1;\ 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1;\ 0{,}1]$ por $[-0{,}1;\ 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1;\ 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1;\ 0{,}3]$

FIGURA 5

EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUÇÃO Novamente a função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando que se $x \in \mathbb{R}$, sen x significa o seno de um ângulo cuja medida é x *radianos*), construímos a tabela a seguir para os valores corretos até a oitava casa decimal. Da tabela e do gráfico da Figura 6 temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Essa conjectura é de fato correta, como será provado no Capítulo 3 usando argumentos geométricos.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
$\pm 1{,}0$	0,84147098
$\pm 0{,}5$	0,95885108
$\pm 0{,}4$	0,97354586
$\pm 0{,}3$	0,98506736
$\pm 0{,}2$	0,99334665
$\pm 0{,}1$	0,99833417
$\pm 0{,}05$	0,99958339
$\pm 0{,}01$	0,99998333
$\pm 0{,}005$	0,99999583
$\pm 0{,}001$	0,99999983

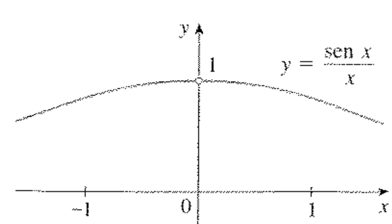


FIGURA 6

□ CAS

Os sistemas algébricos computacionais (CAS – *Computer Algebra Systems*) têm comandos para computar os limites. A fim de evitar falhas como as demonstradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como o cálculo por séries infinitas. Se você tiver acesso a um CAS, use o comando de limite para computar os limites nos exemplos desta seção e verificar suas respostas aos exercícios deste capítulo.

EXEMPLO 4 □ Encontre $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(1/n) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ não está definida em 0. Obtendo a função para alguns valores pequenos de x, temos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f(\tfrac{1}{3}) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{4}) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0{,}1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0{,}01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Da mesma forma $f(0{,}001) = f(0{,}0001) = 0$. Com base nessa informação poderíamos ser tentados a conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada. Observe que embora $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo número inteiro n, é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. [De fato, $\operatorname{sen}(\pi/x) = 1$ quando

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

e, resolvendo para x, obtemos $x = 2/(4n + 1)$.] O gráfico de f é dado na Figura 7.

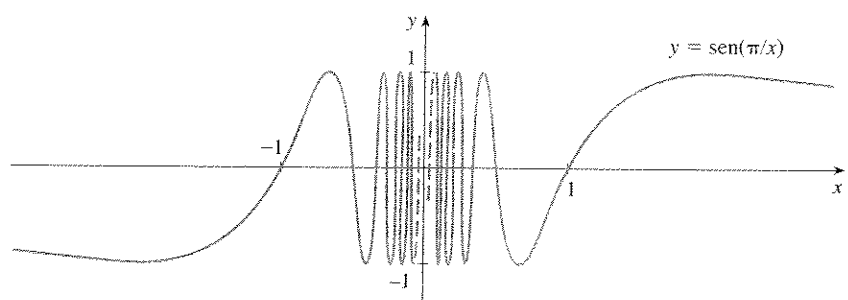


FIGURA 7

As curvas tracejadas indicam que os valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0 (veja o Exercício 37). Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \text{ não existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

EXEMPLO 5 □ Encontre $\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000} \right)$.

SOLUÇÃO Como antes, construímos uma tabela de valores. Da tabela parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

Mas se continuarmos com os valores ainda menores de x, a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0,000100 = \frac{1}{10.000}$$

Mais tarde veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0,0001.

Os Exemplos 4 e 5 ilustram algumas das falhas na conjectura sobre o valor de um limite. É fácil concluir pelo valor falso se usarmos os valores não apropriados de x, mas é difícil saber quando parar de calcular esses valores. Assim, como mostra a discussão após o Exemplo 2, algumas vezes as calculadoras e computadores dão valores falsos. Nas duas próximas seções, porém, vamos desenvolver métodos infalíveis no cálculo de limites.

EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H, é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

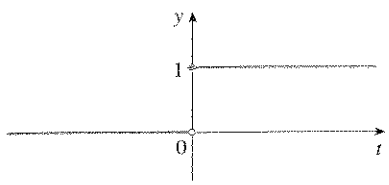


FIGURA 8

[Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850-1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é estabelecida em $t = 0$.] Seu gráfico está na Figura 8.

Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Portanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.

Limites Laterais

Vimos no Exemplo 6 que $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo "$t \to 0^-$" indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0. Da mesma forma, "$t \to 0^+$" indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

2 Definição Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Observe que a Definição 2 difere da Definição 1 pelo fato de exigirmos que x seja menor que a. Analogamente, se for exigido que x seja maior que a, obteremos "o **limite direito de $f(x)$ quando x tende a a** como igual a L", e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.

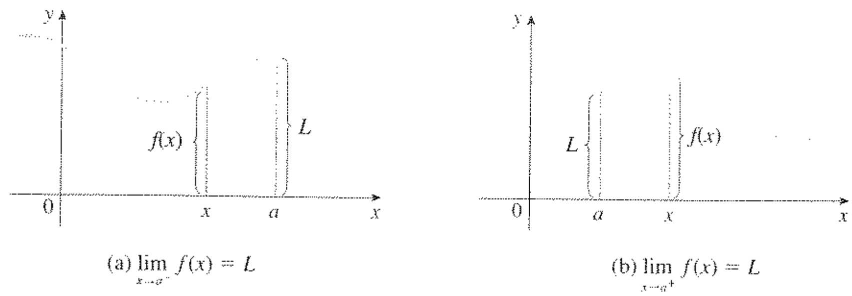


FIGURA 9

Comparando a Definição 1 com a de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que está a seguir.

> $\boxed{3}$ $\quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad$ se e somente se $\quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad$ e $\quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

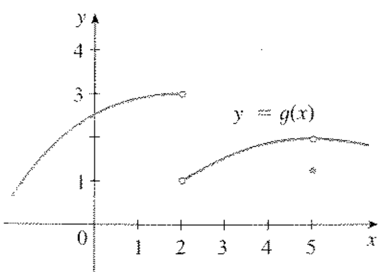


FIGURA 10

EXEMPLO 7 □ O gráfico de uma função g está na Figura 10. Use-o para estabelecer (caso existam) os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUÇÃO A partir do gráfico vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas se aproximam de 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites esquerdo e direito, concluímos de (3) que o $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \quad \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{(e)} \quad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora o limite esquerdo e o direito são iguais; assim, de (3) segue-se que

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

Limites Infinitos

EXEMPLO 8 □ Encontre se existir o $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

SOLUÇÃO À medida que x se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de 0, e $1/x^2$ fica muito grande (veja a tabela na página a seguir). De fato, evidencia-se do gráfico da Figura 11 que a função $f(x) = 1/x^2$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tomarmos

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10.000
± 0.001	1.000.000

os valores de x próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$.

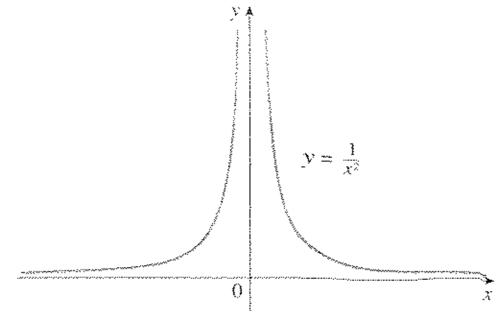


FIGURA 11

Para indicar o comportamento de uma função análogo ao da função do Exemplo 8 usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa considerar ∞ como um número. Tampouco significa que o limite exista. É simplesmente uma maneira de expressar uma forma particular da não-existência do limite: $1/x^2$ pode assumir valores tão grandes quanto quisermos, bastando para isso escolhermos os valores de x adequadamente próximos de 0.

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores (ou "crescem sem limites"), quando x torna-se maior, quanto mais próximos estivermos de a [ou que os valores de $f(x)$ "crescem sem limitação"].

4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Outra notação para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é

$$f(x) \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

Novamente o símbolo ∞ não é um número, mas a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ normalmente é lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é infinito"

ou "$f(x)$ torna-se infinita quando x tende a a"

ou ainda "$f(x)$ cresce sem limitação quando x tende a a"

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

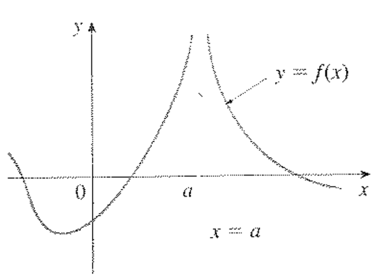


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

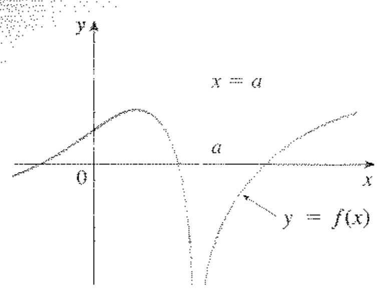


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Um tipo análogo de limite, que ocorre quando a função torna-se grande em valor absoluto, porém é negativa quando x se aproxima de a, cujo significado está na Definição 5 é ilustrado na Figura 13.

5 **Definição** Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se os valores de x próximos de a, mas diferentes do próprio a.

O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $f(x)$ é menos infinito quando x tende a a", ou "$f(x)$ decresce sem limitação quando x se aproxima de a". Por exemplo, temos

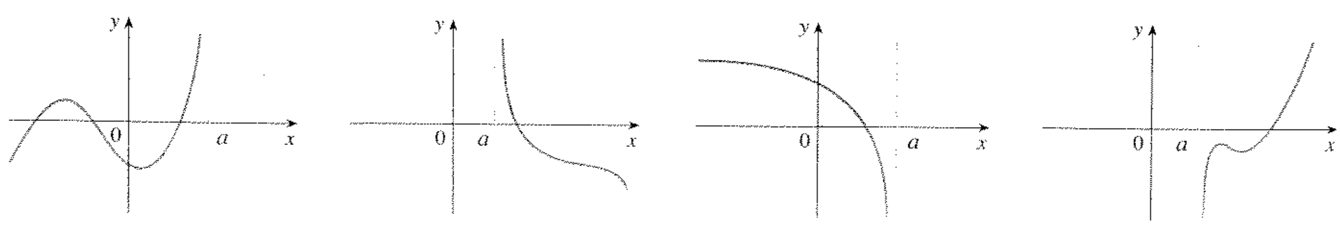
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

lembrando-se de que "$x \to a^-$" significa considerar somente os valores de x menores que a, ao passo que "$x \to a^+$" significa considerar somente valores de $x > a$ (veja as ilustrações para os quatro casos na Figura 14).



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 **Definição** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \to 0}(1/x^2) = \infty$. Na Figura 14 a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados. Em geral o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

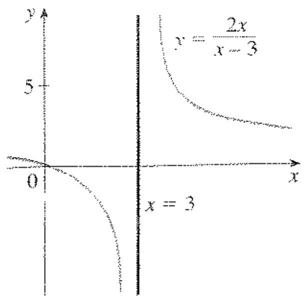


FIGURA 15

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x - 3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, vemos que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* numericamente grande. Então

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

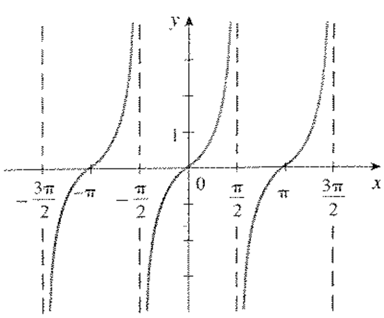


FIGURA 16

$y = \text{tg}\, x$

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$.

SOLUÇÃO Como

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais potenciais em que $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, considerando que sen x é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg}\, x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Por raciocínio análogo mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17 vemos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

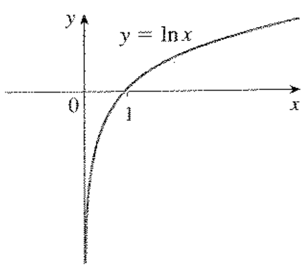


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

e assim a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

É possível, diante da equação anterior, que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa para você dizer que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$$

Nessa situação é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

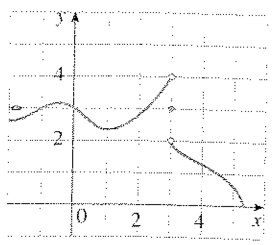
(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para a função f cujo gráfico é dado, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(e) $f(3)$

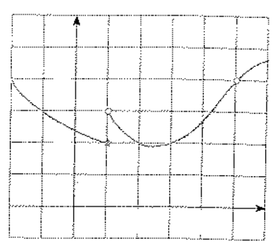


5. Use o gráfico dado da função f para determinar o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

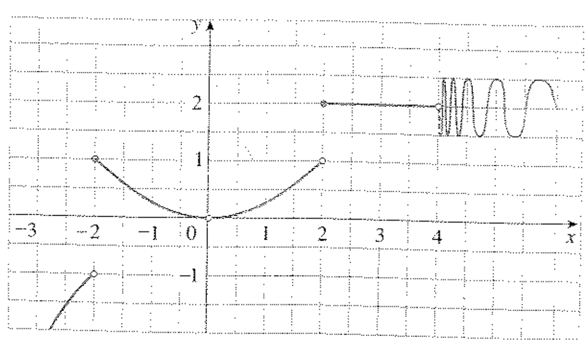
(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 5} f(x)$

(e) $f(5)$



6. Para a função g cujo gráfico é dado, determine o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $\lim_{x \to -2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to -2} g(x)$

(d) $g(-2)$ (e) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

(g) $\lim_{x \to 2} g(x)$ (h) $g(2)$ (i) $\lim_{x \to 4^+} g(x)$

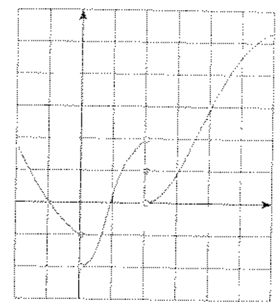
(j) $\lim_{x \to 4^-} g(x)$ (k) $g(0)$ (l) $\lim_{x \to 0} g(x)$

7. Para a função g cujo gráfico é dado, determine o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

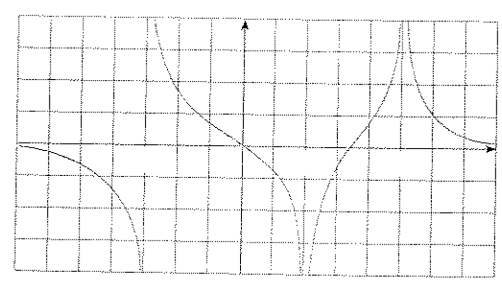


8. Para a função R cujo gráfico é mostrado a seguir, determine.

(a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

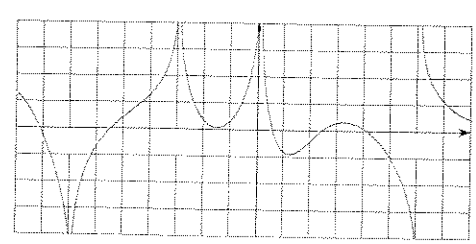


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine.

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

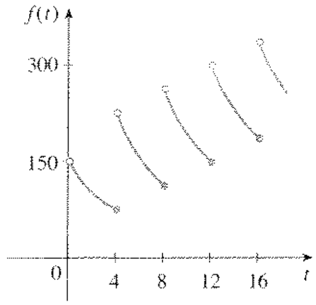
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sangüínea após t horas. (Posteriormente seremos capazes de computar a dosagem e intervalos de tempo que garantam que a concentração da droga não atinja níveis perigosos.) Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11. Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para estabelecer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

13–14 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

13. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ não está definida

15–18 Estime o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

15. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2{,}5, 2{,}1, 2{,}05, 2{,}01, 2{,}005, 2{,}001,$ $1{,}9, 1{,}95, 1{,}99, 1{,}995, 1{,}999$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 0, -0{,}5, -0{,}9, -0{,}95, -0{,}99,$ $-0{,}999, -2, -1{,}5, -1{,}1, -1{,}01, -1{,}001$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1, \pm 0{,}05, \pm 0{,}01$

18. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x + x^2)$, $x = 1, 0{,}5, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001$

19–22 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver algum mecanismo que faça gráficos, use-o para confirmar seu resultado.

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

21. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

23–30 Determine os limites infinitos.

23. $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{6}{x - 5}$

24. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{6}{x - 5}$

25. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2 - x}{(x-1)^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - 1}{x^2(x + 2)}$

27. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x - 1}{x^2(x + 2)}$

28. $\lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cossec} x$

29. $\lim_{x\to(-\pi/2)^-} \sec x$

30. $\lim_{x\to 5^+} \ln(x - 5)$

31. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) estimando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para os valores de x que tendem a 1 pela esquerda e direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

32. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

33. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

34. A inclinação da reta tangente ao gráfico da função exponencial $y = 2^x$ no ponto $(0, 1)$ é $\lim_{x\to 0} (2^x - 1)/x$. Estime a inclinação até três casas decimais.

35. (a) Estime a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1$ e $0,05$ e faça uma conjectura sobre o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Estime $f(x)$ para $x = 0,04; 0,02; 0,01; 0,005; 0,003$ e $0,001$. Faça novamente uma conjectura.

36. (a) Estime $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1; 0,5; 0,1; 0,05; 0,01$ e $0,005$.

(b) Conjecture qual o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

(c) Estime $h(x)$ para os valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir os valores 0 para $h(x)$. Você ainda é capaz de sugerir que o resultado de (b) está correto? Explique por que você acaba obtendo os valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)

(d) Faça o gráfico da função h na janela de inspeção $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê então um *zoom* na direção do ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

37. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela de inspeção $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem por várias vezes. Comente o comportamento dessa função.

38. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula no repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

39. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

40. (a) Use as evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 Cálculos dos Limites Usando suas Leis

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer uma conjectura sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a uma resposta correta. Nesta seção usaremos as seguintes propriedades dos limites, chamadas *Leis do Limite*, para calculá-los.

Leis do Limite Seja c uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{se } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Essas cinco leis podem ser enunciadas da seguinte forma:

Lei da Soma

1. O limite de uma soma é a soma dos limites.

Lei da Diferença

2. O limite da diferença é a diferença dos limites.

Lei do Múltiplo Constante

3. O limite de uma constante vezes uma função é a constante vezes o limite da função.

Lei do Produto

4. O limite de um produto é o produto dos limites.

Lei do Quociente

5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero).

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ próximo de M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo de $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Lei nº 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para provar essa lei. As provas das leis remanescentes encontram-se no Apêndice F.

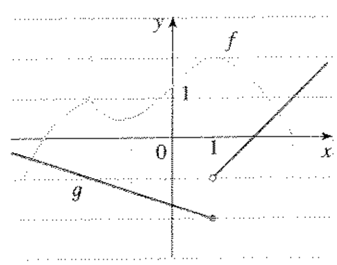


FIGURA 1

EXEMPLO 1 ☐ Use as Leis do Limite e o gráfico de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(pela Lei nº 1)} \\
&= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(pela Lei nº 3)} \\
&= 1 + 5(-1) = -4
\end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Lei nº 4. O limite dado não existe, pois o limite esquerdo não é igual ao direito.

(c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Lei nº 5. O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0.

Usamos a Lei do Produto repetidamente com $g(x) = f(x)$ para obter a seguinte lei.

Lei da Potência

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

Ao aplicar essas seis leis, vamos precisar usar dois limites especiais:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo (faça um enunciado para eles e esboce os gráficos de $y = c$ e $y = x$), mas as provas baseadas na definição precisa serão pedidas nos exercícios da Seção 2.4.

Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Leis nºs 6 e 8, vamos obter outro útil limite especial.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

Um limite similar pode ser verificado para as raízes da forma a seguir. (Para as raízes quadradas a prova está esboçada no Exercício 37 da Seção 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

Com mais generalidade, temos a seguinte lei, que é demonstrada como uma conseqüência da Lei nº 10 da Seção 2.5.

Lei da Raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EXEMPLO 2 □ Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

(b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Leis nºs 1 e 2)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Lei nº 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Leis nºs 9, 8 e 7)} \\ &= 39 \end{aligned}$$

(b) Começamos pela Lei nº 5, mas seu uso só será completamente justificado na passagem final, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

Newton e os Limites

Isaac Newton nasceu no dia de Natal de 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou para a Universidade de Cambridge, em 1661, Newton não sabia muita matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e assistindo às aulas de Isaac Barrow. Cambridge esteve fechada por causa da peste em 1665 e 1666, quando Newton retornou à sua casa para refletir sobre o que havia aprendido. Esses dois anos foram de incrível produtividade. Foi nesse período que Newton fez quatro dentre suas maiores descobertas: (1) sua representação de funções como somas de séries infinitas, inclusive o teorema binomial; (2) seu trabalho sobre o cálculo integral e diferencial; (3) suas leis do movimento e da gravitação universal e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e da cor. Receando controvérsias e críticas, Newton relutou quanto a publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, pressionado pelo astrônomo Halley, publicou os *Principia Mathematica*. Nesse trabalho, o maior tratado científico feito até então, Newton tornou pública sua versão do cálculo e usou-a para pesquisar mecânica, dinâmica dos fluidos e movimentos das ondas, e para explicar o movimento dos planetas e cometas.

Os princípios do cálculo são encontrados na forma de achar as áreas e os volumes por eruditos da Grécia antiga, como Eudóxio e Arquimedes. Embora os aspectos da idéia de limites estejam implícitos em seu Método de Exaustão, Eudóxio e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do cálculo, realmente não usaram os limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre eles. Ele explicou que a idéia principal por trás dos limites é que as quantidades "ficam mais próximas do que qualquer diferença dada". Newton estabeleceu que o limite era o conceito básico no cálculo, mas foi deixado para os matemáticos posteriores, como Cauchy, tornar claras suas idéias sobre os limites.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} \qquad \text{(pela Lei 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \qquad \text{(pelas Leis nºs 1, 2 e 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \qquad \text{(pelas Leis nºs 9, 8 e 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

NOTA ▫ Se tomarmos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo 5 em x. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Leis do Limite prova que a substi-tuição direta sempre é possível para essas funções (veja os Exercícios 53 e 54). Enunciamos esse fato a seguir.

> **Propriedade de Substituição Direta** Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções com essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como é mostrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 3 ▫ Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$, pois $f(1)$ não está definida. Nem podemos aplicar a Lei do Quociente porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

O numerador e o denominador têm um fator comum, $x - 1$. Ao tomarmos o limite quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$. Portanto, podemos cancelar o fator comum e computar o limite como se segue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

O limite, nesse caso, apareceu na Seção 2.1 quando estávamos tentando encontrar a tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

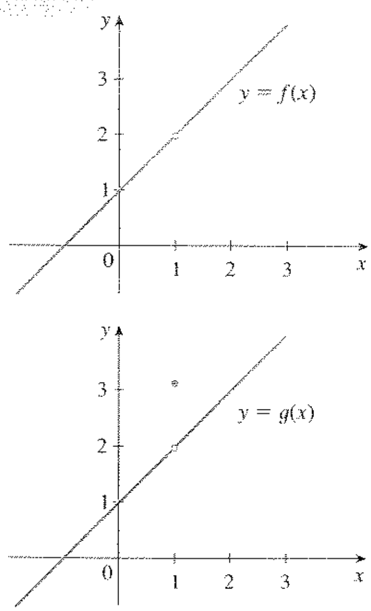


FIGURA 2
Gráficos das funções f(do Exemplo 3) e g(do Exemplo 4).

NOTA □ No exemplo 3 fomos capazes de calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite. Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$, e no cômputo de um limite quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente *igual* a 1. Em geral, se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq$ a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

EXEMPLO 4 □ Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Aqui g está definido em $x = 1$ e $g(1) = \pi$, mas o valor do limite quando x tende a 1 não depende dos valores da função em 1. Uma vez que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$ temos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Observe que os valores das funções nos Exemplos 3 e 4 são idênticos, exceto quando $x = 1$ (veja a Figura 2), e assim eles têm o mesmo limite quando x tende a 1.

EXEMPLO 5 □ Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUÇÃO Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos computar $\lim_{h \to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida. Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EXEMPLO 6 □ Encontre $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Lei do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Esse cálculo confirma a conjectura que fizemos no Exemplo 2 da Seção 2.2.

Para alguns limites é melhor calcular primeiro os limites laterais (à esquerda e à direita). O seguinte teorema é uma lembrança do que descobrimos na Seção 2.2. Dizemos que o limite bilateral existe se e somente se os limites laterais (à esquerda e à direita) existirem e forem iguais.

1 Teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Quando computamos os limites laterais, usamos o fato de que as Leis do Limite são válidas também para eles.

EXEMPLO 7 Mostre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUÇÃO Lembre-se de que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O resultado do Exemplo 7 parece plausível na Figura 3.

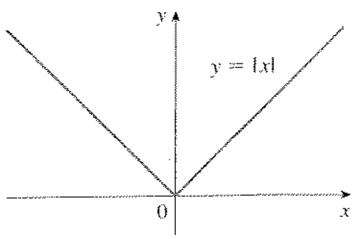


FIGURA 3

Uma vez que $|x| 5 x$ para $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, temos $|x| 5 -x$, e assim

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Portanto, pelo Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

EXEMPLO 8 Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe

SOLUÇÃO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^*} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

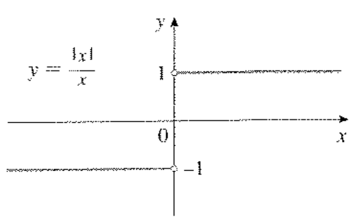


FIGURA 4

Uma vez que os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, segue do Teorema 1 que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ não existe. O gráfico da função $f(x) = |x|/x$ é mostrado na Figura 4 e sustenta o limite que encontramos.

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

Está mostrado no Exemplo 3 da Seção 2.4 que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Uma vez que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

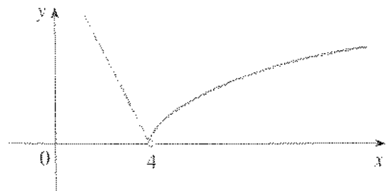


FIGURA 5

Os limites laterais (à esquerda e à direita) são iguais. Dessa forma, o limite existe e

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

O gráfico de f está mostrado na Figura 5.

EXEMPLO 10 ▫ A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro, que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe.

▫ Outras notações para $[\![x]\!]$ são $[x]$ e $\lfloor x \rfloor$.

SOLUÇÃO O gráfico da função maior inteiro está mostrado na Figura 6. Uma vez que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leq x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Uma vez que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leq x < 3$, temos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

Como esses limites laterais não são iguais, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe pelo Teorema 1.

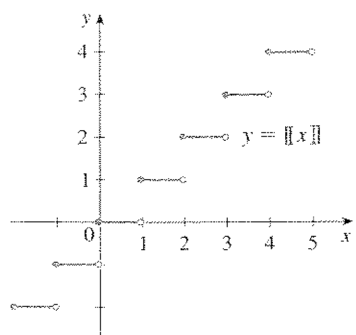


FIGURA 6
Função maior inteiro

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais de limites. Suas provas podem ser encontradas no Apêndice F.

> **2 Teorema** Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g existem quando x tende a a, então
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

> **3 Teorema do Confronto** Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$
>
> então $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

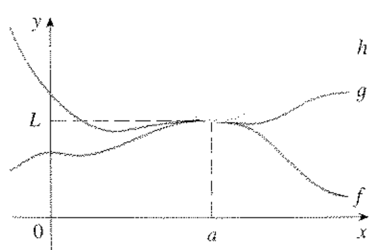


FIGURA 7

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou Teorema da Espremedura, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar espremido entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então g será forçado a ter o mesmo limite L em a.

EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Note primeiro que *não podemos* usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2). Porém, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

vamos ter, conforme está ilustrado na Figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

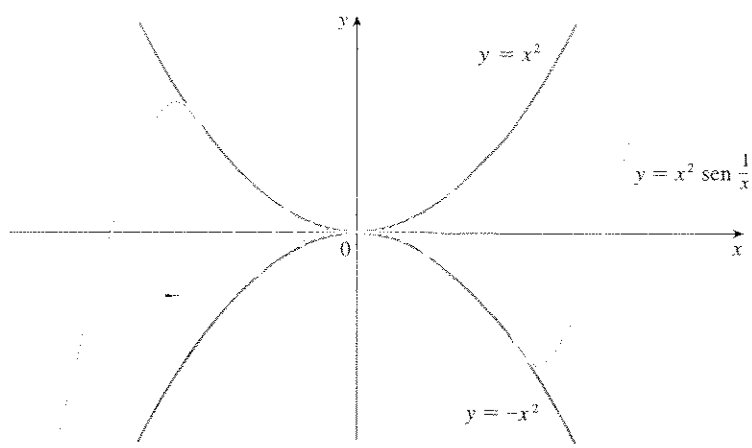


FIGURA 8

Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando-se no Teorema de Confronto $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, e $h(x) = x^2$ obtém-se

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 8$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + h(x)]$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^2$

(c) $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{h(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$

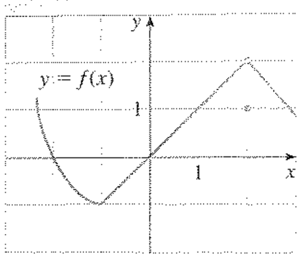
(e) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

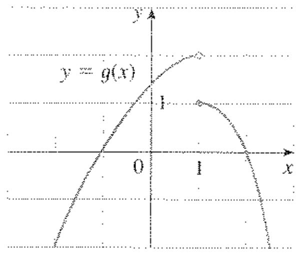
(f) $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(h) $\lim_{x \to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.





(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} x^3 f(x)$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 □ Calcule os limites justificando cada passagem pelas Leis do Limite que forem usadas.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ **4.** $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4)(x^3 + 5x - 2)$ **6.** $\lim_{t \to -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5$

7. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3$ **8.** $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–30 □ Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$ **12.** $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$ **14.** $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{x \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$ **16.** $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$ **18.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

19. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^4 - 1}{h}$ **20.** $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$ **22.** $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

23. $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$ **24.** $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

25. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$ **26.** $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$ **27.** $\lim_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$ **29.** $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$ **30.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

31. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

fazendo o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Faça uma tabela dos valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite.

(c) Use as Leis do Limite para mostrar que sua conjectura está correta.

32. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Utilize uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Leis do Limite para encontrar o valor exato do limite.

33. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$. Ilustre fazendo os gráficos na mesma tela das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 2\,\pi x$ e $h(x) = x^2$.

34. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre fazendo na mesma tela os gráficos de f, g e h (como no Teorema do Confronto).

35. Se $1 \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 2x + 2$ para todo x, encontre $\lim_{x \to -1} f(x)$.

36. Se $3x \leqslant f(x) \leqslant x^3 + 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 2$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

37. Prove que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

38. Prove que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

39–44 □ Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

39. $\lim_{x \to -4} |x + 4|$ **40.** $\lim_{x \to -4^-} \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

41. $\lim_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ **42.** $\lim_{x \to 1.5} \dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

43. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$ **44.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

45. A *função sinal*, denotada por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites que se seguem.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

46. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

(c) Esboce o gráfico de f.

47. Seja $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$

(b) Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

(c) Esboce o gráfico de F.

48. Seja

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ 8 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem, os limites.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ (v) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

(b) Esboce o gráfico de h.

49. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim\limits_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim\limits_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim\limits_{x\to -2,4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim\limits_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim\limits_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$?

50. Seja $f(x) = x - [\![x]\!]$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$

(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

51. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, mas não é igual a $f(2)$.

52. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorent

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

53. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Se r for uma função racional, use o Exercício 53 para mostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

55. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

prove que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

56. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

57. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

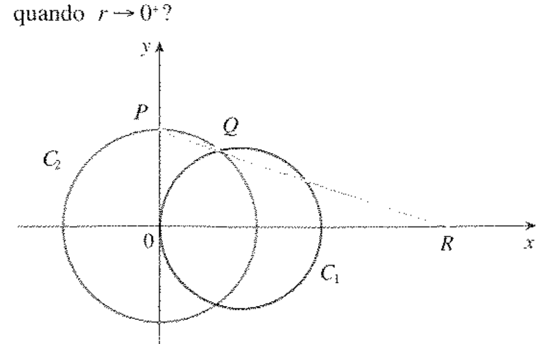
58. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

59. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

60. A figura mostra um círculo fixo C_1 com equação $(x - 1)^2 + y^2 =$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de interseção superior dos dois círculos, e R é o ponto de interseção da reta PQ com eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 encolher, isto é, quando $r \to 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois as frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de provar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0{,}0001 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

devemos dar a definição precisa de limite.

Para motivar a definição precisa de limite, vamos considerar a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Isso é intuitivamente claro quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5, e sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

☐ É tradicional usar-se a letra grega δ (delta) nessa situação.

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$, portanto, uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Note que se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0{,}1$$

isto é, $$|f(x) - 5| < 0{,}1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então usando o mesmo método achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

Analogamente,

$$|f(x) - 5| < 0{,}001 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < 0{,}0005$$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001, anteriormente considerados, são chamados *erros de tolerância* (ou simplesmente *tolerância*) que podemos admitir. Para que o número 5 seja precisamente o limite de $f(x)$, quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre $f(x)$ e o 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de tornar a diferença menor que *qualquer* número positivo. E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε (a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

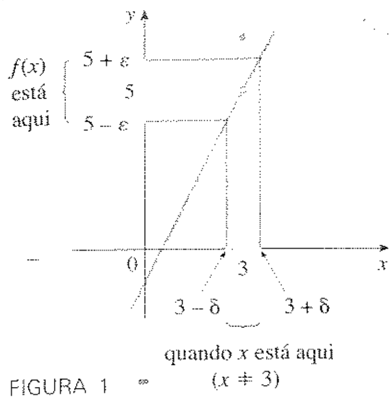


FIGURA 1

$$\boxed{1} \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois (1) diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).

Note que (1) pode ser reescrito como

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \qquad (x \neq 3)$$

e isso está ilustrado na Figura 1. Tomando os valores de x ($\neq 3$) para dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando (1) como um modelo, vamos dar uma definição precisa de limite.

> $\boxed{2}$ **Definição** Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> $$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Outra maneira de escrever a última linha dessa definição é

$$\boxed{\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de um limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L pode ser arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não 0).

Alternativamente,

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos tomando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Podemos também reformular a Definição 2 em termos de intervalos observando que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Também $0 < |x - a|$ é válida se e somente se $x - a \neq 0$, isto é, $x \neq a$. Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a Definição 2 pode ser enunciada como a seguir:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno for ε) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Vamos interpretar geometricamente essa definição representando a função por um diagrama de flechas, como na Figura 2, onde f leva um subconjunto de $\mathbb{R}$ em outro subconjunto de $\mathbb{R}$.

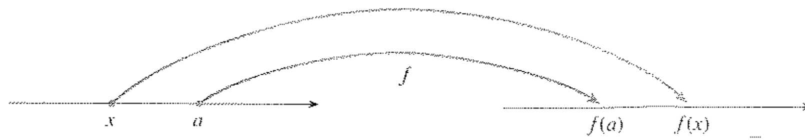


FIGURA 2

A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que f leva todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente em a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)

FIGURA 3

Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então traçamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e o gráfico de f (veja a Figura 4). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e tomarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (veja a Figura 5). Você pode ver que se δ tiver sido encontrado, então qualquer δ menor também funcionará.

É importante compreender que o processo ilustrado nas Figuras 4 e 5 deve funcionar para *todo* número positivo ε independentemente de quão pequeno ele seja. A Figura 6 mostra que se um ε menor for escolhido, então será necessário um δ menor.

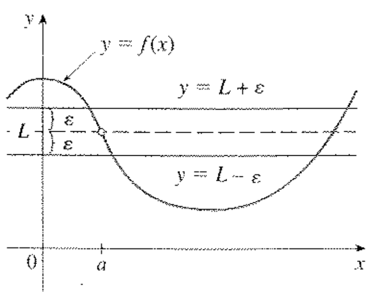


FIGURA 4

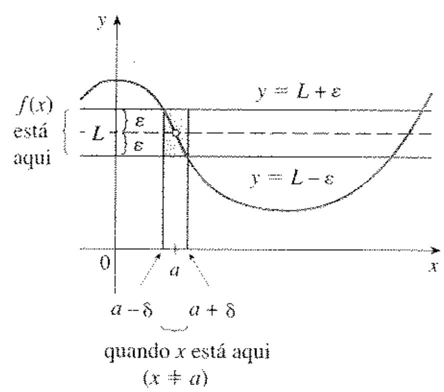


FIGURA 5

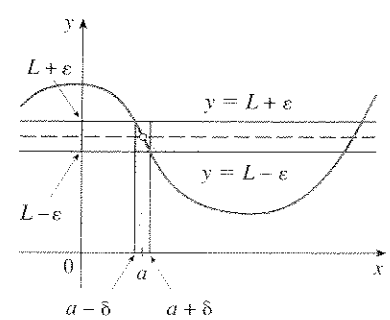


FIGURA 6

EXEMPLO 1 □ Use um gráfico para achar um número δ tal que

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2 \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 1| < \delta$$

Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0{,}2$ na definição de limite de uma função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.

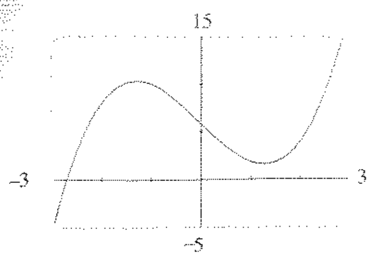


FIGURA 7

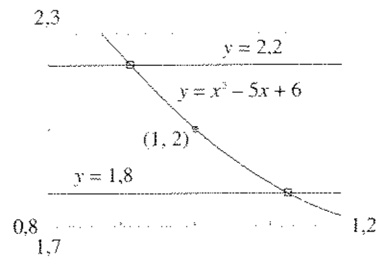


FIGURA 8

SOLUÇÃO Um gráfico de f é mostrado na Figura 7, e estamos interessados na região próxima do ponto (1, 2). Note que podemos reescrever a desigualdade

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0,2$$

como $$1,8 < x^3 - 5x + 6 < 2,2$$

Assim, precisamos determinar os valores de x para os quais a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre as retas horizontais $y = 1,8$ e $y = 2,2$. Portanto, vamos fazer o gráfico das curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1,8$ e $y = 2,2$ próximo do ponto (1, 2) na Figura 8. Então usamos o cursor para estimar que a coordenada x do ponto de interseção da reta $y = 2,2$ com a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está em torno de 0,911. Analogamente, $y = x^3 - 5x + 6$ intersecta a reta $y = 1,8$ quando $x \approx 1,124$. Logo, arredondando-se, por segurança, podemos afirmar que

$$1,8 < x^3 - 5x + 6 < 2,2 \qquad \text{sempre que} \qquad 0,92 < x < 1,12$$

Esse intervalo (0,92, 1,12) não é simétrico em torno de $x = 1$. A distância de $x = 1$ até o ponto extremo à esquerda é $1 - 0,92 = 0,08$, e a distância até o ponto do extremo direito é 0,12. Podemos escolher δ como o menor desses números, isto é, $\delta = 0,08$. Então podemos reescrever nossas desigualdades em termos de distâncias da seguinte forma:

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0,2 \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 1| < 0,08$$

Isso somente nos diz que, mantendo x dentro de uma distância de 0,08 de 1, somos capazes de obter $f(x)$ dentro de uma distância de 0,2 de 2.

Embora tenhamos escolhido $\delta = 0,08$, qualquer valor menor positivo de δ poderia também ter funcionado.

O procedimento gráfico do Exemplo 1 dá uma ilustração da definição para $\varepsilon = 0,2$, mas não *prova* que o limite é igual a 2. Uma prova deve fornecer um δ para *cada* ε.

Ao provar as questões sobre os limites, pode ser proveitoso imaginar a definição de limite como um desafio. Primeiro ele o desafia com um número ε. Então você deve ser capaz de obter um δ adequado. Você deve ser capaz de fazer isso para *todo* $\varepsilon > 0$, e não somente para um particular valor de ε.

Imagine uma competição entre duas pessoas, A e B, e suponha que você seja B. A pessoa A estipula que o número fixo L deverá ser aproximado por valores de $f(x)$ dentro de um grau de precisão ε (digamos 0,01). O indivíduo B então responde encontrando um número δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Nesse caso, A pode tornar-se mais exigente e desafiar B com um valor menor de ε (digamos, 0,0001). Novamente, B deve responder encontrando um δ correspondente. Em geral, quanto menor for o valor de ε, menor será o correspondente valor de δ. Se B vencer sempre, não importando quão menor A faça ε, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EXEMPLO 2 ◻ Prove que $\lim\limits_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUÇÃO

1. *Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor para δ).* Seja ε um número positivo dado. Devemos achar um número δ tal que

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Mas $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Portanto, queremos

$$4|x - 3| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

isto é, $\quad |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4} \quad$ sempre que $\quad 0 < |x - 3| < \delta$

Isso sugere que poderíamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

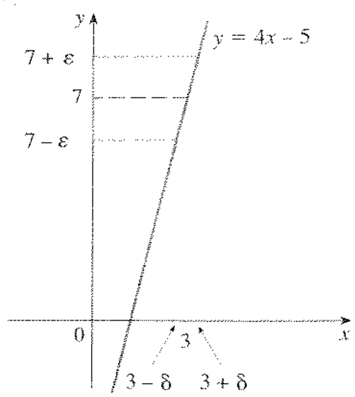


FIGURA 9

2. *Prova (mostrando que a escolha de δ funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Assim

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este exemplo está ilustrado na Figura 9.

Observe que na solução do Exemplo 2 havia dois estágios – conjecturando e provando. Fizemos uma análise preliminar que nos capacitou conjecturar um valor para δ. Então em um segundo estágio tivemos de voltar e provar cuidadosamente de forma lógica que fizemos uma conjectura correta. Esse procedimento é típico da boa parte da matemática. Por vezes é necessário primeiro fazer uma conjectura inteligente sobre a resposta de um problema e então provar que a conjectura é correta.

As definições intuitivas de limites laterais dadas na Seção 2.2 podem ser reformuladas precisamente da seguinte forma.

3 Definição de Limite Esquerdo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad a - \delta < x < a$$

4 Definição de Limite Direito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad a < x < a + \delta$$

Note que a Definição 3 é igual à Definição 2, exceto que x está restrito a ficar na metade *esquerda* $(a - \delta, a)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Na Definição 4, x está restrito a ficar na metade *direita* $(a, a + \delta)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EXEMPLO 3 □ Use a Definição 4 para provar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Cauchy e os Limites

Após a invenção do cálculo, no século XVII, seguiu-se um período de livre desenvolvimento do assunto, no século XVIII. Matemáticos como os irmãos Bernoulli e Euler estavam ansiosos por explorar o poder do cálculo, e exploraram audaciosamente as conseqüências dessa encantadora e nova teoria matemática sem grandes preocupações com a veracidade e correção de suas provas.

O século XIX, ao contrário, foi a Época do Rigor na matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto – para fornecer definições cuidadosas e provas rigorosas. Na linha de frente desse movimento estava o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que começou como engenheiro militar antes de se tornar professor de matemática em Paris. Cauchy pegou a idéia de limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d'Alembert, e tornou-a mais precisa. Sua definição de limite tem a seguinte forma: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, esse último é chamado *limite* de todos os outros". Mas quando Cauchy usava essa definição em exemplos e provas, ele freqüentemente empregava as desigualdades delta-épsilon similares às desta seção. Uma demonstração típica de Cauchy começa com: "Designando por δ e ε dois números muito pequenos...". Ele usou ε em virtude de uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa *erreur*. Mais tarde o matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) estabeleceu a definição de limite exatamente como nossa Definição 2.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Seja ε um número positivo dado. Aqui $a = 0$ e $L = 0$; logo, queremos achar um número δ tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta$$

isto é,
$$\sqrt{x} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta$$

ou, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtemos

$$x < \varepsilon^2 \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta$$

Isso sugere que devemos escolher $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Mostrando que esse* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < x < \delta$, então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

logo
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Conseqüentemente, pela Definição 4, isso mostra que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

EXEMPLO 4 Prove que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Dado $\varepsilon > 0$. Temos de achar um número $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Para conectar $|x^2 - 9|$ com $|x - 3|$ escrevemos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Nesse caso, queremos

$$|x + 3||x - 3| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Note que se pudermos achar uma constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, então

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

e podemos fazer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos achar esse número C se restringirmos x a algum intervalo centrado em 3. De fato, uma vez que estamos interessados apenas em valores de x que estão próximos de 3, é razoável supor que x está dentro de uma distância 1 de 3, isto é, $|x - 3| < 1$. Então $2 < x < 4$, logo $5 < x + 3 < 7$. Assim, temos $|x + 3| < 7$; logo, $C = 7$ é uma escolha conveniente para a constante.

Mas agora há duas restrições sobre $|x - 3|$, isto é

$$|x - 3| < 1 \quad \text{e} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para ter certeza de que ambas as desigualdades estão satisfeitas, tomemos δ como o menor dos dois números 1 e $\varepsilon/7$. A notação para isso é $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Mostrando que esse* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como na parte 1). Temos também $|x - 3| < \varepsilon/7$, logo

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Isso mostra que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

O Exemplo 4 mostra que nem sempre é fácil provar que são verdadeiras as proposições com limite usando a definição de ε, δ. De fato, se nos fosse dada uma função mais complicada, como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, isso iria requerer uma grande dose de engenhosidade. Felizmente isso é desnecessário, pois as Leis do Limite dadas na Seção 2.3 podem ser provadas usando-se a Definição 2, e então os limites das funções complicadas podem ser encontrados rigorosamente a partir das Leis do Limite sem recorrer diretamente à definição.

Por exemplo, provamos a Lei da Soma: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ existem, então

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

As leis restantes estão provadas nos exercícios e no Apêndice F.

□ Desigualdade triangular:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Veja o Apêndice A.)

Prova da Lei da Soma Dado $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Usando a desigualdade triangular podemos escrever

$$\boxed{5} \qquad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Podemos fazer $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε tornando cada um dos termos $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ menor que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\varepsilon/2 > 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Note que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

logo $$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Conseqüentemente, por (5),

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Resumindo,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Assim, pela definição de limite,

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Limites Infinitos

Os limites infinitos podem também ser definidos de uma maneira precisa. A seguir apresenta-se uma versão precisa da Definição 4 da Seção 2.2.

6 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M há um número positivo correspondente δ tal que

$$f(x) > M \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

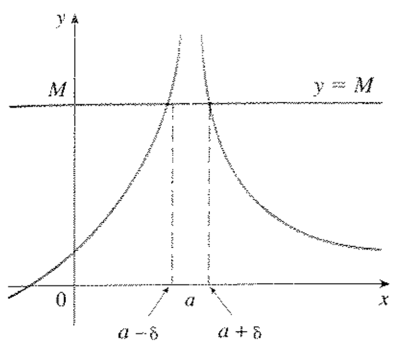


FIGURA 10

Isso diz que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M) tomando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ, onde δ depende de M, mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na Figura 10.

Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$. Você pode ver que se um M muito grande for escolhido, então um δ muito pequeno poderá ser necessário.

EXEMPLO 5 Use a Definição 6 para provar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando sobre um valor para* δ. Dado $M > 0$, queremos achar um $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 0| < \delta$$

isto é,

$$x^2 < \frac{1}{M} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x| < \delta$$

ou

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x| < \delta$$

Isso sugere que devemos tomar $\delta = 1/\sqrt{M}$.

2. *Mostrando que esse* δ *funciona*. Se $M > 0$ for dado, seja $\delta = 1/\sqrt{M}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então

$$|x| < \delta \;\Rightarrow\; x^2 < \delta^2$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

Assim

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 0| < \delta$$

Portanto, pela Definição 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

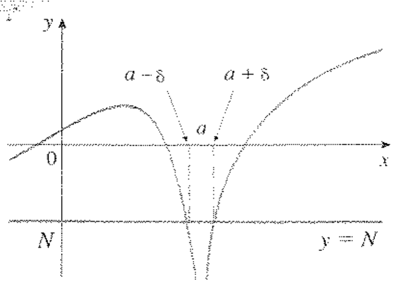


FIGURA 11

Analogamente, a seguir é apresentada uma versão precisa da Definição 5 da Seção 2.2, ilustrada pela Figura 11.

7 Definição Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N há um número positivo correspondente δ tal que

$$f(x) < N \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

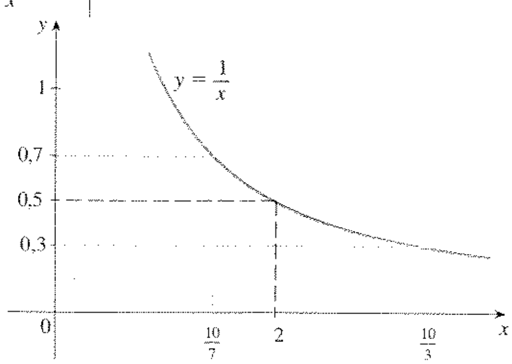
2.4 Exercícios

1. Quão próximo de 2 devemos tomar x para que $5x + 3$ esteja a uma distância de 13 menor que (a) 0,1 e (b) 0,01?

2. Quão próximo de 5 devemos tomar x para que $6x - 1$ esteja a uma distância de 29 menor que (a) 0,01, (b) 0,001 e (c) 0,0001?

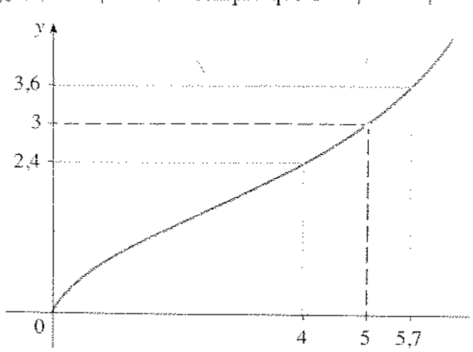
3. Use o gráfico dado de $f(x) = 1/x$ para encontrar um número δ tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2 \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 2| < \delta$$



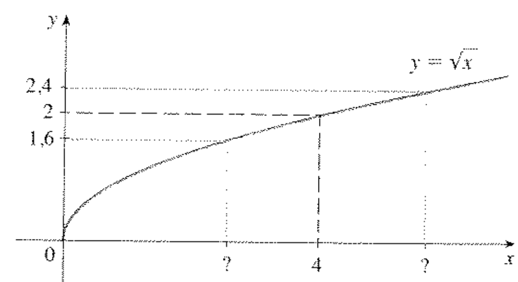
4. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

$$|f(x) - 3| < 0{,}6 \quad \text{sempre que } 0 < |x - 5| < \delta$$



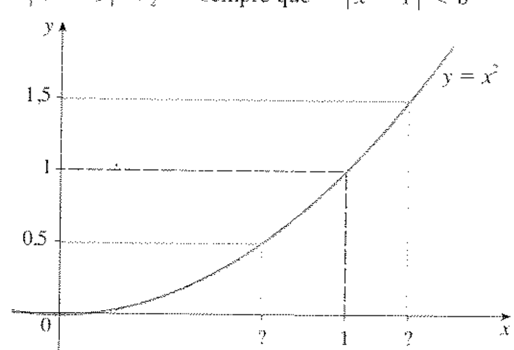
5. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que

$$|\sqrt{x} - 2| < 0{,}4 \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 4| < \delta$$



6. Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que

$$|x^2 - 1| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 1| < \delta$$



7. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$|\sqrt{4x + 1} - 3| < 0{,}5 \qquad \text{sempre que} \qquad |x - 2| < \delta$$

8. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$|\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}| < 0{,}1 \qquad \text{sempre que} \qquad \left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta$$

9. Para o limite
$$\lim_{x\to 1}(4 + x - 3x^3) = 2$$
ilustre a definição encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

10. Para o limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$
ilustre a definição encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

11. Use o gráfico para encontrar um número δ tal que
$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} > 100 \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta$$

12. Para o limite
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{cotg}^2 x = \infty$$
ilustre a definição encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 100$ e (b) $M = 1.000$.

13. Um torneiro mecânico é necessário para fabricar um disco de metal circular com área de 1.000 cm².
(a) Qual o raio do disco produzido?
(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância de erro de ± 5 cm² na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?
(c) Em termos da definição de ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

14. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se à entrada da potência. Suponha que a relação seja dada por
$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$
onde T é a temperatura em graus Celsius e w, a potência de entrada em watts.
(a) Qual a potência necessária para manter a temperatura a 200 °C?
(b) Se for permitida uma variação de ± 1 °C a partir dos 200 °C, qual será a imagem da potência permitida para a entrada?
(c) Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

15-18 □ Prove cada proposição usando a definição ε, δ de limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

15. $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$

16. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x+3\right) = 2$

17. $\lim_{x\to -3}(1-4x) = 13$

18. $\lim_{x\to 4}(7-3x) = -5$

19-32 □ Prove cada proposição usando a definição ε, δ de limite.

19. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

20. $\lim_{x\to 6}\left(\frac{x}{4}+3\right) = \frac{9}{2}$

21. $\lim_{x\to -5}\left(4 - \frac{3x}{5}\right) = 7$

22. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3} = 7$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

28. $\lim_{x\to 9^-}\sqrt[4]{9-x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 3}(x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$ é outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4.

34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9+\varepsilon} - 3$.

35. (a) Para o limite $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para determinar o valor do δ correspondente a $\varepsilon = 0{,}4$.
(b) Usando um sistema algébrico computacional para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o valor possível para δ que corresponde a qualquer $\varepsilon > 0$ dado.
(c) Tome $\varepsilon = 0{,}4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).

36. Prove que $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. Prove que $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$.
$$\left[\textit{Sugestão}: \text{Use } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.\right]$$

38. Se H for a função de Heaviside definida no Exemplo 6 da Seção 2.2, prove, usando a Definição 2, que $\lim_{t\to 0} H(t)$ não existe. [*Dica*: Use uma prova indireta. Suponha que o limite seja L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar em uma contradição.]

39. Se a função f for definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$
prove que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, prove o Teorema 1 da Seção 2.3.

41. Quão próximo de -3 devemos tomar x para que
$$\frac{1}{(x+3)^4} > 10.000$$

42. Prove, usando a Definição 6, que $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4} = \infty$.

43. Prove que $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.

44. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é um número real. Prove cada proposição
(a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$
(b) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty$ se $c > 0$
(c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$ se $c < 0$

2.5 Continuidade

Notamos na Seção 2.3 que o limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando-se o valor da função em a. As funções com essa propriedade são chamadas *contínuas em a*. Veremos que a definição matemática de continuidade corresponde estreitamente ao significado da palavra *continuidade* na linguagem do dia-a-dia. (O processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)

1 Definição Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

□ Como ilustrado na Figura 1, se f for contínua, então, sobre o gráfico de f, os pontos $(x, f(x))$ tendem ao ponto $(a, f(a))$ sobre o gráfico. Logo não há buraco na curva.

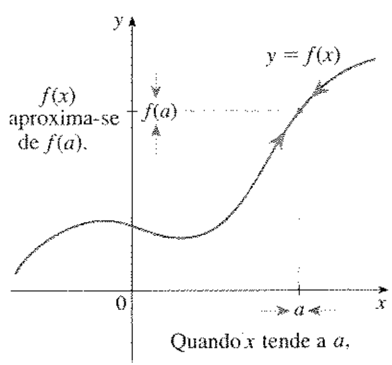


FIGURA 1

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tender a $f(a)$ quando x aproxima-se de a. Assim, uma função contínua f tem a propriedade que uma pequena variação em x produza apenas uma pequena modificação em $f(x)$. De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos mantendo a variação em x suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é **descontínua em a**, ou que f tem uma **descontinuidade** em a, se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo varia continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas a descontinuidade ocorre em situação tal como a corrente elétrica. [Veja o Exemplo 6 da Seção 2.2, onde a função de Heaviside é descontínua em 0, pois $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.]

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como sendo uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

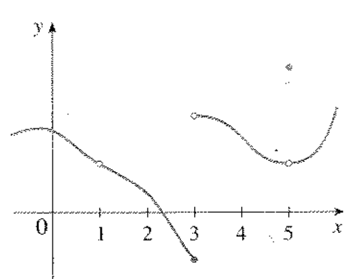


FIGURA 2

EXEMPLO 1 □ A Figura 2 mostra o gráfico de uma função f. Em quais números f é descontínua? Por quê?

SOLUÇÃO Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um buraco. A razão reconhecida para f ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.

O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe (pois o limite esquerdo e o direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

E sobre $a = 5$? Aqui $f(5)$ está definida, e $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo f é descontínua em 5.

Agora vamos ver como detectar as descontinuidades quando uma função está definida por uma fórmula.

EXEMPLO 2 Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUÇÃO

(a) Note que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2. Mais à frente veremos por que f é contínua em todos os demais números.

(b) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe (veja o Exemplo 8 da Seção 2.2). Logo f é descontínua em 0.

(c) Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$$

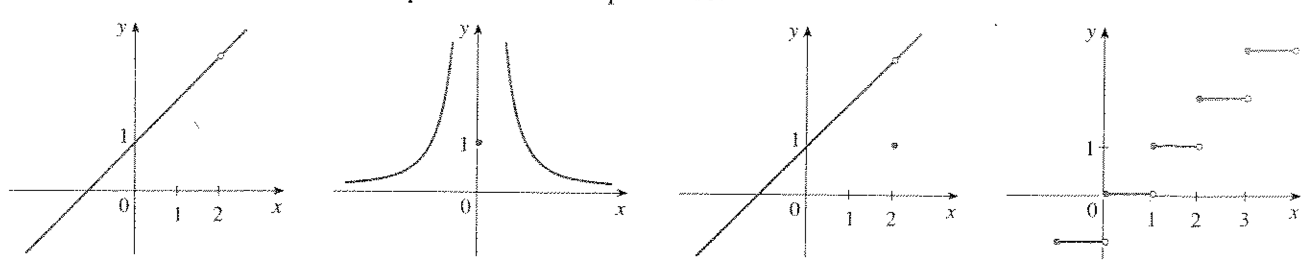
existe. Porém

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

logo, f não é contínua em 2.

(d) A função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se n for um inteiro (veja o Exemplo 10 e o Exercício 49 da Seção 2.3).

A Figura 3 mostra o gráfico das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou pulo ocorrem no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis**, pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua.] A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**. As descontinuidades da parte (d) são ditas **pulos de descontinuidades**, porque a função "pula" de um valor para outro.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3 Gráficos das funções do Exemplo 2

> **2 Definição** Uma função f é **contínua à direita de um número** a se
>
> $$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
>
> e f é **contínua à esquerda de** a se
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EXEMPLO 3 □ Em cada inteiro n, a função $f(x) = f\,[\![x]\!]$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

mas

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

> **3 Definição** Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado do extremo do intervalo, entendemos *continuidade* no extremo como *continuidade à direita ou à esquerda*.)

EXEMPLO 4 □ Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

SOLUÇÃO Se $-1 < a < 1$, então, usando as Leis do Limite, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(pelas Leis n}^{\underline{\text{os}}}\text{ 2 e 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(pela Lei n}^{\underline{\text{o}}}\text{ 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(pelas Leis n}^{\underline{\text{os}}}\text{ 2, 7 e 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

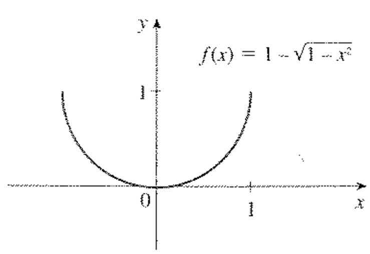


FIGURA 4

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1. Conseqüentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + f(y - 1)^2 = 1$$

Em lugar de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função como feito no Exemplo 4, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir das simples.

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções são contínuas, também, em a:

1. $f+g$ **2.** $f-g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Prova Cada uma das cinco partes desse teorema segue da correspondente Lei do Limite da Seção 2.3. Por exemplo, vamos dar a prova da parte 1. Uma vez que f e g são contínuas em a, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f+g)(x) &= \lim_{x \to a}[f(x)+g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(pela Lei nº 1)} \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a) \end{aligned}$$

Isso mostra que $f+g$ é contínua em a.

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se f e g forem contínuas em um intervalo, então $f+g, f-g, cf, fg$ e (se g nunca for 0) f/g também o são. O seguinte teorema foi enunciado na Seção 2.3 como a Propriedade da Substituição Direta.

5 Teorema
(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

Prova
(a) Um polinômio é uma função da forma

$$P(x) = c_n x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(pela nº Lei 7)}$$

e
$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(pela nº Lei 9)}$$

Essa equação é precisamente a informação de que a função $f(x) = x^m$ é uma função contínua. Assim, pela parte 3 do Teorema 4, a função $g(x) = cx^m$ é contínua. Uma vez que P é a soma das funções desta forma e uma função constante, segue-se da parte 1 do Teorema 4 que P é contínua.

(b) Uma função racional é uma função da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$. Sabemos, da parte (a), que P e Q são contínuos em toda a parte. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todo o número em D. □

Como uma ilustração do Teorema 5, observe que o volume de uma esfera varia continuamente com seu raio, pois a fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ a mostra que V é uma função polinomial de r. Da mesma forma, se uma bola for atirada verticalmente no ar com uma velocidade de 50 pés/s, então a altura da bola em pés após t segundos é dada pela fórmula $h = 50t - 16t^2$. Novamente, essa é uma função polinomial, portanto a altura é uma função contínua do tempo decorrido.

O conhecimento de quais funções são contínuas nos capacita a calcular muito rapidamente alguns limites, como os dos exemplos a seguir. Compare-os com o Exemplo 2(b) da Seção 2.3.

EXEMPLO 5 □ Encontre $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUÇÃO A função

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

é racional; assim, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Portanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$
$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$ □

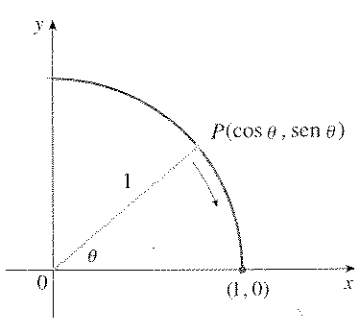


FIGURA 5

□ Outra forma de estabelecer os limites em (6) é fazer uso do Teorema do Confronto com a desigualdade sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que está provado na Seção 3.4.

Isso resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios. Por exemplo, a Lei do Limite 10 implica que as funções raízes são contínuas. (O Exemplo 3 da Seção 2.4 mostra que $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua à direita de 0.)

Da forma dos gráficos das funções seno e cosseno (Figura 18 da Seção 1.2) iríamos certamente conjecturar que elas são contínuas. Sabemos das definições de sen θ e cos θ que as coordenadas do ponto P na Figura 5 são (cos θ, sen θ). À medida que $\theta \to 0$, vemos que P tende ao ponto $(1, 0)$ e, portanto, cos $\theta \to 1$ e sen $\theta \to 0$. Assim,

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Uma vez que cos 0 = 1 e sen 0 = 0, as equações em (6) asseguram que as funções seno e cosseno são contínuas em 0. As fórmulas de adição para seno e cosseno podem, então, ser usadas para deduzir que essas funções são contínuas em toda a parte (veja os Exercícios 56 e 57).

Segue da parte 5 do Teorema 4 que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua, exceto onde $\cos x = 0$. Isso acontece quando x é um múltiplo inteiro ímpar d $\pi/2$, portanto $y = \text{tg}\, x$ tem descontinuidades infinitas quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, e assir por diante (veja a Figura 6).

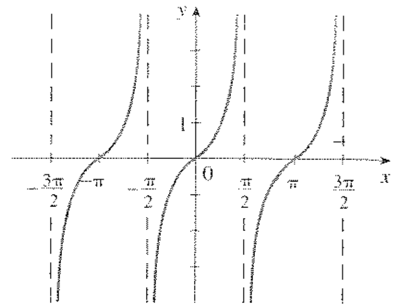


FIGURA 6
$y = \text{tg}\, x$

□ As funções trigonométricas inversas foram revistas na Seção 1.6.

A função inversa de qualquer função contínua é também contínua. (O gráfico de f^{-1} obtido refletindo o de f em torno da reta $y = x$. Portanto, se o gráfico de f não tiver quebr isso também acontecerá com o de f^{-1}.) Assim sendo, as funções trigonométricas inversa são contínuas.

Na Seção 1.5 definimos a função exponencial $y = a^x$ de forma a preencher os buraco no gráfico de $y = a^x$, onde x é racional. Em outras palavras, a própria definição de $y = a$ torna-a uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, sua função inversa $y = \log_a x$ é contínu em $(0, \infty)$.

[7] Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas em todo o número de seus domínios:

polinômio	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

EXEMPLO 6 □ Onde a função $f(x) = \dfrac{\ln x + \text{tg}^{-1} x}{x^2 - 1}$ é contínua?

SOLUÇÃO Sabemos do Teorema 7 que a função $y = \ln x$ é contínua para $x > 0$ e que $y = \text{tg}^{-1} x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, pela parte 1 do Teorema 4, $y = \ln x + \text{tg}^{-1} x$ é contínua em $(0, \infty)$. O denominador $y = x^2 - 1$ é um polinômio, portanto é contínuo em toda a parte. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todos os números positivos x, exceto onde $x^2 - 1 = 0$. Logo, f é contínua nos intervalos abertos $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínua é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma conseqüência do seguinte teorema.

□ Esse teorema afirma que um símbolo de limite pode ser movido por meio de um símbolo de função se ela for contínua e se o limite existir. Em outras palavras, a ordem desses dois símbolos pode ser revertida.

[8] Teorema Seja f contínua em b e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$
Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Intuitivamente esse teorema é razoável, pois se x estiver próximo de a, então $g(x)$ estará próximo de b; e como f é contínua em b, se $g(x)$ estiver próximo de b, então $f(g(x))$ estará próximo de $f(b)$. Uma prova do Teorema 8 está dada no Apêndice F.

EXEMPLO 7 □ Calcule $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUÇÃO Uma vez que arcsen é uma função contínua, podemos aplicar o Teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Teorema 8 no caso especial onde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo. Então

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

e

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Se colocarmos essas expressões no Teorema 8 obteremos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

e assim a Lei do Limite 11 foi provada. (Pressupomos que a raiz exista.)

9 Teorema Se g for contínua em a e f em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Esse teorema é com freqüência expresso informalmente como se segue: "Uma função contínua de uma função contínua é uma função contínua".

Prova Uma vez que g é contínua em a, temos

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Uma vez que f é contínua em $b = g(a)$, podemos aplicar o Teorema 8 para obter

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que é precisamente a afirmação de que a função $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a; isto é, $f \circ g$ é contínua em a. □

EXEMPLO 8 Onde as seguintes funções são contínuas?

(a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUÇÃO

(a) Temos que $h(x) = f(g(x))$, onde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \text{sen}\, x$$

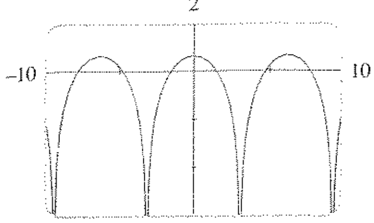


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Agora g é contínua em $\mathbb{R}$, pois trata-se de um polinômio, e f também é contínua em toda a parte. Assim, $h = f \circ g$ é contínua em $\mathbb{R}$ pelo Teorema 9.

(b) Sabemos do Teorema 7 que $f(x) = \ln x$ é contínua e $g(x) = 1 + \cos x$ é contínua (pois ambas, $y = 1$ e $y = \cos x$, são contínuas). Portanto, pelo Teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ é contínua onde está definida. Agora $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$. Dessa forma, não está definida quando $\cos x = -1$, e isso acontece quando $x = \pm\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$. Logo, F tem descontinuidades quando x é um múltiplo ímpar de π e é contínua nos intervalos entre esses valores (veja a Figura 7).

Uma propriedade importante das funções contínuas está expressa pelo teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em textos mais avançados de cálculo.

> **10 Teorema do Valor Intermediário** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores funcionais $f(a)$ e $f(b)$. Isso está ilustrado na Figura 8. Note que o valor N pode ser assumido uma vez [como na parte (a)] ou mais [como na parte (b)].

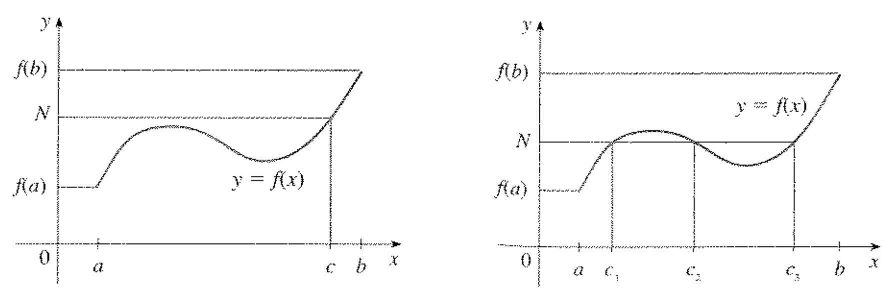


FIGURA 8 (a) (b)

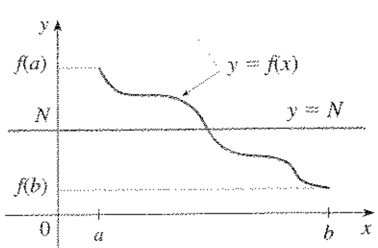


FIGURA 9

Se pensarmos em uma função contínua como aquela cujo gráfico não tem nem buracos nem quebras, então é fácil acreditar que o Teorema do Valor Intermediário é verdadeiro. Em termos geométricos, ele estabelece que se for dada uma reta horizontal qualquer $y = N$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como na Figura 9, então o gráfico de f não poderá pular sobre a reta – ele precisará interceptar $y = N$ em algum ponto.

É importante que a função f do Teorema 10 seja contínua. O Teorema do Valor Intermediário não é verdadeiro em geral para as funções descontínuas (veja o Exercício 44).

Uma das aplicações do Teorema do Valor Intermediário é a localização das raízes de equações, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 9 □ Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Portanto, tomamos $a = 1$, $b = 2$ e $N = 0$ no Teorema 10. Temos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = > 0$$

Assim $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$. Como f é contínua uma vez que é um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário estabelece que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $(1, 2)$.

De fato, podemos localizar mais precisamente a raiz usando novamente o Teorema do Valor Intermediário. Uma vez que

$$f(1{,}2) = -0{,}128 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}3) = 0{,}548 > 0$$

uma raiz deve estar entre 1,2 e 1,3. Uma calculadora fornece, por tentativa e erro,

$$f(1{,}22) = -0{,}007008 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}23) = -0{,}056068 > 0$$

assim, uma raiz está no intervalo $(1{,}22, 1{,}23)$.

Podemos usar uma calculadora gráfica ou computador para ilustrar o uso do Teorema do Valor Intermediário no Exemplo 9. A Figura 10 mostra o gráfico de f em uma janela de inspeção $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, e você pode ver o gráfico cruzando o eixo x entre 1 e 2. A Figura 11 mostra o resultado de se aplicar o *zoom*, obtendo a janela de inspeção $[1{,}2, 1{,}3]$ por $[-0{,}2, 0{,}2]$.

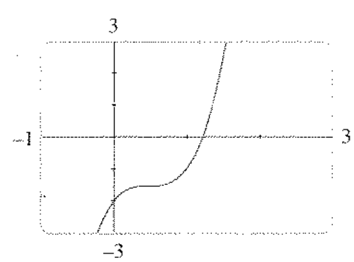


FIGURA 10

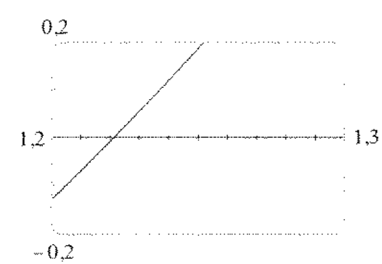


FIGURA 11

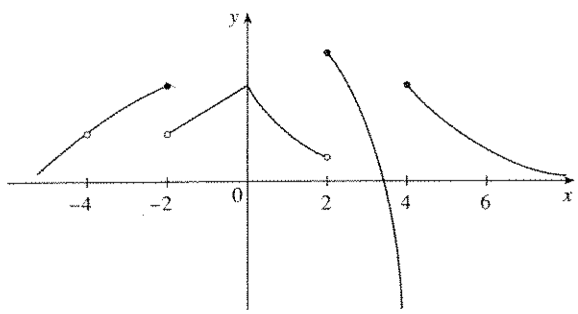
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar desses instrumentos gráficos. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e liga os pixels que contêm os pontos calculados; ele pressupõe que a função é contínua e liga todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels ligando os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

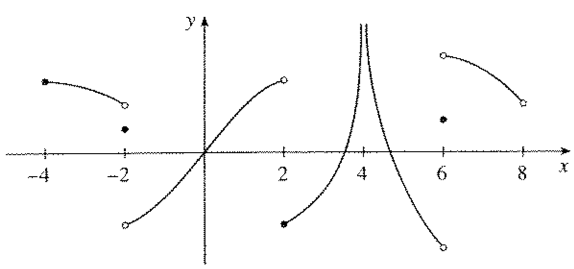
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, estabeleça os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
   (b) Para cada um dos números estabelecidos na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, estabeleça os intervalos nos quais g é contínua.



5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda a parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha um salto de descontinuidade em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas é contínua no restante.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora, ou parte dela, e \$ 2 por hora sucessiva, ou parte, até o máximo de \$ 10.
   (a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.
   (b) Discuta as descontinuidades da função e sua significância para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo
   (b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova York
   (c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova York
   (d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida
   (e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 □ Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para provar que a função é contínua em um dado número.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x},\ a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $g(x) = \dfrac{x+1}{2x^2-1}, \quad a = 4$

13–14 □ Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2},\ (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3-x},\ (-\infty, 3]$

15–20 □ Explique por que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função.

15. $f(x) = \ln|x-2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 \text{ se } x = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} & \text{se } x \neq -3 \\ -5 & \text{se } x = -3 \end{cases} \qquad a = -3$

20. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21–28 □ Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Estabeleça o domínio.

21. $F(x)=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$

22. $G(x)=\sqrt[3]{x}\left(1+x^3\right)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x-1}$

24. $h(x)=\dfrac{\text{sen}\, x}{x+1}$

25. $f(x) = e^x \text{ sen } 5x$

26. $F(x) = \text{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln (t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 □ Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\text{tg}^2 x)$

31–34 □ Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

32. $\lim\limits_{x\to\pi} \text{sen}(x + \text{sen}\, x)$

33. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-x}$

34. $\lim\limits_{x\to 2} \text{arctg}\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

35–36 □ Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

37–39 □ Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2-x & \text{se } 0 \leqslant x\, \tilde{\text{N}} \\ (x-2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2-x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

40. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} \text{csc} + 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ \text{csc}^2 - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

42. Encontre a constante c que torna g contínua em $(-\infty, \infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & \text{se } x < 4 \\ \text{csc}^2 + 20 & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

43. Quais as seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que é igual a f para $x \neq a$ e é contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$, $a = -2$

(b) $f(x)=\dfrac{x-7}{|x-7|}$, $a = 7$

(c) $f(x)=\dfrac{x^3+64}{x+4}$, $a = -4$

(d) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$, $a = 9$

44. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicado que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f pode satisfazer a mesma conclusão. (Mesmo que não satisfaça as hipóteses.)

45. Se $f(x) = x^3 - x^2 + x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 10$.

46. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número c positivo tal que seu quadrado é igual a $c^2 = 2$. (Isso prova a existência do número $\sqrt{2}$.)

47–50 □ Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$

49. $\cos x = x$, $(0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}$, $(1, 2)$

51–52 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar o intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

51. $e^x = 2 - x$

52. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

53–54 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use recursos gráficos para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

53. $x^5 - x^2 - 4 = 0$

54. $\sqrt{x-5} = \dfrac{1}{x+3}$

55. Prove que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

56. Para provar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x\to a} \text{sen}\, x = \text{sen}\, a$ para todo número real a. Pelo Exercício 55 uma afirmativa equivalente é que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Use (6) para mostrar que isso é verdadeiro.

57. Prove que o cosseno é uma função contínua.

58. (a) Prove a parte 3 do Teorema 4.

(b) Prove a parte 5 do Teorema 4.

59. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

60. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

61. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

62. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda a parte.

(b) Prove que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também é.

(c) O inverso da afirmativa da parte (b) também é verdadeiro? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também é? Se for assim, prove isso. Caso contrário, encontre um contra-exemplo.

63. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Nas Seções 2.2 e 2.4 estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (em módulo). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (em módulo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar por analisar o comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x fica grande. A tabela ao lado fornece os valores dessa função corretos até a sexta casa decimal, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	−1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1.000	0,999998

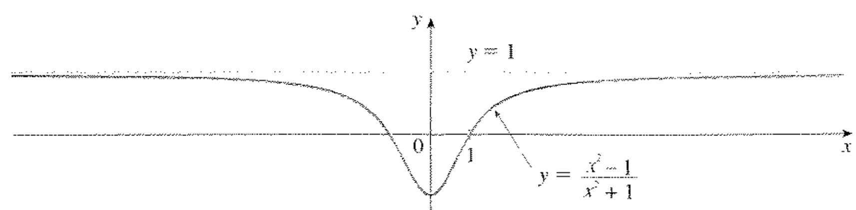


FIGURA 1

Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos tomando-se x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica maior.

[1] **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L tomando-se x suficientemente grande.

Outra notação para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

O símbolo ∞ não representa um número. Todavia, freqüentemente se lê a expressão $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quando x fica infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quando x cresce sem limitação, é L"

O significado dessas frases é dado pela Definição 1. Uma definição mais precisa, análoga àquela de ε, δ da Seção 2.4, está dada no final desta seção.

As ilustrações geométricas da Definição 1 estão na Figura 2. Note que existem muitas formas de o gráfico de f aproximar-se da reta $y = L$ (chamada *assíntota horizontal*) quando fazemos x ir bem para a direita.

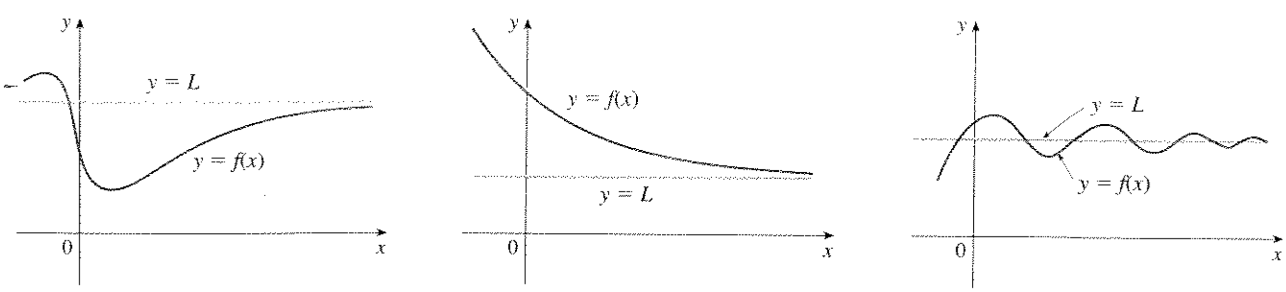


FIGURA 2

Exemplos ilustrando $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Com referência à Figura 1, vemos que para os valores de x com grande valor absoluto, porém negativos, os valores de $f(x)$ estão próximos de 1. Fazendo x decrescer por meio de valores negativos sem limitação, podemos tornar $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos. Isso é expresso escrevendo-se

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

A definição geral é dada a seguir.

[2] **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

Novamente, o símbolo $-\infty$ não representa um número; todavia, a expressão $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ é freqüentemente lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a menos infinito, é L"

A Definição 2 está ilustrada na Figura 3. Note que o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ quando olhamos bem para a esquerda.

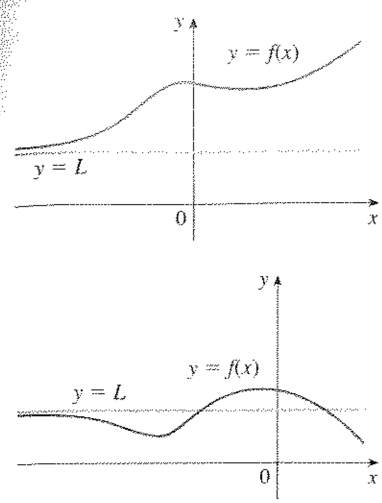


FIGURA 3
Exemplos ilustrando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

3 Definição A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por exemplo, a curva ilustrada na Figura 1 tem a reta $y = 1$ como uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Um exemplo de uma curva com duas assíntotas horizontais é $y = \mathrm{tg}^{-1} x$ (veja a Figura 4). De fato,

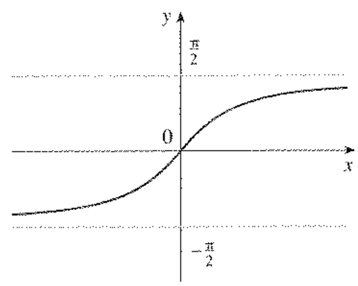


FIGURA 4
$y = \mathrm{tg}^{-1} x$

$$\boxed{4} \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \mathrm{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

logo ambas as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ são assíntotas horizontais. (Isso segue do fato de que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente.)

EXEMPLO 1 Encontre os limites infinitos, limites no infinito e assíntotas para a função f cujo gráfico está na Figura 5.

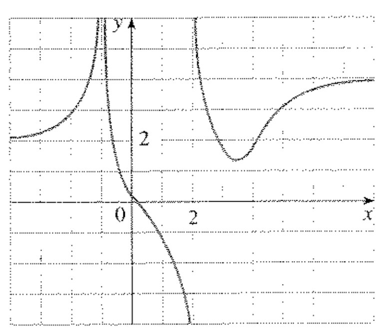


FIGURA 5

SOLUÇÃO Vemos que os valores de $f(x)$ ficam grandes quando $x \to -1$ por ambos os lados; logo

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Observe que $f(x)$ torna-se grande em valor absoluto (mas negativo) quando x tende a 2 à esquerda, porém grande e positivo quando x tende a 2 à direita. Logo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Assim, ambas as retas $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

Quando x torna-se grande, vemos que $f(x)$ tende a 4. Mas quando x decresce, $f(x)$ tende a 2. Logo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Isso significa que $y = 4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

EXEMPLO 2 □ Encontre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUÇÃO Observe que quando x é grande, $1/x$ é pequeno. Por exemplo,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

De fato, tomando x grande o bastante, podemos fazer $1/x$ tão próximo de 0 quanto quisermos. Portanto, conforme a Definição 1, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Raciocínio análogo mostra que quando x é grande em valor absoluto (porém negativo), $1/x$ é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo temos também

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

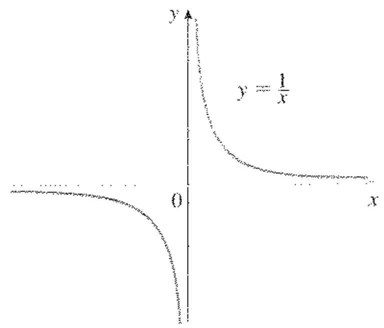


FIGURA 6

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Segue-se que a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$. (Esta é uma hipérbole eqüilátera; veja a Figura 6.)

Muitas das Leis do Limite que foram dadas na Seção 2.3 também são verdadeiras para os limites no infinito. Pode ser provado que as *Leis do Limite listadas na Seção 2.3 (com exceção das Leis n*^{os} *9 e 10) são também válidas se* "$x \to a$" *for substituído por* "$x \to \infty$" *ou* "$x \to -\infty$". Em particular, se combinarmos as Leis n^{os} 6 e 11 com o resultado do Exemplo 2, obteremos a seguinte regra importante no cálculo de limites.

5 Teorema Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EXEMPLO 3 □ Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique quais as propriedades de limites que foram usadas em cada etapa.

SOLUÇÃO Como x cresce indefinidamente, ambos, o numerador e o denominador, também crescem indefinidamente, logo não é nada óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Para eliminar essa indeterminação, precisaremos preliminarmente manipular algebricamente a expressão. Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. (Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.) Nesse caso a maior potência de x no denominador é x^2; logo, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(Pela Lei do Limite nº 5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(Pelas Leis nº 1, 2 e 3)}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0} \qquad \text{(Pela Lei nº 7 e Teorema 5)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

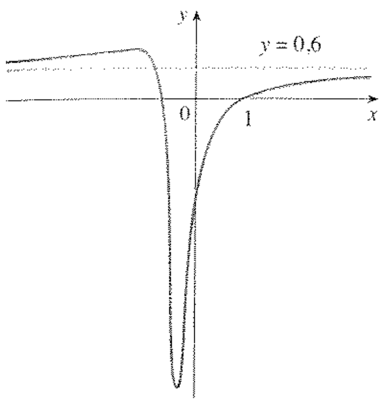


FIGURA 7

$$y=\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x\to-\infty$ é também $\frac{3}{5}$. A Figura 7 ilustra o resultado desses cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal $y=\frac{3}{5}$.

EXEMPLO 4 Determine as assíntotas horizontal e vertical do gráfico da função

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

SOLUÇÃO Dividindo o numerador e o denominador por x e usando as propriedades de limites, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} \qquad \text{(uma vez que } \sqrt{x^2}=x \text{ para } x>0)$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, a reta $y=\sqrt{2}/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Computando o limite quando $x\to-\infty$, devemos lembrar que, para $x<0$, temos $\sqrt{x^2}=|x|=-x$. Logo, quando dividimos o numerador por x, para $x<0$, obtemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1}=-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

Portanto
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}$$
$$=\frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

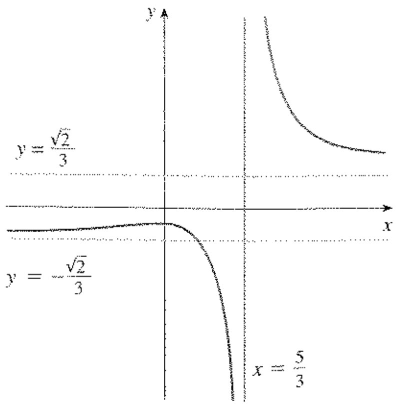


FIGURA 8

$$y=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Dessa forma, a reta $y=-\sqrt{2}/3$ é também uma assíntota horizontal.

Uma assíntota vertical provavelmente ocorre quando o denominador, $3x-5$, é 0, isto é, quando $x=\frac{5}{3}$. Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$ e $x>\frac{5}{3}$, então o denominador está próximo de 0, e $3x-5$ é positivo. O numerador $\sqrt{2x^2+1}$ é sempre positivo, logo $f(x)$ é positivo. Portanto
$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$, mas $x>\frac{5}{3}$, então $3x-5<0$, logo $f(x)$ é muito grande em valor absoluto (porém negativo). Assim
$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

A assíntota vertical é $x=\frac{5}{3}$. Todas as três assíntotas estão mostradas na Figura 8.

EXEMPLO 5 □ Compute $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUÇÃO Como $\sqrt{x^2+1}$ e x são grandes quando x é grande, é difícil ver o que acontece com sua diferença; logo, usamos a álgebra para reescrever a função. Vamos primeiro multiplicar o numerador e o denominador pela conjugada radical:

Podemos pensar na função introduzida como tendo denominador 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

O Teorema do Confronto poderia ser usado para mostrar que esse limite é 0. Mas um método mais fácil é dividir o numerador e o denominador por x. Fazendo isso e usando as Leis do Limite, obtemos
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

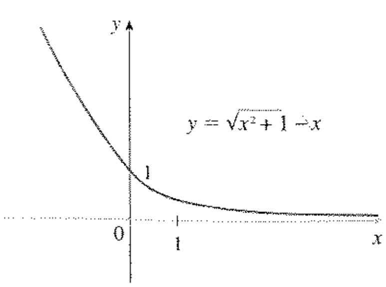


FIGURA 9

A Figura 9 ilustra esse resultado.

O gráfico da função exponencial natural $y=e^x$ tem a reta $y=0$ (o eixo x) como uma assíntota horizontal. (O mesmo é verdadeiro para qualquer função exponencial com base

$a > 1$.) De fato, da Figura 10 e da tabela dos valores correspondentes vemos que

6 $$\lim_{x\to-\infty} e^x$$

Note que os valores de e^x tendem a 0 muito rapidamente.

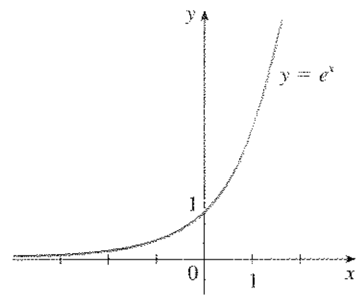


FIGURA 10

x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

EXEMPLO 6 □ Calcule $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

▪ A estratégia problema-solução para o Exemplo 6 está em *Introduzindo Alguma Coisa Extra* (veja a página 78). Aqui, a alguma coisa extra, a ajuda auxiliar, é a nova variável t.

SOLUÇÃO Se tomarmos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Conseqüentemente, por (6),

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

(Veja o Exercício 67.)

EXEMPLO 7 □ Calcule $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Quando x cresce, os valores de sen x oscilam entre 1 e −1 um número infinito de vezes; logo, eles não tendem a qualquer número definido. Assim, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ não existe. □

Limites Infinitos no Infinito

A notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se tão grandes quanto x. Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO 8 □ Encontre $\lim_{x\to\infty} x^3$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3$.

SOLUÇÃO Quando x torna-se grande, x^3 também fica muito grande. Por exemplo,

$$10^3 = 1.000 \qquad 100^3 = 1.000.000 \qquad 1.000^3 = 1.000.000.000$$

Na realidade, podemos fazer x^3 tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

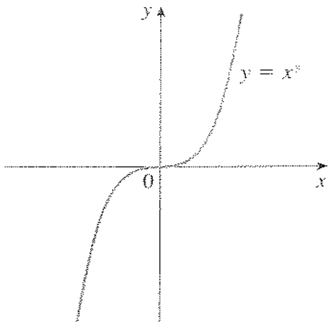


FIGURA 11

$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Analogamente, quando x é muito grande em módulo (porém negativo), x^3 também o é. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Essas afirmações sobre o limite também podem ser vistas no gráfico de $y = x^3$ da Figura 11.

Olhando para a Figura 10 vemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

mas, como demonstra a Figura 12, $y = e^x$ torna-se grande mais rapidamente que $y = x^3$ quando $x \to \infty$.

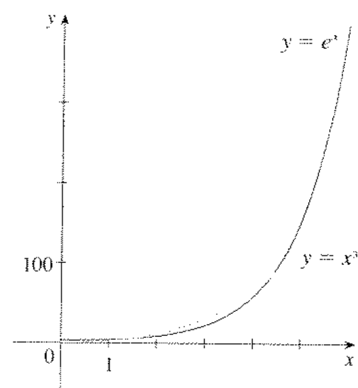


FIGURA 12

Para grandes valores de x, e^x é muito maior que x^3

EXEMPLO 9 □ Encontre $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$.

SOLUÇÃO Note que *não podemos* escrever

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) &= \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x \\ &= \infty - \infty\end{aligned}$$

A Lei do Limite não pode ser aplicada para os limites infinitos, pois ∞ não é um número (não podemos definir $\infty - \infty$). Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

porque, como x e $x - 1$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto.

EXEMPLO 10 □ Encontre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, vamos dividir o numerador e o denominador pela potência mais elevada do denominador, que é justamente x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

pois $x + 1 \to \infty$ e $3/x - 1 \to -1$ quando $x \to \infty$.

O próximo exemplo mostra que usando o limite infinito no infinito, junto com o intercepto, podemos obter uma idéia aproximada do gráfico de um polinômio sem ter de desenhar um grande número de pontos.

EXEMPLO 11 Esboce o gráfico de $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ achando seus interceptos e seus limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to \infty$.

SOLUÇÃO O intercepto y é $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$, e o intercepto x é encontrado fazendo-se $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Note que como $(x-2)^4$ é positivo, a função não muda de sinal em 2; assim, o gráfico não cruza o eixo x em 2. O gráfico cruza o eixo em -1 e 1. Para os valores grandes de x, todos os três fatores também são grandes; logo,

$$\lim_{x \to \infty} (x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

quando os valores de x tiverem um módulo grande, porém negativos, o primeiro fator será positivo e grande, ao passo que o segundo e o terceiro fatores têm grande valor absoluto, porém são negativos. Portanto

$$\lim_{x \to -\infty} (x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

Combinando essas informações, damos um esboço do gráfico na Figura 13.

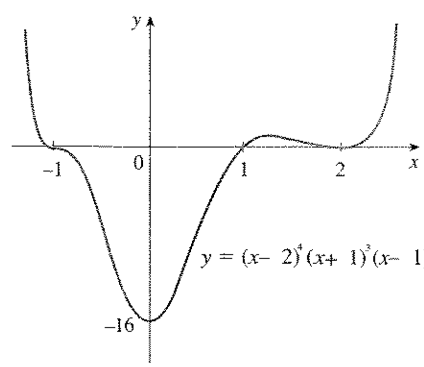


FIGURA 13

Definições Precisas

Podemos estabelecer precisamente a Definição 1 da seguinte forma.

> **7 Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que
>
> $$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

Em palavras, isso estabelece que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L (dentro de uma distância ε, onde ε é qualquer número positivo), bastando apenas tomar x suficientemente grande (maior que N, onde N depende de ε). Graficamente isso quer dizer que escolhendo x suficientemente grande (maior que algum número N) podemos fazer o gráfico de f ficar entre duas retas horizontais dadas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, como na Figura 14. Isso deve ser verdadeiro não importando quão pequeno seja ε. A Figura 15 indica que se for escolhido o menor valor de ε, então será necessário maior valor para N.

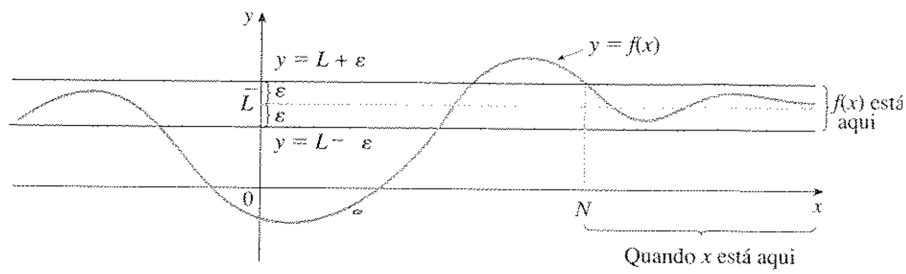


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

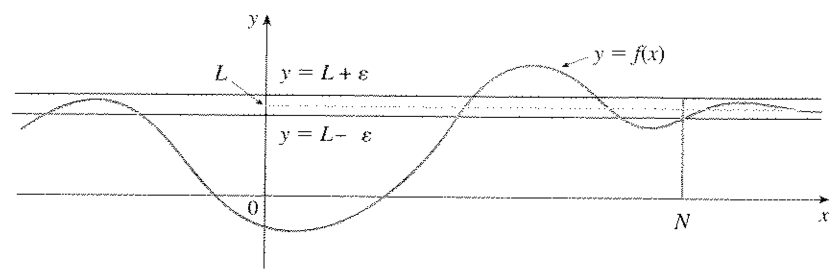


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Analogamente, pode ser dada uma versão precisa da Definição 2 pela Definição 8, que está ilustrada na Figura 16.

8 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ positivo existe um correspondente número N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad x < N$$

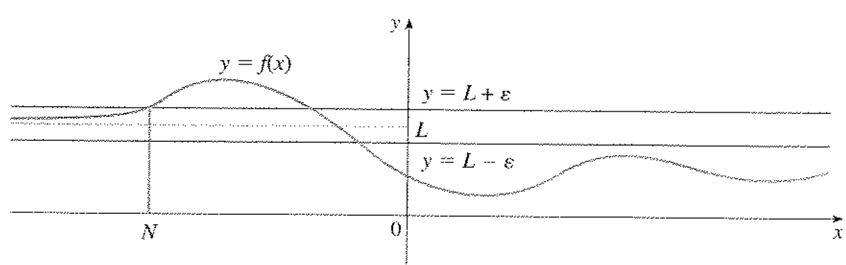


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

No Exemplo 3 calculamos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

No próximo exemplo vamos usar um recurso gráfico para relacionar isso com a Definição 7, sendo $L = \frac{3}{5}$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

EXEMPLO 12 Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6\right| < 0{,}1 \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

SOLUÇÃO Vamos escrever a desigualdade dada como

$$0{,}5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0{,}7$$

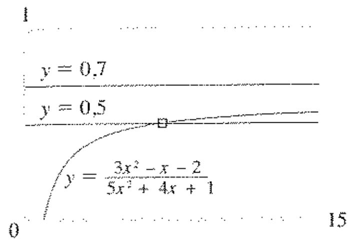


FIGURA 17

Precisamos determinar os valores de x para os quais a curva dada fica entre as retas horizontais $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Assim, fazemos o gráfico da curva e dessas retas na Figura 17. Então usamos o cursor para estimar que a curva cruza a reta $y = 0{,}5$ quando $x \approx 6{,}7$. À direita desse número a curva fica entre as retas $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Arredondando, podemos dizer que

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6\right| < 0{,}1 \qquad \text{sempre que} \qquad x > 7$$

Em outras palavras, para $\varepsilon = 0{,}1$ podemos escolher $N = 7$ (ou qualquer número maior) na Definição 7.

EXEMPLO 13 Use a Definição 7 para provar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO

1. *Análise Preliminar do Problema (uma conjectura sobre um valor para N).* Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

Ao computar esse limite podemos supor $x > 0$, nesse caso,

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

Portanto, queremos

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

isto é,
$$x > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

Isso sugere que devemos tomar $N = 1/\varepsilon$.

2. *Prova (provando que esse N funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N = 1/\varepsilon$. Seja $x > N$. Então

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

Assim
$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

Logo, pela Definição 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

A Figura 18 ilustra a prova mostrando alguns valores de ε e os valores correspondentes de N.

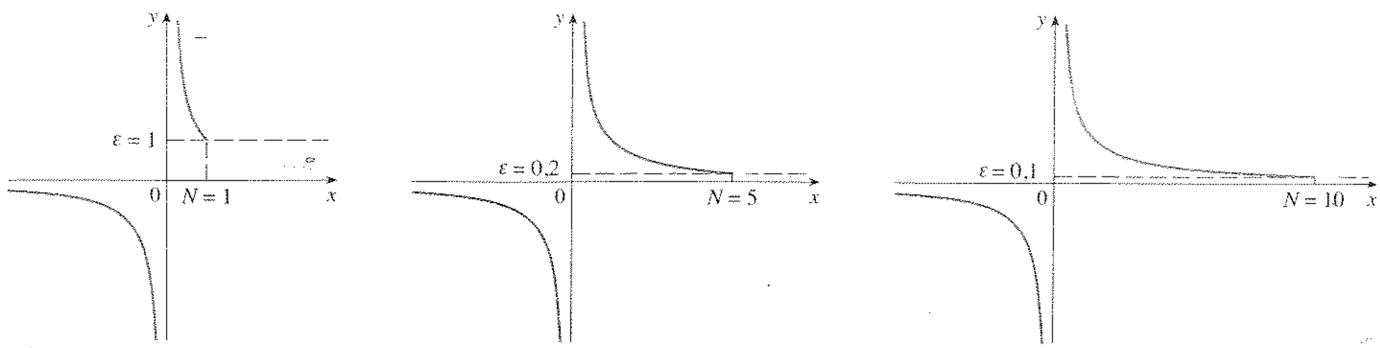


FIGURA 18

Finalmente, notamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

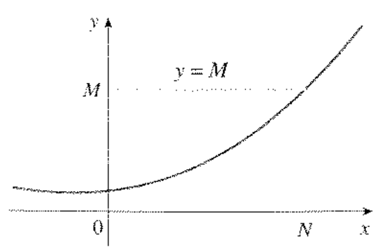


FIGURA 19

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

9 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que

$$f(x) > M \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$ (veja o Exercício 66).

2.6 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens que se seguem.

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.

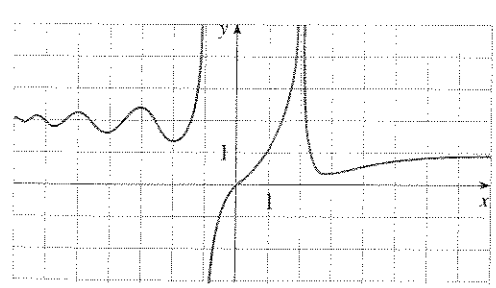
(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com um gráfico as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, determine os limites.

(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(f) Determine as equações das assíntotas.



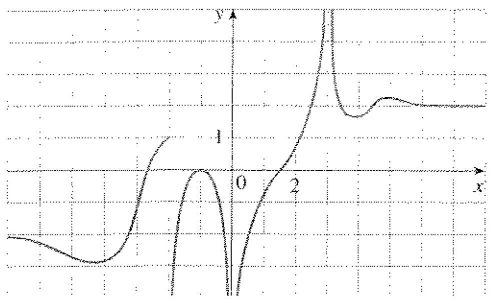
4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to-2^+} g(x)$

(f) As equações das assíntotas



5–8 □ Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $f(x)=0,\quad f(x)=1,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0 \quad f$ é ímpar

6. $\lim_{x\to0^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=1,$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

7. $\lim_{x\to2} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0,$
$\lim_{x\to0^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

8. $\lim_{x\to-2} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=3,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-3$

9. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x)=x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então use o gráfico de f para sustentar sua conjectura.

10. (a) Use o gráfico de

$$f(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correto até a segunda casa decimal.

(b) Use a tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite até quatro casas decimais.

11–12 □ Calcule o limite e justifique cada passagem indicando a propriedade apropriada dos limites.

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{2x^2+5x-8}$ **12.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{12x^3-5x+2}{1+4x^2+3x^3}}$

13–34 □ Encontre o limite.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+3}$ **14.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x-4}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x-x^2}{2x^2-7}$ **16.** $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{2-3y^2}{5y^2+4y}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$ **18.** $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2+2}{t^3+t^2-1}$

19. $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{4u^4+5}{(u^2-2)(2u^2-1)}$ **20.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$ **22.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$ **24.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$ **26.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos x$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}$ **28.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$ **30.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{5-2x^2}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^4+x^5\right)$ **32.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}^{-1}\left(x^2-x^4\right)$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^3+x^5}{1-x^2+x^4}$ **34.** $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}$

35. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$$

por meio do gráfico $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para fazer uma conjectura sobre o valor de limite.

(c) Prove que sua conjectura está correta.

36. (a) Use o gráfico de

$$f(x)=\sqrt{3x^2+8x+6}-\sqrt{3x^2+3x+1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

37–42 □ Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

37. $y=\dfrac{x}{x+4}$ **38.** $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$

39. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3x-10}$ **40.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-x}$

41. $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ **42.** $F(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$

43. Encontre uma fórmula para a função f que satisfaça as seguintes condições:
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$,
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

44. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$, e por assíntota horizontal $y = 1$.

45–48 □ Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como os interceptos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 11.

45. $y = x^2(x - 2)(1 - x)$

46. $y = (2 + x)^3(1 - x)(3 - x)$

47. $y = (x + 4)^5(x - 3)^4$

48. $y = (1 - x)(x - 3)^2(x - 5)^2$

49. Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Faça um gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

50. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece a seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas de inspeção $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.

(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

51. Seja P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

52. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar
(v) $n < 0$, n par

Então use esses esboços para encontrar os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

53. Encontre $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se

$$\frac{4x - 1}{x} < f(x) < \frac{4x^2 + 3x}{x^2}$$

para todo $x > 5$.

54. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. A salmoura contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal após t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

55. Seremos capazes de mostrar no Capítulo 9 do Volume II que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

onde g é a aceleração devida à gravidade; e v^*, a velocidade final da gota.

(a) Encontre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s². Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

56. (a) Fazendo os gráficos de $y = e - x/10$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.

(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar um recurso gráfico?

57. Use o gráfico para encontrar um número N tal que

$$\left| \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 1} - 3 \right| < 0{,}2 \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

58. Para o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

59. Para o limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

60. Para o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

61. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Prove isso diretamente usando a Definição 7.

62. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/\sqrt{x} < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Prove isso diretamente usando a Definição 7.

63. Use a Definição 8 para provar que $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

64. Prove, usando a Definição 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

65. Use a Definição 9 para provar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

66. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Então use sua definição para provar que

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

67. Prove que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.

2.7 Tangentes, Velocidades e Outras Taxas de Variação

Na Seção 2.1 estimamos, com base em informações numéricas, as inclinações das retas tangentes e as velocidades. Agora tendo já definido limite e aprendido como calculá-los retornamos a esses problemas com a capacidade de realmente computar as inclinações das tangentes, velocidades e outras taxas de variação.

Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto vizinho $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente* t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

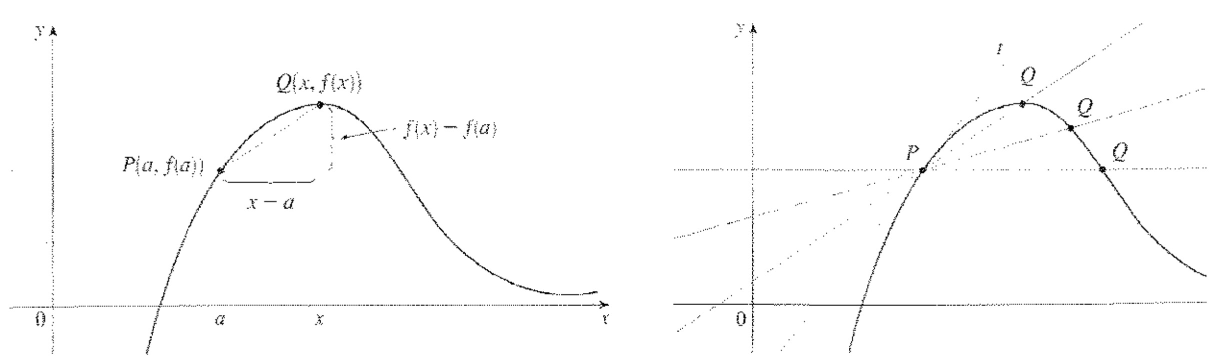


FIGURA 1

1 Definição A **reta tangente** a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Em nosso primeiro exemplo vamos confirmar uma conjectura que foi feita no Exemplo 1 da Seção 2.1.

EXEMPLO 1 □ Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

□ A forma ponto-inclinação da equação da reta por um ponto (x_1, y_1) com uma inclinação m é:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = 2x - 1$$

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A idéia por detrás disso é que, se dermos um grande *zoom* em direção ao ponto, a curva aparentará ser uma reta. A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1. Quanto mais forte for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola.

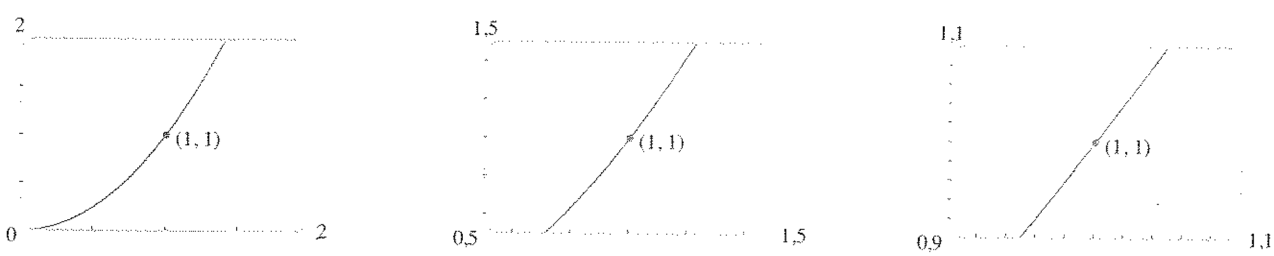


FIGURA 2

Um *zoom* cada vez mais forte sobre a parábola $y = x^2$ em direção ao ponto $(1, 1)$

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente, às vezes mais fácil de ser usada. Seja

$$h = x - a$$

Então

$$x = a + h$$

logo a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - (a)}{h}$$

(Veja a Figura 3, na qual está ilustrado o caso $h > 0$ e Q está à direita de P. No caso de $h < 0$, o ponto Q estará à esquerda de P.)

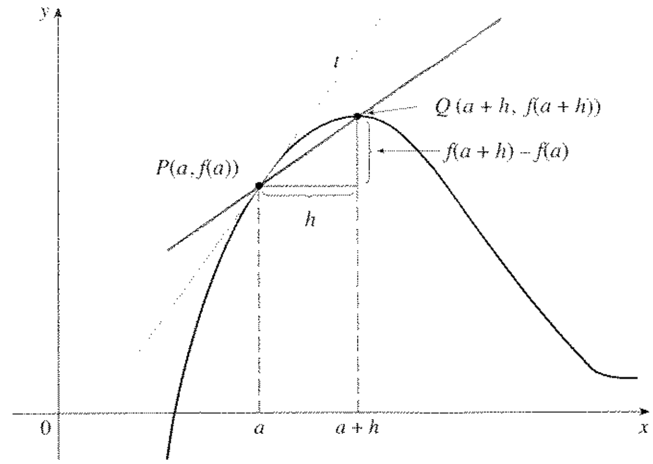


FIGURA 3

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

EXEMPLO 2 □ Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto (3, 1).

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em (3, 1) é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto (3, 1) é

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

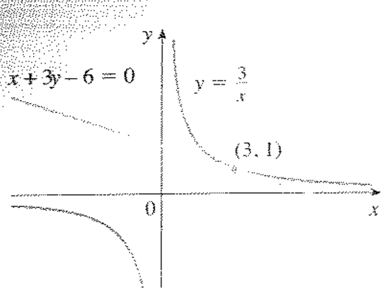


FIGURA 4

que se simplifica para $$x+3y-6=0$$

A hipérbole e sua tangente estão na Figura 4.

EXEMPLO 3 Encontre as inclinações das retas tangentes ao gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$ nos pontos (1, 1), (4, 2) e (9, 3).

SOLUÇÃO Como temos de calcular três inclinações, é mais eficiente encontrar a inclinação em um ponto genérico $\left(a,\sqrt{a}\right)$:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

Racionalizando o numerador

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

Função contínua de h

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

No ponto (1, 1) temos $a=1$; logo, a inclinação da tangente é $m=1/\left(2\sqrt{1}\right)=\frac{1}{2}$. Em (4, 2), temos $m=1/\left(2\sqrt{4}\right)=\frac{1}{4}$; e em (9, 3), temos $m=1/\left(2\sqrt{9}\right)=\frac{1}{6}$.

Velocidades

Na Seção 2.1 estudamos o movimento de uma bola a qual deixou-se cair de cima da Torre CN, e sua velocidade foi definida como o valor-limite das velocidades médias em períodos cada vez menores.

Suponha um objeto movendo-se sobre uma linha reta de acordo com a equação $s=f(t)$, onde s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t=a$ e $t=a+h$ a variação na posição será de $f(a+h)-f(a)$ (veja a Figura 5). A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média}=\frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

que é igual à inclinação da reta tangente PQ na Figura 6.

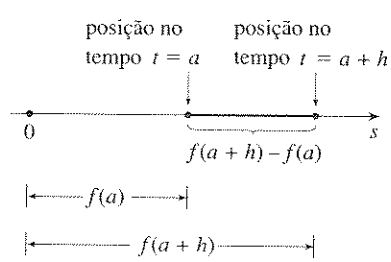


FIGURA 5

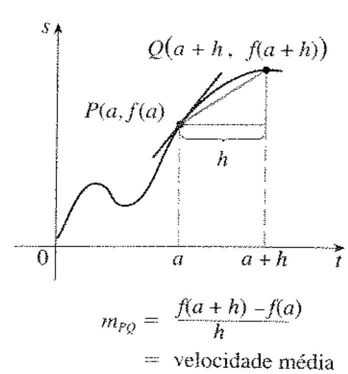


FIGURA 6

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, a + h]$. Em outras palavras, fazemos h tender a 0. Como no exemplo da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P (compare as Equações 2 e 3).

Agora que sabemos computar os limites, vamos reconsiderar o problema da queda da bola.

EXEMPLO 4 Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.
(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?
(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

SOLUÇÃO Em primeiro lugar vamos usar a equação do movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$ para encontrar a velocidade $v(a)$ após a segundos:

Lembre-se da Seção 2.1: A distância (em metros) percorrida após t segundos é $4{,}9t^2$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a \end{aligned}$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$ m/s.

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1 quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4{,}9t_1^2 = 450$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \quad \text{e} \quad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6 \text{ s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8\sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

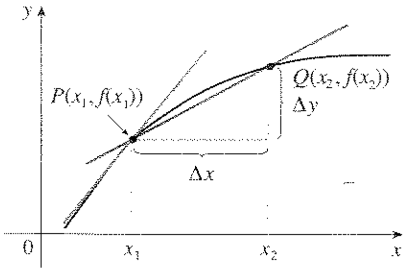
Outras Taxas de Variação

Suponha que y é uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamada **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente de y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$



taxa média de variação $= m_{PQ}$
taxa de variação instantânea = inclinação da tangente em P

FIGURA 7

O quociente de diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado de **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ na Figura 7.

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{4} \qquad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EXEMPLO 5 □ Foram registradas as leituras de temperatura T (em graus Celsius) a cada hora, começando à meia-noite, em um dia de abril na cidade de Whitefish, em Montana, nos Estados Unidos. O tempo x foi medido em horas a partir da meia-noite. Os dados estão na tabela.

$x(h)$	$T(°C)$	$x(h)$	$T(°C)$
0	6,5	13	16,0
1	6,1	14	17,3
2	5,6	15	18,2
3	4,9	16	18,8
4	4,2	17	17,6
5	4,0	18	16,0
6	4,0	19	14,1
7	4,8	20	11,5
8	6,1	21	10,2
9	8,3	22	9,0
10	10,0	23	7,9
11	12,1	24	7,0
12	14,3		

(a) Encontre a taxa média de variação da temperatura em relação ao tempo

(i) do meio-dia até as 15 horas. (ii) do meio-dia até as 14 horas.

(iii) do meio-dia até as 13 horas.

(b) Estime a taxa de variação instantânea ao meio-dia.

SOLUÇÃO

(a) (i) Do meio-dia às 15 horas a temperatura varia de 14,3 °C a 18,2 °C; logo

$$\Delta T = T(15) - T(12) = 18{,}2 - 14{,}3 = 3{,}9\ °C$$

enquanto a variação no tempo foi de $\Delta x = 3$ h. Dessa forma, a taxa de variação média da temperatura em relação ao tempo é

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{3{,}9}{3} = 1{,}3\ °C/h$$

□ **Nota sobre as Unidades**
As unidades para a taxa média de variação $\Delta T/\Delta x$ são unidades de ΔT divididas por Δx, isto é, graus Celsius por hora. Como a taxa de variação instantânea é o limite das taxas médias, ela é medida na mesma unidade: Celsius por hora.

□ Outro método é tomar a média das inclinações das duas retas secantes. Veja o Exemplo 2 na Seção 2.1.

(ii) Do meio-dia às 14 horas a taxa média de variação é

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(14) - T(12)}{14 - 12} = \frac{17{,}3 - 14{,}3}{2} = 1{,}5\ ^\circ\mathrm{C/h}$$

(iii) Do meio-dia às 13 horas a taxa média de variação é

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(13) - T(12)}{13 - 12} = \frac{16{,}0 - 14{,}3}{1} = 1{,}7\ ^\circ\mathrm{C/h}$$

(b) Desenhando os dados e usando-os para esboçar uma curva suave obtemos a Figura 8, que aproxima a função temperatura. Então traçamos a reta tangente no ponto P, onde $x = 12$ e, após medir os lados do triângulo ABC, estimamos que a inclinação da tangente é

$$\left|\frac{BC}{AC}\right| = \frac{10{,}3}{5{,}5} \approx 1{,}9$$

Portanto, a taxa de variação instantânea da temperatura ao meio-dia é de 1,9 °C/h.

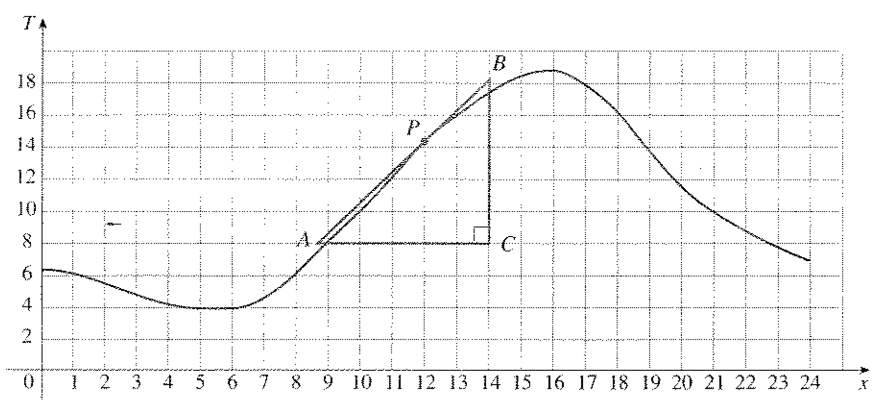


FIGURA 8

A velocidade de uma partícula é a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo. Há também um interesse dos físicos por outras taxas de variação, como, por exemplo, a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo (que é chamada *potência*). Quem estuda as reações químicas se interessa pela taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (denominada *taxa de reação*). Uma siderúrgica se interessa pela taxa de variação do custo de produção de x toneladas de aço por dia em relação a x (definida como *custo marginal*). Um biólogo está interessado na taxa de variação populacional de uma colônia de bactérias no tempo. De fato, o cálculo de taxas de variações é importante nas engenharias e em todas as ciências naturais, exatas e até mesmo as sociais. Posteriormente, na Seção 3.3, daremos outros exemplos.

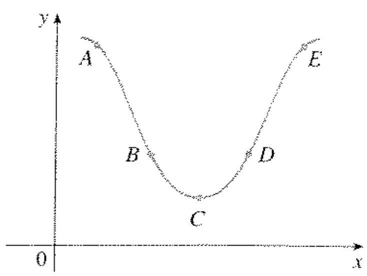
Todas essas taxas podem ser interpretadas como inclinações de tangentes. Isso torna significativa a solução do problema da tangente. Sempre que resolvemos um problema de reta tangente, não estamos tão-somente resolvendo um problema geométrico. Implicitamente estamos resolvendo uma grande variedade de problemas envolvendo as taxas de variação.

2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
   (a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
   (b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Considere um objeto movendo-se com uma função posição $s = f(t)$.
   (a) Escreva uma expressão para a velocidade média dele no intervalo de tempo desde $t = a$ até $t = a + h$.
   (b) Escreva uma expressão para a velocidade instantânea dele no tempo $t = a$.

3. Considere a inclinação da curva em cada um dos cinco pontos dados. Classifique-os em ordem decrescente e explique seu raciocínio.



4. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ e $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$. Dando um *zoom* em direção ao ponto $(0, 1)$, o que você nota em $(0, 1)$?

5. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = x^2 + 2x$ no ponto $(-3, 3)$
      (i) usando a Definição 1
      (ii) usando a Equação 2
   (b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
   (c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(-3, 3)$ até que parábola e a reta tangente fiquem não distinguíveis.

6. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $(-1, -1)$
      (i) usando a Definição 1
      (ii) usando a Equação 2
   (b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
   (c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em retângulos cada vez menores centrados no ponto $(-1, -1)$ até que a curva e a tangente fiquem não distinguíveis.

7–10 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

7. $y = 1 + 2x - x^3$, $(1, 2)$
8. $y = \sqrt{2x+1}$, $(4, 3)$
9. $y = (x-1)/(x-2)$, $(3, 2)$
10. $y = 2x/(x+1)^2$, $(1, 2)$

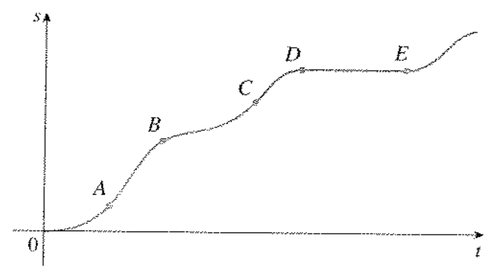
11. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 2/(x + 3)$ no ponto onde $x = a$.
    (b) Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos cujas coordenadas x são (i) -1, (ii) 0 e (iii) 1.

12. (a) Encontre a inclinação da tangente à parábola $y = 1 + x + x^2$ nos pontos onde $x = a$.
    (b) Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos cujas coordenadas x são (i) -1, (ii) $-\frac{1}{2}$ e (iii) 1.
    (c) Faça o gráfico da curva e das três retas tangentes em uma tela em comum.

13. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto onde $x = a$.
    (b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, -2)$ e $(2, 1)$.
    (c) Faça o gráfico da curva e das tangentes em uma tela em comum.

14. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.
    (b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
    (c) Faça o gráfico da curva e das tangentes em uma tela em comum.

15. O gráfico ilustra a função posição de um carro. Use a forma do gráfico para explicar sua resposta para as seguintes questões.
    (a) Qual a velocidade inicial do carro?
    (b) O carro está mais rápido em B ou em C?
    (c) O carro está aumentando ou diminuindo a rapidez em A, B e C?
    (d) O que aconteceu entre D e E?



16. Valéria dirige em uma auto-estrada. Esboce o gráfico da função posição do carro, se ela dirigir da seguinte maneira: no instante $t = 0$, o carro está no ponto onde o marcador de milhas mostra 15 e viaja a uma velocidade constante de 55 milhas por hora. Continua com essa velocidade por exatamente 1 hora. Então gradualmente o carro vai diminuindo a velocidade em um período de 2 minutos, quando Valéria pára para jantar. O jantar dura 26 minutos e, assim, então ela recomeça a viagem aumentando gradualmente a velocidade até 65 milhas por hora, em um período de 2 minutos. Ela dirige a 65 milhas por hora por 2 horas e, então, num período de 3 minutos, gradualmente pára completamente o carro.

17. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 40 pés/s, sua altura (em pés) depois de t segundos é dada por $y = 40t - 16t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

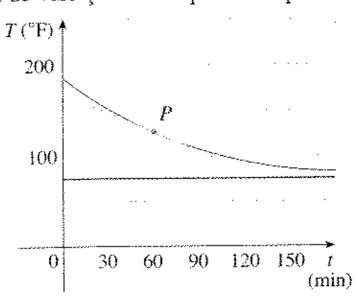
18. Se uma flecha é atirada para cima sobre a superfície da Lua com uma velocidade de 58 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 58t - 0{,}83t^2$.
(a) Encontre a velocidade da flecha após um segundo.
(b) Encontre a velocidade da flecha quando $t = a$.
(c) Quando a flecha volta para a Lua?
(d) Com que velocidade ela atinge a Lua?

19. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação do movimento $s = 4t^3 + 6t + 2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula no instante $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

20. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4{,}5]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações sejam as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação seja a velocidade instantânea da parte (b).

21. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

22. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge 185 °F e colocado sobre uma mesa na sala, na qual a temperatura é de 75 °F. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até que se aproxime da temperatura da sala. (Na Seção 9.4 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.) Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



23. (a) Use os dados do Exemplo 5 para achar a taxa média da mudança da temperatura em relação ao tempo
(i) das 8 horas da noite às 11 horas da noite.
(ii) das 8 horas da noite às 10 horas da noite.
(iii) das 8 horas da noite às 9 horas da noite.
(b) Estime a taxa instantânea da variação de T em relação ao instante 8 horas da noite medindo a inclinação de uma tangente.

24. Uma estimativa anual da população da Bélgica, P (em milhares), de 1992 a 2000 é mostrada na tabela a seguir.

Ano	1992	1994	1996	1998	2000
P	10.036	10.109	10.152	10.175	10.186

(a) Encontre a taxa média do crescimento
(i) de 1992 a 1996 (ii) de 1994 a 1996 (iii) de 1996 a 1998
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 1996 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?
(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 1996 medindo a inclinação de uma tangente.

25. Uma estimativa anual dos usuários de telefone celular na Malásia, N (em milhares), é mostrada na tabela.

Ano	1993	1994	1995	1996	1997
N	304	572	873	1.512	2.461

(a) Determinar a taxa média de crescimento
(i) de 1995 a 1997 (ii) de 1995 a 1996 (iii) de 1994 a 1995
Em cada caso inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 1995 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?
(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 1995 medindo a inclinação de uma tangente.

26. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (Esse número é obtido no dia 30 de junho de cada ano.)

Ano	1996	1997	1998	1999	2000
N	1.015	1.412	1.886	2.135	3.300

(a) Determinar a taxa média de crescimento
(i) de 1996 a 1998 (ii) de 1997 a 1998 (iii) de 1998 a 1999
Em cada caso inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 1998 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?
(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 1998 medindo a inclinação de uma tangente.

27. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$.
(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$ (ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.3.)

28. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 galões de água, que podem ser escoados a partir da base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100.000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está fluindo para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ e 60 minutos, encontre a taxa do fluxo e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante está a taxa do fluxo máximo? E o mínimo?

2.8 Derivadas

Na Seção 2.7 definimos a inclinação da tangente à curva com equação $y = f(x)$ no ponto onde $x = a$ como

$$\boxed{1} \qquad m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Também vimos que a velocidade de um objeto com uma função posição $s = f(t)$ no instante $t = a$ é

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De fato, o limite da forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surge sempre que calculamos uma taxa de variação em uma das ciências ou engenharia, tais como a taxa de reação em química ou o custo marginal em economia. Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, são dados a ele um nome e uma notação especiais.

□ $f'(a)$ é lido "f linha de a".

$\boxed{2}$ **Definição** A **derivada de uma função f em um número a**, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existe.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$, e h tende a 0 se e somente se x aproximar-se de a. Conseqüentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

$$\boxed{3} \qquad \boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

EXEMPLO 1 □ Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

SOLUÇÃO Da Definição 2 temos

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}$$

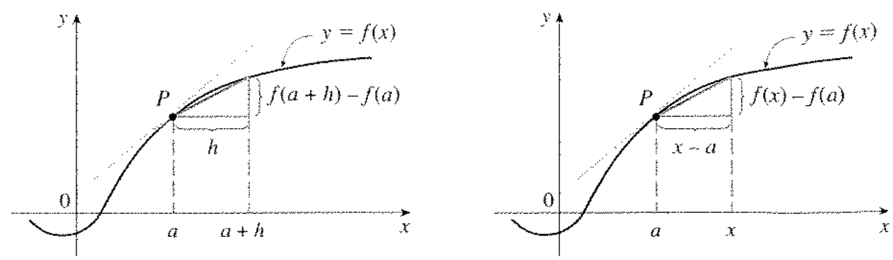
□

Interpretação da Derivada como a Inclinação da Reta Tangente

Na Seção 2.7 definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m dada pela Equação 1. Uma vez que, pela Definição 2, isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora dizer o seguinte.

> A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Assim, a interpretação geométrica de uma derivada [como definida por (2) ou (3)] é como ilustrado na Figura 1.



(a) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
= inclinação da tangente em P
= inclinação da curva em P

(b) $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
= inclinação da tangente em P
= inclinação da curva em P

FIGURA 1
Interpretação geométrica de uma derivada

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EXEMPLO 2 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto $(3, -6)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1 sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no número a é $f'(a) = 2a - 8$. Portanto a inclinação da reta tangente em $(3, -6)$ é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Dessa forma, uma equação da reta tangente, ilustrada na Figura 2, é

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad y = -2x$$

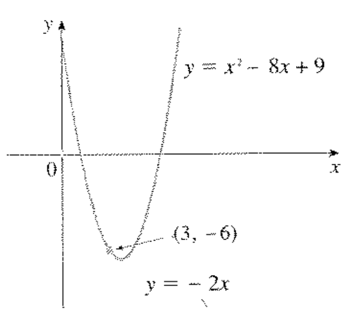


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Seja $f(x) = 2^x$. Estime o valor de $f'(0)$ de duas formas:
(a) Usando a Definição 2 e tomando os valores de h sucessivamente menores.
(b) Interpretando $f'(0)$ como a inclinação de uma tangente e usando uma calculadora gráfica para dar um *zoom* sobre o gráfico de $y = 2^x$.

SOLUÇÃO
(a) Da Definição 2 temos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$
0,1	0,718
0,01	0,696
0,001	0,693
0,0001	0,693
−0,1	0,670
−0,01	0,691
−0,001	0,693
−0,0001	0,693

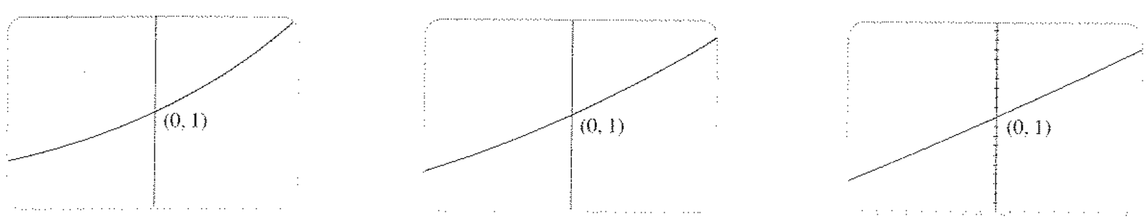
Uma vez que ainda não somos capazes de calcular esse limite exatamente, vamos usar uma calculadora para aproximar os valores de $(2^h - 1)/h$. Da evidência numérica da tabela vemos que, quando h tende a 0, esses valores parecem tender a um número próximo de 0,69. Logo nossa estimativa é

$$f'(0) \approx 0{,}69$$

(b) Na Figura 3 vamos fazer um gráfico da curva $y = 2^x$ e dar um *zoom* em direção ao ponto $(0, 1)$. Quanto mais próximo estivermos de $(0, 1)$, mais a curva se parecerá com uma reta. De fato, na Figura 3(c) a curva é praticamente indistinguível de sua reta tangente em $(0, 1)$. Uma vez que a escala x e a escala y são ambas 0,01, vamos estimar que a inclinação para essa reta é

$$\frac{0{,}14}{0{,}20} = 0{,}7$$

Logo nossa estimativa da derivada é $f'(0) \approx 0{,}7$. Na Seção 3.5 vamos mostrar que, correto até a sexta casa decimal, $f'(0) \approx 0{,}693147$.



(a) $[-1, 1]$ por $[0, 2]$ (b) $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ (c) $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$

FIGURA 3 Dando um *zoom* no gráfico de $y = 2^x$ próximo de $(0, 1)$

Interpretação da Derivada como uma Taxa de Variação

Na Seção 2.7 definimos a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x em $x = x_1$ como o limite das taxas médias de variação sobre os intervalos cada vez menores. Se o intervalo for $[x_1, x_2]$, então a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

e

4 $$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da Equação 3 reconhecemos esse limite como sendo a derivada de f em x_1, isto é, $f'(x_1)$. Isso fornece uma segunda interpretação da derivada:

> A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

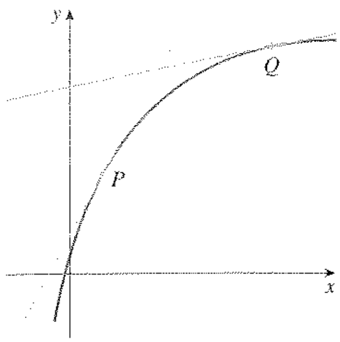


FIGURA 4
Os valores de y estão mudando rapidamente em P e lentamente em Q

A conexão com a primeira interpretação é que se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$. Isso significa que quando a derivada for grande (e portanto a curva será íngreme no ponto P na Figura 4), os valores de y mudarão rapidamente. Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada, e os valores de y mudarão lentamente.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então, $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t. Em outras palavras, *$f'(a)$ é a velocidade da partícula no instante $t = a$* (veja a Seção 2.7). A *rapidez* da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

EXEMPLO 4 □ A posição de uma partícula é dada pela equação do movimento $s = f(t) = 1/(1 + t)$, onde t é medido em segundos e s, em metros. Encontre a velocidade e a rapidez após 2 segundos.

SOLUÇÃO A derivada de f quando $t = 2$ é

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+(2+h)} - \dfrac{1}{1+2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{3+h} - \dfrac{1}{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{3(3+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Assim, a velocidade após 2 segundos é $f'(2) = -\frac{1}{9}$ m/s, e a rapidez é

$$|f'(2)| = \left|-\tfrac{1}{9}\right| = \tfrac{1}{9} \text{ m/s}.$$

EXEMPLO 5 □ Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa, e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1.000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5.000)$?

SOLUÇÃO

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. (Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*. Essa idéia está discutida em mais detalhes nas Seções 3.3 e 4.8.)

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\Delta C/\Delta x$. Uma vez que ΔC é medida em dólares e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é dólares por metros.

(b) A afirmação que $f'(1.000) = 9$ significa que, depois de 1.000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é \$ 9/metro. (Quando $x = 1.000$, C está aumentando 9 vezes mais rápido que x.)

Uma vez que $\Delta x = 1$ é pequeno comparado com $x = 1.000$, podemos usar a aproximação

$$f'(1.000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

e dizer que o custo de fabricação de 1.000 metros (ou os 1.001 primeiros metros) está em torno de \$ 9.

□ Aqui estamos assumindo que a função custo é bem comportada; ou seja $C(x)$ não oscila muito rapidamente próximo a $x = 1.000$.

(c) A taxa segundo a qual o custo de produção está crescendo (por metro) é provavelmente menor quando $x = 500$ do que quando $x = 50$ (o custo de fabricação do 500º metro é menor que o custo do 50º metro), em virtude da escala econômica. (Um fabricante usa mais eficientemente os custos fixos de produção.) Então

$$f'(50) > f'(500)$$

Mas, à medida que a produção expande, a operação de larga escala resultante pode se tornar ineficiente, e poderiam ocorrer custos de horas extras. Assim, é possível que a taxa de crescimento dos custos em última análise comece a crescer

$$f'(5.000) > f'(500)$$

O exemplo a seguir mostra como estimar a derivada de uma função disposta em tabela, isto é, uma função definida não por uma fórmula, mas por uma tabela de valores.

t	$P(t)$
1980	930,2
1995	1.945,9
1990	3.233,3
1995	4.974,0
2000	5.674,2

EXEMPLO 6 □ Seja $D(t)$ a dívida dos Estados Unidos no instante t. A seguinte tabela concede os valores aproximados dessa função fornecendo as estimativas da dívida, ao fim de cada ano, em bilhões de dólares, no período de 1980 a 2000. Interprete e estime os valores de $D'(1990)$.

SOLUÇÃO A derivada $D'(1990)$ indica a taxa de variação da dívida D com relação a t quando $t = 1990$, isto é, a taxa de crescimento da dívida nacional em 1990.

De acordo com a Equação 3,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Dessa forma, computamos os valores tabulados do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230,31
1985	257,48
1995	348,14
2000	244,09

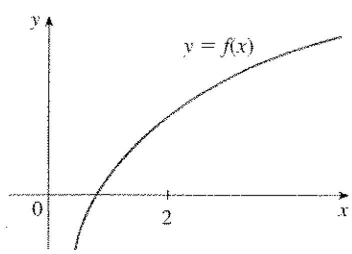
□ Outro método é desenhar a função dívida e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1990$ (veja o Exemplo 5 da Seção 2.7).

Da tabela vemos que $D'(1990)$ situa-se em algum lugar entre 257,48 e 348,14. [Aqui fizemos uma suposição de que a dívida não teve uma variação violenta entre 1980 e 2000.] Estimamos que a taxa de crescimento da dívida nacional dos Estados Unidos em 1990 foi a média desses dois números, a saber:

$$D'(1990) \approx 303 \text{ bilhões de dólares por ano}$$

2.8 Exercícios

1. Sobre um dado gráfico f, marque o comprimento que represente $f(2)$, $f(2 + h)$, $f(2 + h) - f(2)$ e h. (Escolha $h > 0$.) Qual reta tem a inclinação $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$?

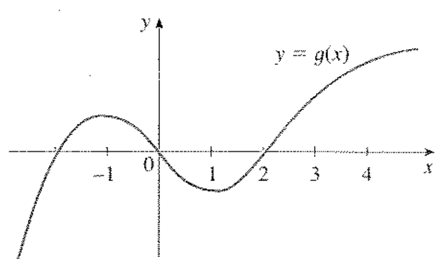


2. Para a função f cujo gráfico está ilustrado no Exercício 1, disponha os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad f'(2) \qquad f(3) - f(2) \qquad \tfrac{1}{2}[f(4) - f(2)]$$

3. Para a função g cujo gráfico é dado, disponha os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



4. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em $(4, 3)$ passa no ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

5. Esboce o gráfico de uma função de f para o qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

6. Esboce o gráfico de uma função g para o qual $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$, $g'(1) = 0$ e $g'(2) = 1$.

7. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

8. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto $(0, 1)$.

9. (a) Se $F(x) = x^3 - 5x + 1$, encontre $F'(1)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 5x + 1$ no ponto $(1, -3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

10. (a) Se $G(x) = x/(1 + 2x)$, encontre $G'(a)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x/(1 + 2x)$ no ponto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

11. Seja $f(x) = 3^x$. Estime o valor de $f'(1)$ de duas maneiras:
(a) Use a Definição 2 e tome os valores sucessivamente menores de h.
(b) Dê um *zoom* sobre o gráfico de $y = 3^x$ e estime a inclinação.

12. Seja $g(x) = \operatorname{tg} x$. Estime o valor de $g'(\pi/4)$ de duas maneiras:
(a) Use a Definição 2 e tome os valores sucessivamente menores de h.
(b) Dê um *zoom* sobre o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$ e estime a inclinação.

13–18 □ Encontre $f'(a)$.

13. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

14. $f(x) = t^4 - 5t$

15. $f(x) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

18. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

19–24 □ Cada limite representa a derivada de alguma função f em algum número a. Estabeleça f e a em cada caso.

19. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

20. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$

21. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$

22. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

23. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

24. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

25–26 □ Uma partícula move-se ao longo de uma reta com a equação do movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

25. $f(t) = t^2 - 6t - 5$

26. $f(t) = 2t^3 - t + 1$

27. O custo da produção de x onças (1 libra = 12 onças) de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(x)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa $f'(800) = 17$?

(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ vão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

28. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(t)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. O que é maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, o que afetaria sua conclusão? Explique.

29. O consumo de combustível (medido em galões por hora) de um carro viajando a uma velocidade de v milhas por hora é $c = f(v)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(v)$? Quais suas unidades?

(b) Escreva uma sentença (em termos leigos) que explique o significado da equação $f'(20) = -0{,}05$.

30. A quantidade (em libras) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete a um preço de p dólares por libra é $Q = f(p)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(8)$? Quais são suas unidades?

(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

31. Seja $T(t)$ a temperatura (em °F) em Dallas t horas após a meia-noite em 2 de junho de 2001. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(10)$? Estime o seu valor.

t	0	2	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	73	73	70	69	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

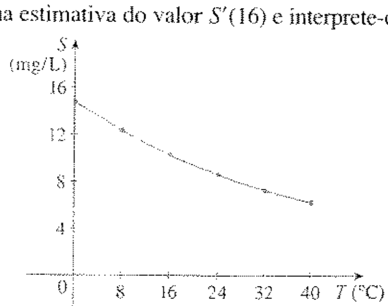
32. A expectativa de vida melhorou significativamente no século XX. A tabela fornece os valores de $E(t)$, a expectativa de vida no nascimento (em anos) de um menino no ano t nos Estados Unidos. Interprete e estime os valores de $E'(1910)$ e $E'(1950)$.

t	$E(t)$	t	$E(t)$
1900	48,3	1960	66,6
1910	51,1	1970	67,1
1920	55,2	1980	70,0
1930	57,4	1990	71,8
1940	62,5	2000	74,1
1950	65,6		

33. A quantidade de oxigênio dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o oxigênio contido em água.) O gráfico mostra como a solubilidade do oxigênio S varia como uma função da temperatura T da água.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

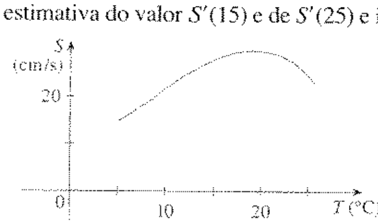
(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.



34. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre S a velocidade máxima de nado sustentável do salmão Coho.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(15)$ e de $S'(25)$ e interprete-os.



35–36 □ Determine se existe ou não $f'(0)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Projeto Escrito — Métodos Iniciais para Encontrar as Tangentes

A primeira pessoa a formular explicitamente as idéias de limite e derivada foi sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e seu professor em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenham papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.8 para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. BOYER, Carl; MERZBACH Uta. *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley, 1989, p. 389, 432.
2. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.
3. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.
4. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

2.9 A Derivada como uma Função

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Aqui mudamos nosso ponto de vista e vamos variar o número a. Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obteremos

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{2}$$

Dado um número x para o qual esse limite existe, atribuímos a x o número $f'(x)$. Logo podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de f** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

A função f' é denominada derivada de f, pois tem sido "derivada" de f pela operação-limite na Equação 2. O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e poderia ser menor que o domínio de f.

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada f'.

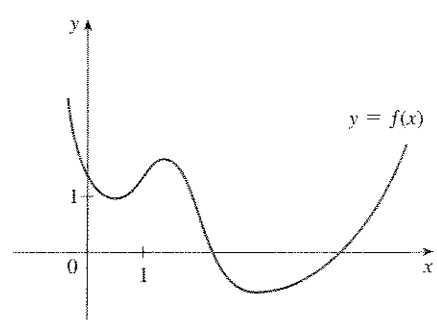
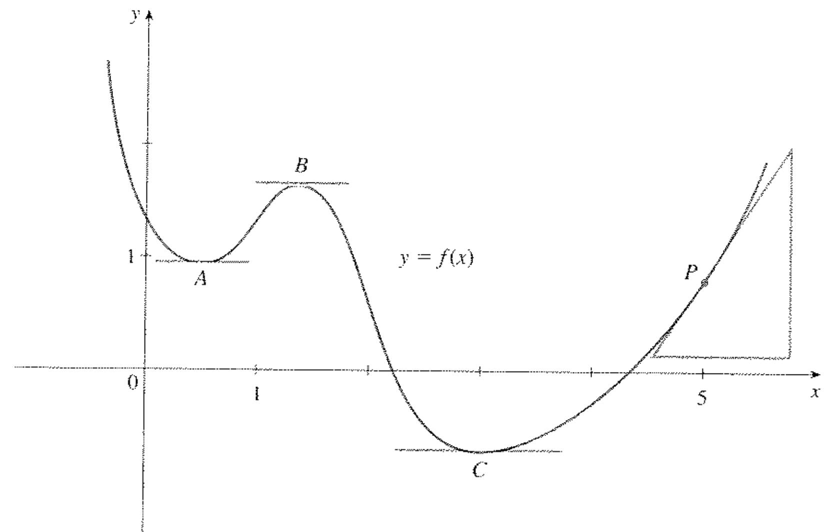


FIGURA 1

SOLUÇÃO Podemos estimar o valor da derivada de qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação para estar em torno de $\frac{3}{2}$, assim $f'(5) \approx 1{,}5$. Isso nos permite desenhar o ponto $P'(5, 1{,}5)$ sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P. Repetindo esse procedimento em vários pontos, obtemos o gráfico ilustrado na Figura 2(b). Note que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, a derivada é 0 lá e o gráfico de f' cruza o eixo x no ponto A', B' e C' diretamente abaixo de A, B e C. Entre A e B as tangentes têm inclinação positiva; logo, $f'(x)$ é positivo lá. Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, $f'(x)$ é negativo lá.



(a)

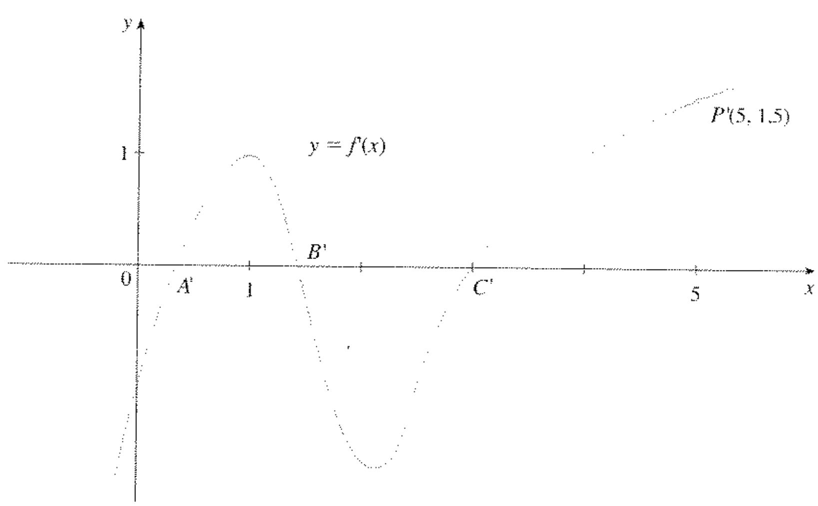


FIGURA 2

(b)

Observe que onde a derivada é positiva (à direita de C e entre A e B), a função f é crescente. Onde $f'(x)$ é negativa (à esquerda de A e entre B e C), f é decrescente. Na Seção 4.3 provaremos que isso é válido para todas as funções.

Se uma função estiver definida por uma tabela de valores, então poderemos construir uma tabela de valores aproximados de sua derivada, como no exemplo a seguir.

t	$B(t)$
1980	9.847
1982	9.856
1984	9.855
1986	9.862
1988	9.884
1990	9.962
1992	10.036
1994	10.109
1996	10.152
1998	10.175
2000	10.186

EXEMPLO 2 Seja $B(t)$ a população da Bélgica no instante t. A tabela fornece os valores médios anuais de $B(t)$, em milhares, de 1980 a 2000. Construa uma tabela de valores para a derivada dessa função.

SOLUÇÃO Presumindo que não haja uma flutuação violenta nessa população entre os valores estabelecidos, vamos começar dando uma aproximação para $B'(1988)$, a taxa de crescimento populacional da Bélgica em 1988. Como

$$B'(1988) = \lim_{h \to 0} \frac{B(1988+h) - B(1988)}{h}$$

Obtemos

$$B'(1988) \approx \frac{B(1988+h) - B(1988)}{h}$$

para os valores menores de h.

Para $h = 2$, temos

$$B'(1988) \approx \frac{B(1990) - B(1988)}{2} = \frac{9862 - 9884}{2} = 39$$

(Essa é a taxa média de crescimento entre 1988 e 1990.) Para $h = -2$, temos

$$B'(1988) \approx \frac{B(1986) - B(1988)}{-2} = \frac{9962 - 9884}{-2} = 11$$

que é a taxa média de crescimento entre 1986 e 1998. Teremos uma aproximação mais precisa se tomarmos a média dessas duas taxas de variação:

$$B'(1988) \approx \tfrac{1}{2}(39 + 11) = 25$$

Isso significa que em 1988 a população estava crescendo a uma taxa de 25 mil pessoas por ano.

Fazendo os cálculos análogos para outros valores (exceto os extremos, 1980 e 2000), temos a tabela que mostra os valores aproximados para a derivada.

t	$B'(t)$
1980	4.5
1982	2.0
1984	1.5
1986	7.3
1988	25.0
1990	38.0
1992	36.8
1994	29.0
1996	16.5
1998	8.5
2000	5.5

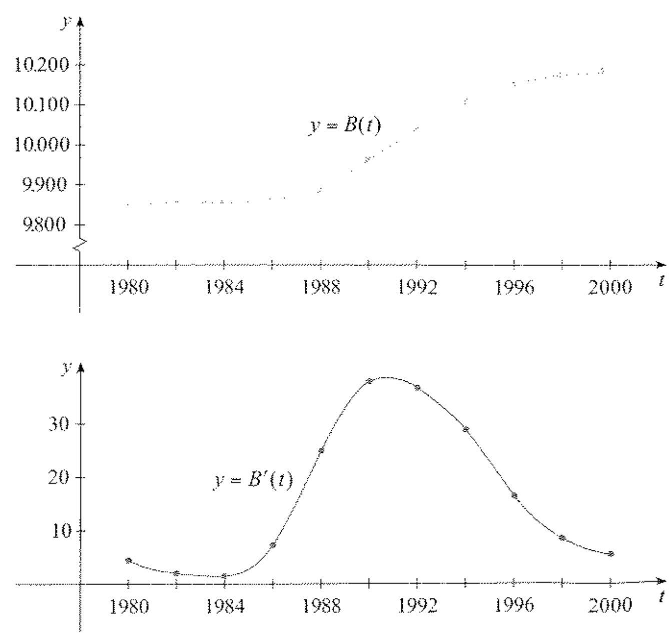


FIGURA 3

A Figura 3 ilustra o Exemplo 2 mostrando os gráficos da função população $B(t)$ e de sua derivada $B'(t)$. Observe que a taxa de crescimento populacional cresce até um máximo em 1990 e, depois, passa a decrescer.

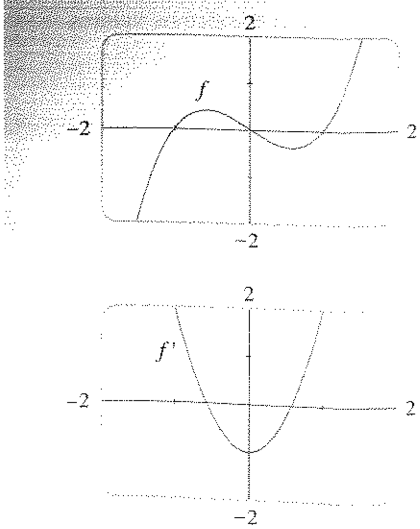


FIGURA 4

EXEMPLO 3

(a) Se $f(x) = x^3 - x$, encontre uma fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre comparando os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO

(a) Ao usar a Equação 2 para computar uma derivada, devemos nos lembrar de que a variável é h e de que x é considerado temporariamente como uma constante durante os cálculos do limite.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

(b) Vamos fazer os gráficos de f e f' utilizando algum recurso gráfico. O resultado está na Figura 4. Note que $f'(x) = 0$ quando f tem tangentes horizontais, e $f'(x)$ é positivo quando as tangentes têm inclinação positiva. Assim, esses gráficos servem como verificação do trabalho feito em (a).

EXEMPLO 4 Se $f(x) = \sqrt{x - 1}$, encontre a derivada de f. Estabeleça o domínio de f'.

SOLUÇÃO

Aqui racionalizamos o numerador.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h\left(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}\right)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Vemos que $f'(x)$ existe se $x > 1$; logo, o domínio de f' é $(1, \infty)$. Ele é menor que o domínio de f, que é $[1, \infty)$.

Vejamos se o resultado do Exemplo 4 é razoável observando os gráficos de f e f' na Figura 5. Quando x estiver próximo de 1, $\sqrt{x-1}$ estará próximo de 0; logo, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x-1}\right)$ é muito grande, e isso corresponde a retas tangentes íngremes próximas de $(1, 0)$ na Figura 5(a) e a grandes valores de $f'(x)$ exatamente à direita de 1 na Figura 5(b). Quando x for grande, $f'(x)$ será muito pequena, e o que corresponde ao achatamento das retas tangentes no extremo direito do gráfico de f e à assíntota horizontal do gráfico de f'.

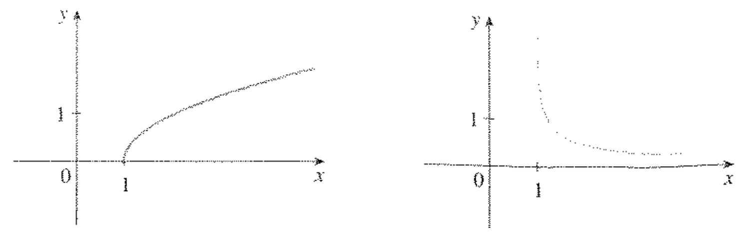


FIGURA 5 (a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

EXEMPLO 5 Encontre f' se $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUÇÃO

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad-bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

Outras Notações

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente, então algumas notações alternativas para a derivada são como se segue:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$. Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento. Podemos reescrever a definição de derivada (Equação 2.8.4) como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

□ Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 e estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade local, graduando-se com 17 anos. Após obter seu doutorado em direito aos 20 anos, Leibniz entrou para o serviço diplomático, passando a maior parte de sua vida viajando pelas capitais européias em missões políticas. Em particular trabalhou para afastar uma ameaça militar da França contra a Alemanha e tentou reconciliar as igrejas Católica e Protestante.

Leibniz só começou a estudar seriamente matemática em 1672, quando em missão diplomática em Paris. Lá ele construiu uma máquina de calcular e encontrou cientistas, como Huygens, que dirigiram sua atenção para os últimos desenvolvimentos da matemática e da ciência. Leibniz procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificariam o raciocínio lógico. Em particular, a versão do cálculo publicada por ele em 1684 estabeleceu a notação e as regras para encontrar as derivadas usadas até hoje.

Infelizmente, uma disputa muito acirrada de prioridades surgiu em 1690 entre os seguidores de Newton e os de Leibniz sobre quem teria inventado primeiro o cálculo. Leibniz foi até mesmo acusado de plágio pelos membros da Royal Society na Inglaterra. A verdade é que cada um inventou independentemente o cálculo. Newton chegou primeiro à sua versão do cálculo, mas, por temer controvérsias, não o publicou imediatamente. Assim, a publicação do cálculo de Leibniz em 1684 foi a primeira a aparecer.

Para indicar o valor de uma derivada dy/dx na notação de Leibniz em um número específico a, usamos a notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que é um sinônimo para $f'(a)$.

3 Definição Uma função f é **diferenciável em a** se $f'(a)$ existir. É **diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

EXEMPLO 6 □ Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

SOLUÇÃO Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $x + h > 0$ e ainda $|x + h| = x + h$. Conseqüentemente, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $x + h < 0$ e, assim, $|x + h| = -(x + h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

e dessa forma f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

Para $x = 0$ temos de verificar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

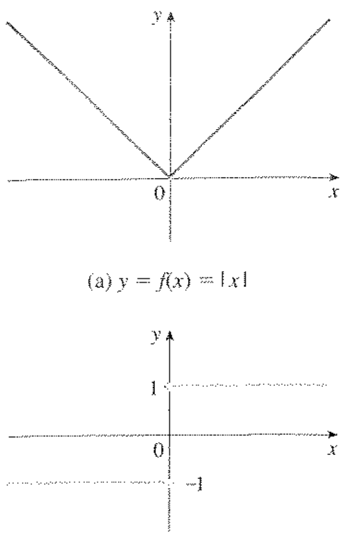
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(se ele existe)}$$

Vamos computar o limite esquerdo e o direito:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e $$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe. Portanto, f é diferenciável para todo x, exceto em 0.



(a) $y = f(x) = |x|$

(b) $y = f'(x)$

FIGURA 6

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico está ilustrado na Figura 6(b). O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em $(0, 0)$. [Veja a Figura 6(a).]

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis para uma função. O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas

4 Teorema Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Prova Para provar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.8.3). Para conectar o dado com o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Assim, usando a Lei do Produto e a Equação 2.8.3, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para usar o que acabamos de provar, vamos começar com $f(x)$ e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, f é contínua em a.

NOTA ▫ A recíproca do Teorema 4 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em 0, pois

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Veja o Exemplo 7 na Seção 2.3.) Mas no Exemplo 6 mostramos que f não é diferenciável em 0.

Como Pode uma Função Deixar de Ser Diferenciável?

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 6 não é diferenciável em 0, e a Figura 6(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção. Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto, e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que o limite esquerdo e o direito são diferentes.)

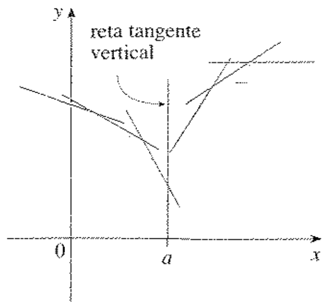


FIGURA 7

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se f for descontínua em a, então f não será diferenciável em a. Assim, em toda descontinuidade de f (por exemplo, um pulo de descontinuidade), ela deixa de ser diferenciável.

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** em $x = a$, isto é, f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$. A Figura 7 mostra uma forma de isso acontecer, e a Figura 8(c), outra. A Figura 8 ilustra as três possibilidades discutidas.

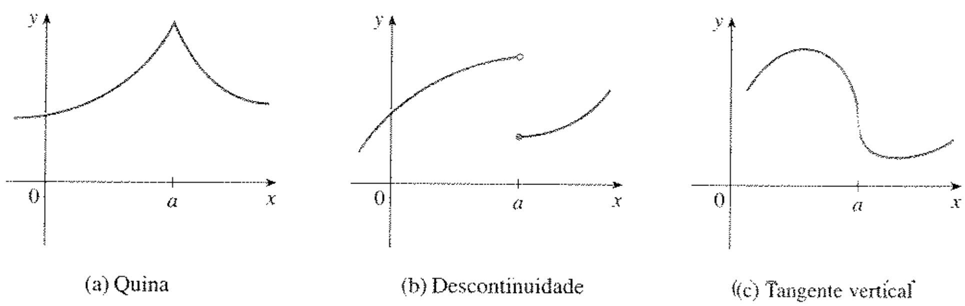


FIGURA 8
Três formas de f deixar de ser diferenciável em a

As calculadoras gráficas e os computadores são outra possibilidade de análise da diferenciabilidade. Se f for diferenciável em a, então, se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, f(a))$, o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta (veja a Figura 9. Vimos um exemplo específico na Figura 3 da Seção 2.8). Por outro lado, independentemente da maneira como dermos o *zoom* em direção a pontos como os das Figuras 7 e 8(a), não poderemos eliminar a ponta aguda ou quina (veja a Figura 10).

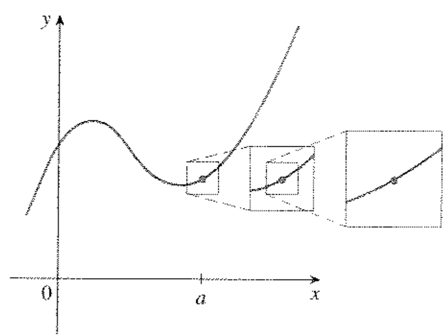


FIGURA 9
f é diferenciável em a

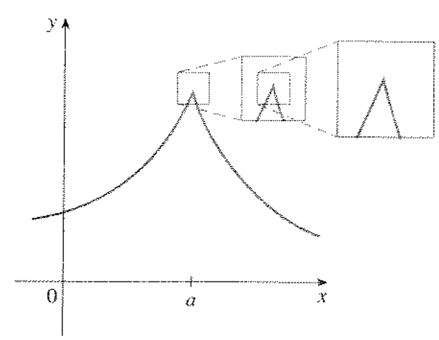
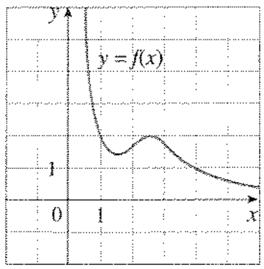


FIGURA 10
f não é diferenciável em a

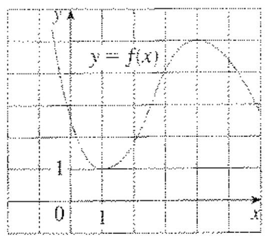
2.9 Exercícios

1–3 □ Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

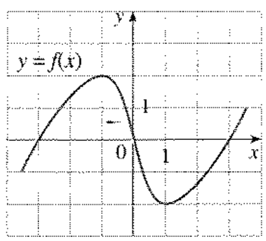
1. (a) $f'(1)$
(b) $f'(2)$
(c) $f'(3)$
(d) $f'(4)$



2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

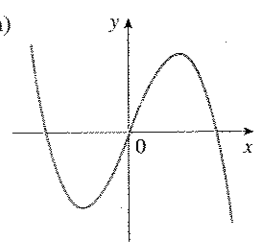


3. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

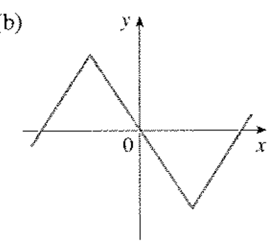


4. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

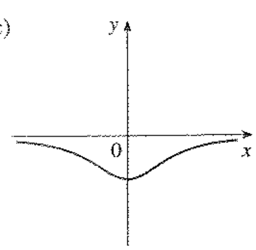
(a)



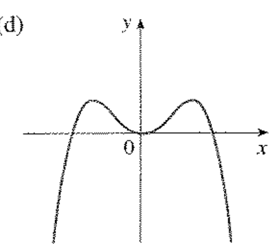
(b)



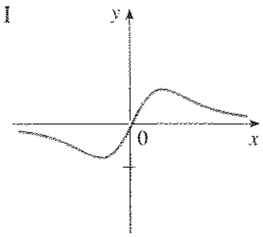
(c)



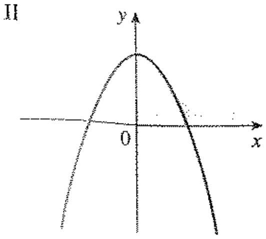
(d)



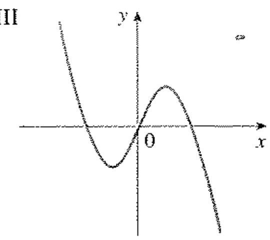
I



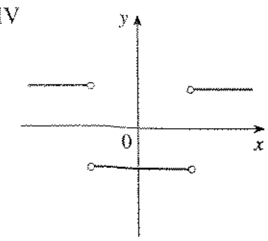
II



III

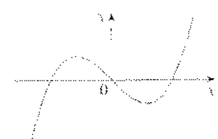


IV

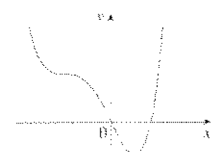


5–13 □ Trace ou copie o gráfico de f. (Suponha os eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

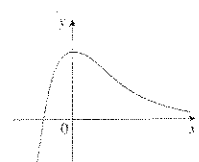
5.



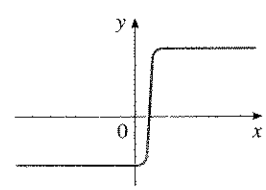
6.



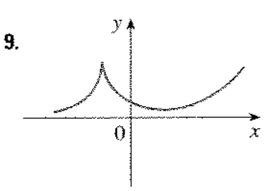
7.



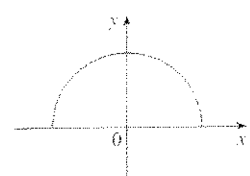
8.



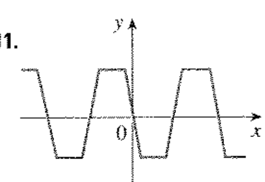
9.



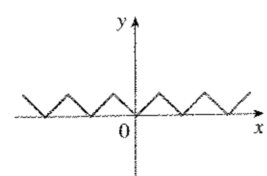
10.



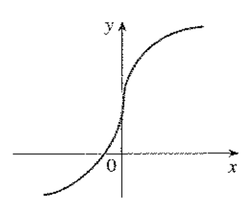
11.



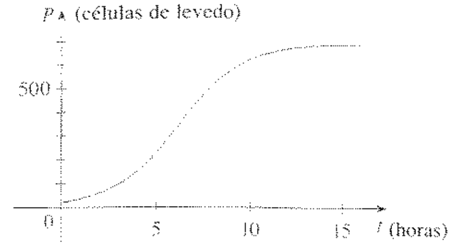
12.



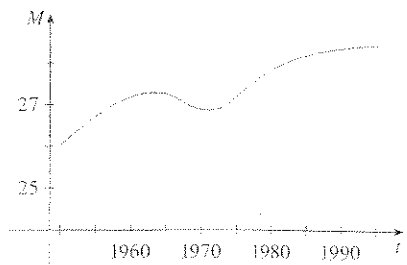
13.



14. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$, de cultura em laboratório, de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população da levedo?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses que se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Quais os anos que a derivada foi negativa?



16–18 □ Faça um esboço cuidadoso de f e desenhe o gráfico de f' como nos Exercícios 5-13. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de um recurso gráfico para um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para provar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de um recurso gráfico para um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para provar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 □ Encontre a derivada da função dada usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = 37$

22. $f(x) = 12 + 7x$

23. $f(x) = 1 - 3x^2$

24. $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

28. $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

29. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$

30. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

31. $f(x) = x^4$

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?

(d) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico f' e compare-o com o esboço de (b).

33. (a) Se $f(x) = x - (2/x)$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(t) = 6/(1 + t^2)$, encontre $f'(t)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela (do Bureau of Labor Statistics) dá a porcentagem de desemprego na força de trabalho norte-americana de 1991 a 2000.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1991	6,8	1996	5,4
1992	7,5	1997	4,9
1993	6,9	1998	4,5
1994	6,1	1999	4,2
1995	5,6	2000	4,0

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

36. Seja $P(t)$ a porcentagem de norte-americanos menores de 18 anos no tempo t. A tabela dá os valores dessa função nos censos realizados de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31,1	1980	28,0
1960	35,7	1990	35,7
1970	34,0	2000	17,2

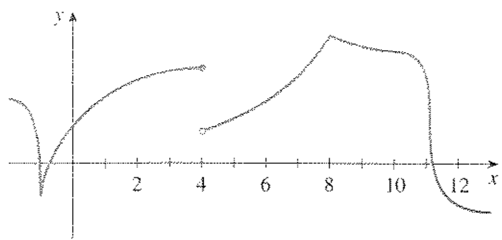
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.

(c) Faça os gráficos de P e P'.

(d) Como seria possível obter valores mais precisos para $P'(t)$?

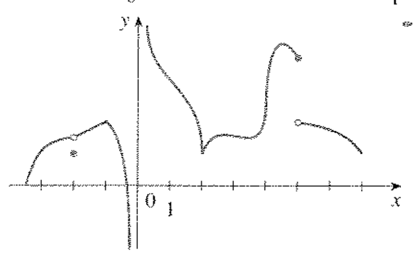
37. O gráfico de f é dado. Estabeleça, explicando, os números nos quais f não é diferenciável.



38. O gráfico de g é dado.

(a) Em quais números g é descontínua? Por quê?

(b) Em quais números g não é diferenciável? Por quê?



39. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê um *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e então em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f nas vizinhanças desses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

40. Dê um *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você nota? Relate o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

41. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.8.3 para encontrar $f'(a)$.

(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Lembre-se da forma do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

42. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.

(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.

(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente em $(0, 0)$.

(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

43. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

44. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

45. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.

(b) Para que os valores de x são f diferenciáveis?

(c) Encontre uma fórmula para f'.

46. A **derivada esquerda** e a **direita** de f em a são definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se e somente se essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.

(a) Encontre $f'_{-}(4)$ e $f'_{+}(4)$ encontre a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.

(c) Onde f é descontínua?

(d) Onde f não é diferenciável?

47. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Prove cada uma das afirmativas a seguir.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

48. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está correndo.

(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função de t, que decorreu desde que a torneira foi aberta.

(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.

(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

49. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ correta até o grau mais próximo.

2 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
   (a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
   (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
   (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
2. Descreva as várias situações para que um limite possa não existir. Ilustre-as com uma figura.
3. Enuncie cada uma das seguintes Leis do Limite.
   (a) Lei da Soma (b) Lei da Diferença
   (c) Lei do Múltiplo Constante (d) Lei do Produto
   (e) Lei do Quociente (f) Lei da Potência
   (g) Lei da Raiz
4. O que afirma o Teorema do Confronto?
5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace as curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
   (b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace as curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?
   (a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \operatorname{tg} x$
   (d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
   (g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$
7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
   (b) Qual o significado de f ser contínua em intervalos $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?
8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?
9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.
10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no instante t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?
11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte.
    (a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
    (b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.
12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.
13. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
    (b) Que relação subsiste entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
    (c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas que não é diferenciável em $a = 2$.
14. Descreva as várias situações para que uma função não seja diferenciável. Ilustre-as com figuras.

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se o que está estabelecido é falso ou verdadeiro. Se verdadeiro, explique por quê. Se falso, explique por que ou dê um contra-exemplo do que está estabelecido.

1. $\lim_{x \to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim_{x \to 4}\dfrac{2x}{x-4} - \lim_{x \to 4}\dfrac{8}{x-4}$
2. $\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \dfrac{\lim_{x \to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x \to 1}(x^2+5x-6)}$
3. $\lim_{x \to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim_{x \to 1}(x-3)}{\lim_{x \to 1}(x^2+2x-4)}$
4. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.
5. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.
6. Se $\lim_{x \to 6} f(x)g(x)$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.
7. Se p for um polinômio, então $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.
8. Se $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x \to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.
9. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.
10. Se f em domínio $[0, \infty]$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
11. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.
12. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.
13. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.
14. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.
15. Seja f uma função tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$. Então existe um número δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.
16. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.
17. Se f for contínua em a, f é diferenciável em a.
18. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$.

EXERCÍCIOS

1. É dado o gráfico de f.

(a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.

(i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$

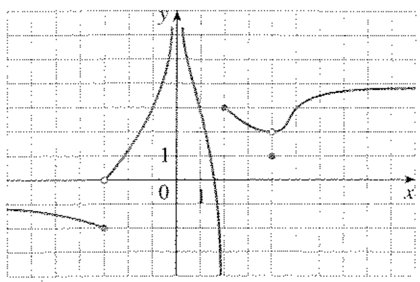
(v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(b) Estabeleça as equações das assíntotas horizontais.

(c) Estabeleça as equações das assíntotas verticais.

(d) Em que números f é descontínua? Explique.



2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $f(0) = -1$,

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

3–22 ▫ Encontre o limite.

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(h-1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{s \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{s}}{s - 16}$

12. $\lim_{v \to 2} \dfrac{v^2 + 2v - 8}{v^4 - 16}$

13. $\lim_{x \to 8^-} \dfrac{|x - 8|}{x - 8}$

14. $\lim_{x \to 9^+} \left(\sqrt{x - 9} + [\![x + 1]\!]\right)$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

16. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x}$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 + 2x - x^2}{1 - x + 2x^2}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 2}{2x^3 + x - 3}$

19. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

20. $\lim_{x \to 10^-} \ln(100 - x^2)$

21. $\lim_{x \to \infty} e^{-3x}$

22. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x^3 - x)$

23–24 ▫ Use os gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então prove o que você descobriu.

23. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

25. Se $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

26. Prove que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

27–30 ▫ Prove cada uma das igualdades usando a definição precisa de limite.

27. $\lim_{x \to 5} (7x - 27) = 8$

28. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$

30. $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

31. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3 - x & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir.

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(b) Onde f é descontínua?

(c) Esboce o gráfico de f.

32. Seja

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.

(b) Esboce o gráfico de g.

33–34 ▫ Mostre que a função é contínua em seu domínio. Estabeleça o domínio.

33. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

34. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

35–36 □ Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

35. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

36. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

37. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

38. Encontre as equações da reta tangente à curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

nos pontos com a coordenada x, 0 e -1.

39. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + t^2/4$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1, 1{,}5]$ (iv) $[1, 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

40. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P com o volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 800$, onde P é medido em libras por polegada quadrada e V é medido em polegadas cúbicas.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 200 pol³ para 250 pol³.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

41. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

42. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

43. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de r% ao ano é $C = f(r)$.

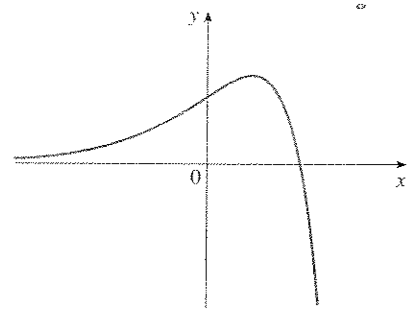
(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1.200$?

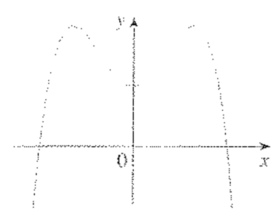
(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

44–46 □ Trace ou copie o gráfico da função. Então esboce o gráfico de sua derivada.

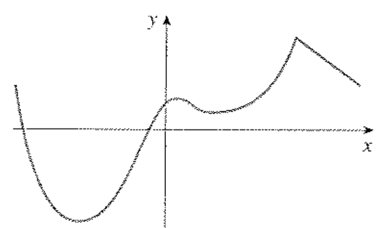
44.



45.



46.



47. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(b) Encontre os domínios de f e f'.

(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

48. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de

$$f(x) = \frac{4-x}{3+x}$$

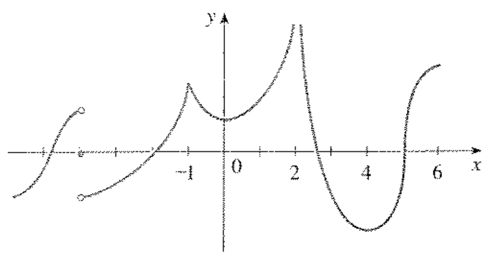
e use-as para esboçar o gráfico.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use um recurso computacional para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

49. É dado o gráfico de f. Estabeleça, com explicações, os números nos quais f não é diferenciável.

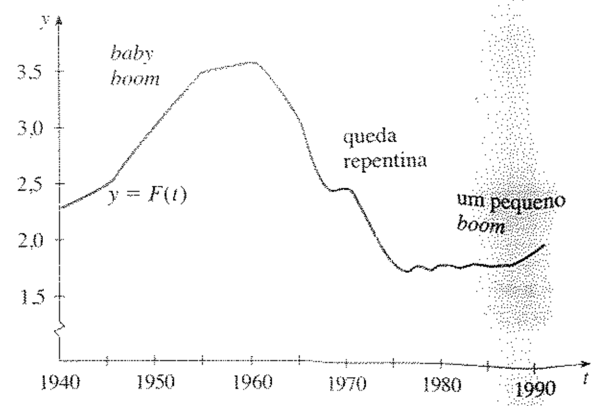


50. A *taxa de fertilidade total* no instante t é denotada por $F(t)$ e é uma estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total nos Estados Unidos mostra as flutuações de 1940 a 1990.

(a) Estime os valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ e $F'(1987)$.

(b) Qual o significado dessas derivadas?

(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?



51. Seja $B(t)$ o valor total de moeda norte-americana em circulação no instante t. A tabela fornece os valores dessa função de 1980 a 1998, ao fim de cada ano, em bilhões de dólares. Interprete e estime o valor de $B'(1990)$.

t	$B(t)$
1980	124,8
1985	182,0
1990	268,2
1995	401,5
1998	492,2

52. Faça o gráfico da curva $y = (x+1)/(x-1)$ e das retas tangentes à curva nos pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$.

53. Suponha que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

54. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) Em quais números f é descontínua?

Problemas Quentes

Em uma discussão anterior consideramos a estratégia de *introduzir alguma coisa extra* no problema–solução (veja a página 78). No exemplo a seguir vamos mostrar como esse princípio é algumas vezes proveitoso quando calculamos os limites. A idéia é mudar a variável – introduzir uma nova variável relacionada à original – de forma a tornar mais simples o problema. Mais tarde, na Seção 5.5, faremos uso mais extensivo dessa idéia geral.

Exemplo 1 Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, onde c é uma constante.

Solução Colocado dessa forma, esse limite parece desafiador. Na Seção 2.3 calculamos vários limites nos quais tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero. Lá nossa estratégia foi realizar algum tipo de manipulação algébrica que levasse a um cancelamento simplificador, porém aqui não está claro que tipo de álgebra será necessário.

Assim, introduzimos uma nova variável t pela equação

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

Também necessitamos expressar x em termos de t, e então resolvemos esta equação:

$$t^3 = 1 + cx$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Note que $x \to 0$ é equivalente a $t \to 1$. Isso nos permite converter o limite dado em outro envolvendo a variável t:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}\end{aligned}$$

A mudança de variável nos permitiu substituir um limite relativamente complicado por um mais simples de um tipo já visto antes. Fatorando o denominador como uma diferença de cubos, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}\end{aligned}$$

As questões a seguir se destinam a testar e desafiar suas habilidades em problema–solução. Algumas delas requerem uma considerável quantidade de tempo para serem resolvidas; assim sendo, não se desencoraje se não puder resolvê-las de imediato. Se você tiver dificuldades, pode ser proveitoso rever a discussão sobre os princípios do problema–solução da página 78.

Problemas

1. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

2. Encontre números a e b tais que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$.

3. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$.

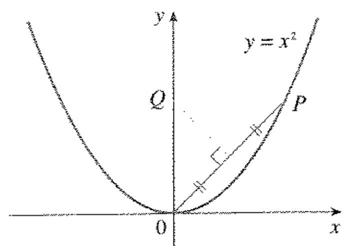


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular bissecta OP e intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

5. Se $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro, encontre $\lim_{x\to\infty} x/[\![x]\!]$.

6. Esboce a região do plano definida em cada uma das seguintes equações.
(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x+y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leqslant a \\ x^2 & \text{se } x > a \end{cases}$$

8. Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)
(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.
(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?
(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

9. Se $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

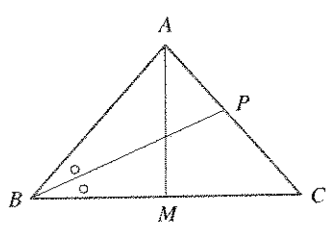


FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. (a) A figura mostra um triângulo isósceles ABC com $\angle B = \angle C$. A bissetriz do ângulo B intercepta o lado AC em um ponto P. Suponha que a base BC permaneça fixa, mas a altura $|AM|$ do triângulo tende a 0, de forma que A tenda ao ponto médio M de BC. O que acontece com o ponto P durante esse processo? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.
(b) Tente esboçar a trajetória descrita por P durante esse processo. Então encontre a equação dessa curva e use-a para esboçar a curva.

11. (a) Se começarmos da latitude 0° e procedermos na direção oeste, poderemos denotar $T(x)$ como a temperatura de um ponto x em um dado instante. Supondo que T é uma função contínua de x, mostre que a todo instante fixo existe pelo menos dois pontos diametralmente opostos sobre o Equador com exatamente a mesma temperatura.
(b) O resultado da parte (a) é verdadeiro para os pontos sobre qualquer círculo sobre a superfície da Terra?
(c) O resultado da parte (a) vale para a pressão barométrica e para a altura acima do nível do mar?

12. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponha que f é uma função que satisfaz a equação $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos os números reais x e y. Suponha também que

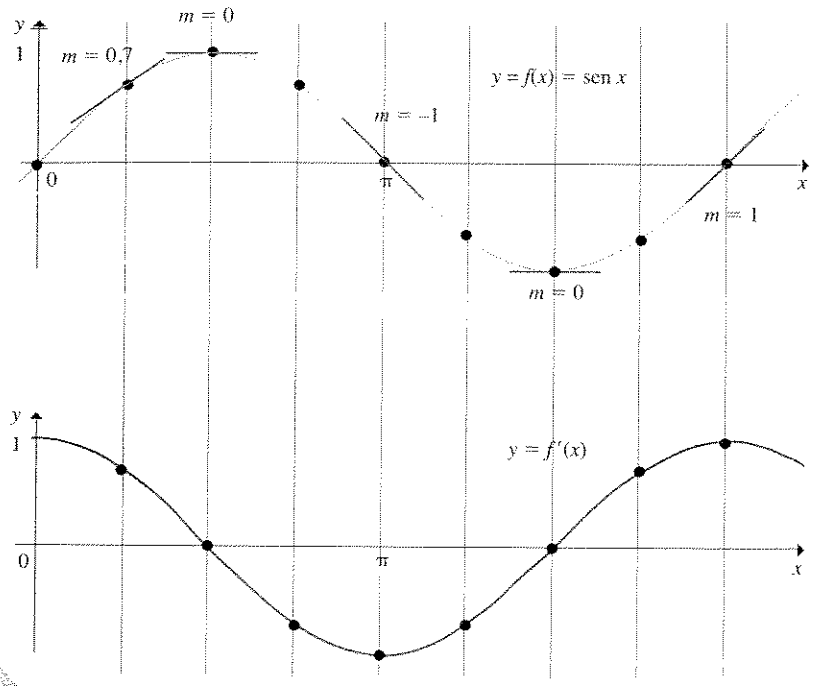
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

14. Suponha que f é uma função com a propriedade $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$. Então mostre que $f'(0) = 0$.

3

Regras de Diferenciação



Medindo as declividades nos pontos da curva da função seno, temos uma evidência visual muito forte de que a derivada da função seno é a função cosseno.

Vimos que as derivadas são interpretadas como as inclinações e as taxas de variação. E vimos como estimar as derivadas de funções dadas pelas tabelas de valores. Aprendemos a fazer os gráficos de derivadas de funções definidas graficamente. Usamos a definição de uma derivada para calcular as derivadas de funções definidas pelas fórmulas. Mas seria tedioso se sempre usássemos a definição; logo, neste capítulo desenvolveremos regras para encontrar as derivadas sem ter de usar diretamente a definição. Essas regras de diferenciação capacitam-nos a calcular com facilidade relativa as derivadas de polinômios, funções racionais, funções algébricas, funções exponenciais e logarítmicas e funções trigonométricas e inversas trigonométricas. Então, usaremos essas regras para resolver os problemas envolvendo as taxas de variação e aproximação de funções.

3.1 Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

Nesta seção vamos aprender como diferenciar as funções constantes, funções potências funções polinomiais e exponenciais.

Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante, $f(x) = c$. O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo, devemos ter $f'(x) = 0$ (veja a Figura 1). Uma prova formal da definição de uma derivada é fácil:

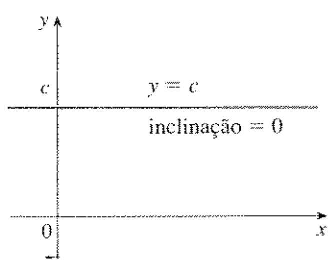


FIGURA 1
O gráfico de $f(x) = c$ é a reta $y = c$; dessa forma, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

A seguir vamos escrever essas regras na notação de Leibniz.

Derivadas de uma Função Constante $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

Função Potência

Vamos olhar a função $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1 (veja a Figura 2). Logo

1 $$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

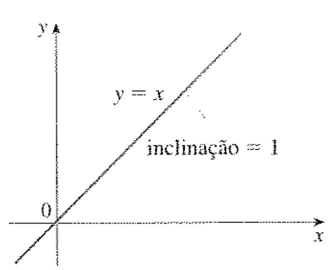


FIGURA 2
O gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$; assim, $f'(x) = 1$

(Você também pode verificar a Equação 1 a partir da definição de uma derivada.) Temos já investigado os casos onde $n = 2$ e $n = 3$. De fato, na Seção 2.9 (Exercícios 19 e 20) determinamos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$ achamos a derivada de $f(x) = x^4$ a seguir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Assim

$$\boxed{3} \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando as equações em (1), (2) e (3), vimos um modelo emergente. Parece ser uma suposição razoável achar que, quando n é um número inteiro, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Essa suposição pode ser provada de duas maneiras, e a segunda prova usa o Teorema Binomial.

Regra da Potência Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Primeira Prova A fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

pode ser simplesmente verificada multiplicando-se o lado direito (ou somando-se o segundo fator como uma série geométrica). Se $f(x) = x^n$, podemos usar a Equação 2.8.3 para $f'(a)$ e a equação anterior para escrever

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$
$$= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1}$$
$$= na^{n-1}$$

Segunda Prova

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

□ O Teorema Binomial é dado ao final do livro.

Para achar a derivada de x^4 desenvolvemos $(x + h)^4$. Aqui precisamos desenvolver $(x + h)^n$, e usamos o Teorema Binomial para fazer isto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]$$

$$= nx^{n-1}$$

porque todo termo, exceto o primeiro, tem h como um fator, conseqüentemente tende a 0.

Ilustraremos a Regra da Potência usando várias notações no Exemplo 1.

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$. (b) Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos? No Exercício 53 solicitamos que você verifique, da definição de uma derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

logo, a Regra da Potência é verdadeira quando $n = -1$. De fato, mostraremos na próxima seção [Exercício 44(c)] que isso é assegurado para todo inteiro negativo.

E se o expoente for uma fração? No Exemplo 3 da Seção 2.7 encontramos, na verdade, que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Isso mostra que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = \frac{1}{2}$. Na realidade, mostraremos na Seção 3.8 que ela é verdadeira para todo número real n.

A Regra da Potência (Versão Geral) Se n for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EXEMPLO 2 □ Diferencie:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUÇÃO Em cada caso reescrevemos a função como uma potência de x.

(a) Uma vez que $f(x) = x^{-2}$, usamos a Regra da Potência com $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

□ A Figura 3 ilustra a função y do Exemplo 2(b) e sua derivada y'. Note que y não é diferenciável em 0 (y' não está definida lá). Observe que y' é positiva quando y cresce, e é negativa quando y decresce.

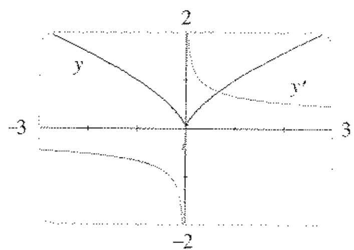


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EXEMPLO 3 □ Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto $(1, 1)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e sua reta tangente.

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Logo a inclinação da reta tangente em $(1, 1)$ é $f'(1) = \frac{3}{2}$. Portanto, uma equação da reta tangente é

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

Vamos fazer o gráfico da curva e sua reta tangente na Figura 4.

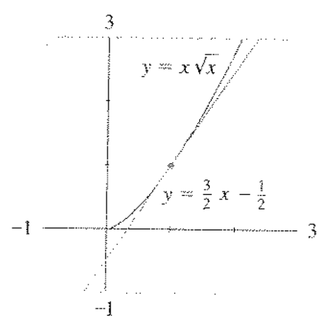


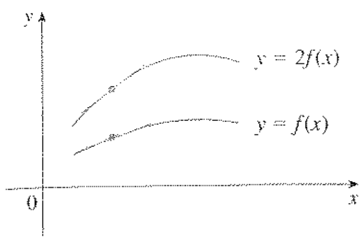
FIGURA 4

Novas Derivadas a partir das Antigas

Quando as novas funções são formadas a partir das antigas funções por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das antigas funções. Em particular, a fórmula a seguir nos diz que *a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função*.

> **A Regra do Múltiplo Constante** Se c for uma constante e f uma função diferenciável, então
>
> $$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Interpretação Geométrica da Regra do Múltiplo Constante



A multiplicação por $c = 2$ estica o gráfico verticalmente por um fator de 2. Todas as subidas têm de ser dobradas, mas a corrida continua a mesma. Logo as inclinações ficam dobradas também.

Prova Seja $g(x) = cf(x)$. Então

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(Pela Lei nº 3 do limite)}$$

$$= cf'(x)$$

EXEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

A regra a seguir nos diz que *a derivada de uma soma de funções é uma soma das derivadas de suas funções.*

A Regra da Soma Se f e g forem ambas diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Usando a notação linha, podemos escrever a Regra da Soma como

$$(f+g)' = f' + g'$$

Prova Seja $F(x) = f(x) + g(x)$. Então

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(Pela Lei nº 1)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções. Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f+g) + h]' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'$$

Escrevendo $f - g$ como $f + (-1)g$ e aplicando a Regra da Soma e a Regra do Múltiplo Constante, obtemos a seguinte fórmula.

Regra da Diferença Se f e g forem ambas diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para diferenciar qualquer polinômio, como demonstram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 5 □

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\
&\qquad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\
&\qquad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\
&\qquad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 □ Ache os pontos sobre a curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ onde a reta tangente é horizontal.

SOLUÇÃO As tangentes horizontais ocorrem quando a derivada for zero. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\
&= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)
\end{aligned}$$

Assim, $dy/dx = 0$ se $x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, isto é, $x = \pm\sqrt{3}$. Logo a curva dada tem tangentes horizontais quando $x = 0$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Os pontos correspondentes são $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ e $(-\sqrt{3}, -5)$ (veja a Figura 5).

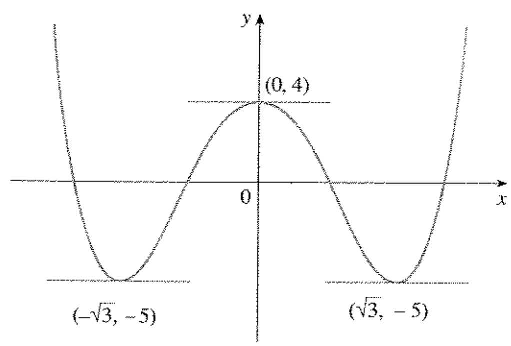


FIGURA 5
A curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ e suas tangentes horizontais

Funções Exponenciais

Vamos tentar computar a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ usando a definição de uma derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

O fator a^x não depende de h, logo podemos colocá-lo adiante do limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Note que o limite é o valor da derivada de f em 0, isto é,

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Portanto, mostramos que se a função exponencial $f(x) = a^x$ for diferenciável em 0, então é diferenciável em toda a parte e

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)\, a^x$$

Essa equação diz que *a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à sua função*. (A inclinação é proporcional à altura.)

Uma evidência numérica para a existência de $f'(0)$ é dada na tabela para o caso $a = 2$ e $a = 3$. (Os valores são enunciados corretos até a quarta casa decimal. Para o caso $a = 2$, veja o Exemplo 3 da Seção 2.8.) Mostra-se que o limite existe e

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,7177	1,1612
0,01	0,6956	1,1047
0,001	0,6934	1,0992
0,0001	0,6932	1,0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10$$

De fato, como mostraremos na Seção 5.6, pode ser provado que o limite existe e, correto até a sexta casa decimal, os valores são

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0{,}693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1{,}098612$$

Assim, da Equação 4 temos

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x$$

De todas as possíveis escolhas para a base a do Exemplo 4, a fórmula de diferenciação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$. Em consideração da estimativa de $f'(0)$ para $a = 2$ e $a = 3$, parece ser razoável que haja um número a entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. É tradicional denotar esse valor pela letra e. (De fato, foi assim que introduzimos e na Seção 1.5.) Dessa forma, temos a seguinte definição.

No Exercício 1 veremos que e situa-se entre 2,7 e 2,8. Na Seção 5.6, a definição dada de e nos possibilita mostrar que, correto até a quinta casa decimal,

$$e \approx 2{,}71828$$

Definição do Número e

$$e \text{ é um número tal que } \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geometricamente, isso significa que de todas as possíveis funções exponenciais $y = a^x$, a função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente em $(0, 1)$ tem uma inclinação $f'(0)$ que é exatamente 1 (veja as Figuras 6 e 7).

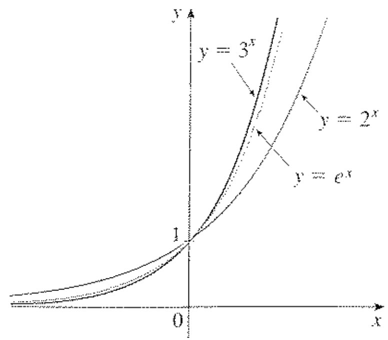


FIGURA 6

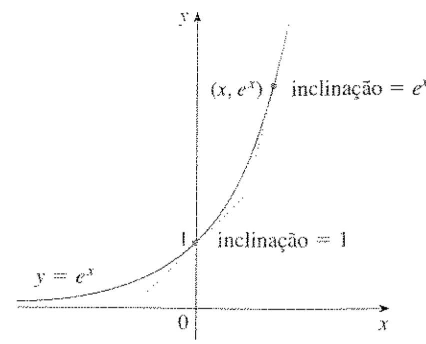


FIGURA 7

Se pusermos $a = e$ e, conseqüentemente, $f'(0) = 1$ na Equação 4, teremos a seguinte importante fórmula de diferenciação.

Derivadas da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem como propriedade o fato de que sua derivada é ela mesma. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

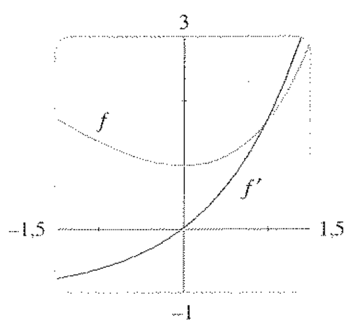


FIGURA 8

EXEMPLO 7 □ Se $f(x) = e^x - x$, ache f'. Compare o gráfico de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

A Figura 8 mostra o gráfico da função f e sua derivada f'. Note que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Note também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente. □

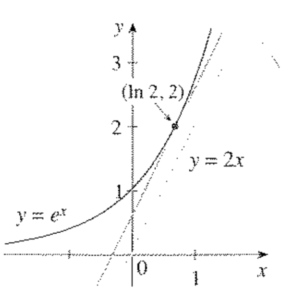


FIGURA 9

EXEMPLO 8 □ Em que ponto da curva $y = e^x$ a reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Seja a a coordenada x do ponto em questão. Então a inclinação da reta tangente naquele ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, isto é, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto requerido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9). □

3.1 Exercícios

1. (a) Como o número e está definido?
   (b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h\to 0}\frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

   corretos até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?
   (b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de diferenciação para f e g.
   (c) Quais das funções da parte (b) crescem mais rapidamente quando x é muito grande?

3–32 Diferencie a função.

3. $f(x) = 186{,}5$
4. $f(x) = \sqrt{30}$
5. $f(x) = 5x - 1$
6. $F(x) = -4x^{10}$
7. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
8. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$
9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$
10. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$
11. $y = x^{-2/5}$
12. $y = 5e^x + 3$
13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
14. $R(t) = 5t^{-3/5}$
15. $Y(t) = 6t^{-9}$
16. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$
17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$
18. $y = \sqrt[3]{x}$
19. $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$
20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
21. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
22. $y = \sqrt{x}(x-1)$
23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$
25. $y = 4\pi^2$
26. $g(u) = \sqrt{2u} + \sqrt{3u}$
27. $y = ax^2 + bx + c$
28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$
29. $v = t^2 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$
30. $u = \sqrt[3]{t^2} + 2\sqrt{t^3}$
31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$
32. $y = e^{x+1} + 1$

33–36 Ache $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

33. $f(x) = e^x - 5x$
34. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$
35. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$
36. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

37–38 Estime o valor de $f'(a)$ dando um *zoom* no gráfico de f. Depois derive f e determine o valor exato de $f'(a)$ e compare com a sua estimativa.

37. $f(x) = 3x^2 - x^3$, $a = 1$
38. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $a = 4$

39–40 Ache uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

39. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$
40. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

41–42 Ache uma equação da reta tangente à curva no ponto dado. Ilustre fazendo o gráfico da curva e a reta tangente sobre a mesma tela.

41. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$
42. $y = x\sqrt{x}$, $(4, 8)$

43. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ em uma janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
    (b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço rudimentar, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.9).
    (c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão com um recurso gráfico, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

44. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
    (b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar a inclinação, faça um esboço rudimentar, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.9).
    (c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com um recurso gráfico, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

45. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

46. Quais são os valores de x que fazem que o gráfico $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tenha tangentes horizontais?

47. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com a inclinação 4.

48. Em quais pontos sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ está a reta tangente paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e ambas as retas.

49. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passa por meio do ponto $(0, -4)$. Ache as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes intersectam a parábola.

50. Ache as equações das retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.

51. **A reta normal** à curva C em um ponto P é, pela definição, a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente a C em P. Ache uma equação da reta normal à parábola $y = 1 - x^2$ no ponto $(2, -3)$. Esboce a parábola e sua reta normal.

52. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

53. Use a definição de derivada para mostrar que se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso prova a Regra da Potência para o caso onde $n = -1$.)

54. Ache a parábola com a equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tenha a equação $y = 3x - 2$.

55. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f é diferenciável em 1? Esboce os gráficos de f e f'.

56. Em quais números a seguinte função g é diferenciável?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

57. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é diferenciável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce os gráficos de f e f'.

58. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é diferenciável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

59. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

60. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Ache os valores de m e b que façam f diferenciável em toda a parte.

61. Ache uma função cúbica

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

cujo gráfico tem tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

62. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta corta a partir dessa reta tangente pelo eixo coordenado é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e os eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

63. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1.000} - 1}{x - 1}$.

64. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas as tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

3.2 As Regras do Produto e do Quociente

As fórmulas desta seção nos permitem diferenciar novas funções formadas a partir das antigas funções por multiplicação ou divisão.

A Regra do Produto

Por analogia com as Regras da Soma e da Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz o fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Podemos ver, contudo, que a conjectura descrita está errada examinando um exemplo particular. Seja $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra do Produto fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, assim $(fg)'(x) = 3x^2$. Dessa forma, $(fg)' \neq f'g'$. A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada Regra do Produto.

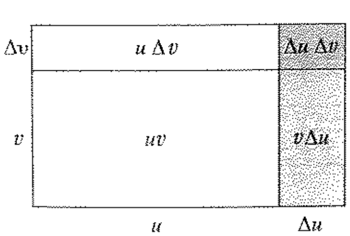


FIGURA 1
Geometria da Regra do Produto

Depois de formular a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-lo. No caso onde $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções positivas, podemos interpretar o produto uv como uma área de um retângulo (veja a Figura 1). Se x variar uma quantidade Δx, temos a variação correspondente em u e v como se segue

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e um novo valor do produto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, pode ser interpretado como a área do maior triângulo da Figura 1 (com Δu e Δv positivos).

A variação na área do retângulo é

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$= \text{soma das três áreas sombreadas}$$

Se dividirmos por Δx, obteremos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Lembre-se de que na notação de Leibniz a definição de uma derivada pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$, obteremos a derivada de uv:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$
$$= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$
$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Note que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que f é diferenciável e, portanto, contínua.)

Embora comecemos assumindo (para a interpretação geométrica) que todas as quantidades são positivas, vemos que a Equação 1 é sempre verdadeira. (A álgebra é válida se u, v, Δu e Δv forem positivas ou negativas.) Assim demonstramos a Equação 2, conhecida como a Regra do Produto, para todas as funções diferenciáveis de u e v.

Na notação "linha":

$$(fg)' = fg' + gf'$$

A Regra do Produto Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função*.

A Figura 2 ilustra os gráficos da função f do Exemplo 1 e suas derivadas f'. Note que $f'(x)$ é positiva quando f está crescendo e negativa quando f está decrescendo.

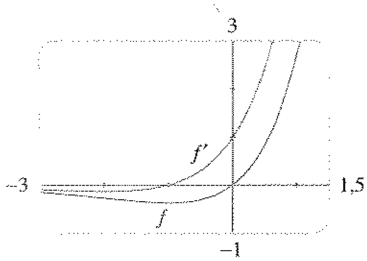


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

SOLUÇÃO Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$
$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x + 1)e^x$$

EXEMPLO 2 Diferencie a função $f(t) = \sqrt{t}\,(1 - t)$.

SOLUÇÃO 1 Usando a Regra do Produto, temos

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(1 - t) + (1 - t)\,\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= \sqrt{t}\,(-1) + (1 - t) \cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$= -\sqrt{t} + \frac{1 - t}{2\sqrt{t}} = \frac{1 - 3t}{2\sqrt{t}}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro usarmos as leis dos expoentes para reescrever $f(t)$, então poderemos prosseguir diretamente sem usar a Regra do Produto.

$$f(t) = \sqrt{t} - t\sqrt{t} = t^{1/2} - t^{3/2}$$

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}t^{-1/2} - \tfrac{3}{2}t^{1/2}$$

que é igual à resposta dada na Solução 1.

O Exemplo 2 mostra que algumas vezes é mais fácil simplificar um produto de funções do que usar a Regra do Produto. No Exemplo 1, entretanto, a Regra do Produto é o único método possível.

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, onde $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$, encontre $f'(4)$.

SOLUÇÃO Aplicando a Regra do Produto, obtemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Conseqüentemente

$$f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6{,}5$$

EXEMPLO 4 Uma companhia telefônica quer estimar o número de novas linhas residenciais que deverá instalar em um dado mês. No início de janeiro tinha 100.000 assinantes, cada um com 1,2 linha, em média. A companhia estimou o crescimento das assinaturas a uma taxa mensal de 1.000. Pesquisando os assinantes existentes, descobriu que cada um pretendia instalar uma média de 0,01 linha telefônica nova até o final de daquele mês. Estime o número de novas linhas que a companhia deverá instalar até o final de janeiro, calculando a taxa de crescimento das linhas no começo do mês.

SOLUÇÃO Seja $s(t)$ o número de assinantes e $n(t)$ o número de linhas telefônicas por assinante em um instante t, onde t é medido em meses e $t = 0$ corresponde ao início de janeiro. Então o número total de linhas é dado por

$$L(t) = s(t)n(t)$$

e precisamos achar $L'(0)$. Segundo a Regra do Produto, temos

$$L'(t) = \frac{d}{dt}\left[s(t)n(t)\right] = s(t)\,\frac{d}{dt}\,n(t) + n(t)\,\frac{d}{dt}\,s(t)$$

Assim, $s(0) = 100.000$ e $n(0) = 1{,}2$. As estimativas da companhia com referência à taxas de crescimento são $s'(0) \approx 1.000$ e $n'(0) \approx 0{,}01$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} L'(0) &= s(0)n'(0) + n(0)s'(0) \\ &\approx 100.000 \cdot 0{,}01 + 1{,}2 \cdot 1.000 = 2.200 \end{aligned}$$

A companhia precisou instalar aproximadamente 2.200 novas linhas telefônicas durante janeiro.

Note que os dois termos que aparecem da Regra do Produto vêm de fontes diferentes – os antigos e novos assinantes. Uma contribuição para L' é um número de assinantes existentes (100.000) vezes a taxa na qual eles ordenam novas linhas (em torno de 0,01 por assinante mensalmente). Uma segunda contribuição é o número médio de linhas por assinante (1,2 no início do mês) vezes a taxa de crescimento dos assinantes (1.000 mensalmente). ◻

A Regra do Quociente

Vamos determinar uma fórmula para diferenciar o quociente de duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $v = g(x)$ do mesmo modo que obtivemos a Regra do Produto. Se x, u e v têm variações Δx, Δu e Δv, respectivamente, então a correspondente variação no quociente u/v será

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

Como g é diferenciável e, portanto, contínua, $\Delta v \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Assim, usando as Leis dos Limites, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

A Regra do Quociente Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Em palavras, a Regra do Quociente diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.*

A Regra do Quociente e as outras fórmulas de diferenciação capacitam-nos a computar a derivada de qualquer função racional, como ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 ◻ Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$.

Então

□ Podemos usar um recurso gráfico para provar que a resposta para o Exemplo 5 é plausível. A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 5 e suas derivadas. Note que quando y cresce rapidamente (próximo de 2), y' é muito grande. E quando y cresce vagarosamente, y' está próximo de 0.

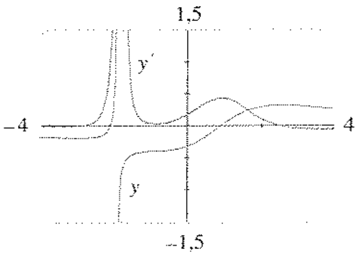


FIGURA 3

$$y' = \frac{(x^3+6)\dfrac{d}{dx}(x^2+x-2) - (x^2+x-2)\dfrac{d}{dx}(x^3+6)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(x^3+6)(2x+1) - (x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$$

EXEMPLO 6 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x/(1+x^2)$ no ponto $(1, e/2)$.

SOLUÇÃO Segundo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)e^x - e^x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

Logo a inclinação da reta tangente em $(1, e/2)$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Isso significa que a reta tangente em $(1, e/2)$ é horizontal, e sua equação é $y = e/2$. [Veja a Figura 4. Observe que a função está crescendo e cruza sua reta tangente em $(1, e/2)$.]

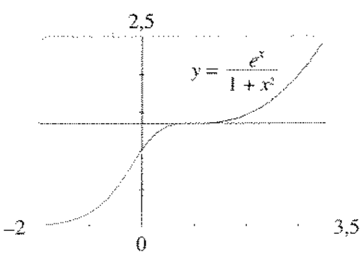


FIGURA 4

NOTA □ Não use a Regra do Quociente *toda vez* que você vir um quociente. Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que é mais simples para a resolução da diferenciação. Por exemplo, embora seja possível diferenciar a função

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

usando a Regra do Quociente, deve ser mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de diferenciar.

A seguir, um resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

Tabela das Regras de Derivação

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 Exercícios

1. Encontre a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de duas maneiras: usando a Regra do Produto e fazendo primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função
$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
de duas maneiras: usando a Regra do Quociente e simplificando primeiro. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–22 □ Diferencie.

3. $f(x) = x^2e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \dfrac{t^2}{3t^2 - 2t + 1}$

14. $y = \dfrac{t^3 + t}{t^4 - 2}$

15. $y = (r^2 - 2r)e^r$

16. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

18. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

19. $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

22. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

23–26 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva em um dado ponto.

23. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0{,}4)$

25. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

26. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

27. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada **bruxa de Maria de Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

28. (a) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, 0{,}3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

29. (a) Se $f(x) = e^x/x^3$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

30. (a) Se $f(x) = x/(x^2 - 1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

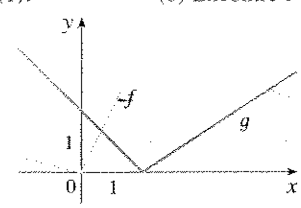
31. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os valores de (a) $(fg)'(5)$, (b) $(f/g)'(5)$ e (c) $(g/f)'(5)$.

32. Se $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ e $g'(3) = 5$, encontre os seguintes números:
(a) $(f + g)'(3)$ (b) $(fg)'(3)$
(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3)$ (d) $\left(\dfrac{f}{f - g}\right)'(3)$

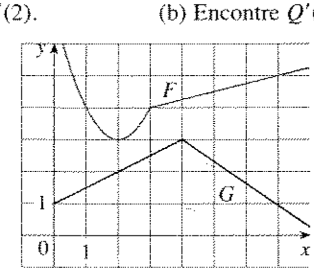
33. Se $f(x) = e^x g(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

34. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

35. Se f e g forem funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.



36. Seja $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$ onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.
(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.



37. Se g é uma função diferenciável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.
(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

38. Se f for uma função diferenciável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções:
(a) $y = x^2f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$
(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

39. Neste exercício estimamos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961.400, e estava crescendo aproximadamente em 9.200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30.593 *per capita*, e essa média estava crescendo em torno de \$ 1.400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1.225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo na cidade em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

40. Um fabricante produz peças de fazenda com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de fazenda (medida em jardas) vendida é uma função do preço p (em dólares por jardas); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então o rendimento total conseguido com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.

(a) O que significa dizer que $f(20) = 10.000$ e $f'(20) = -350$?

(b) Assumindo os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

41. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

42. Encontre as equações de retas tangentes à curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ paralelas à reta $x - 2y = 2$.

43. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para provar que se f, g e h forem diferenciáveis, então

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

(b) Fazendo $f = g = h$ da parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Use a parte (b) para diferenciar $y = e^{3x}$.

44. (a) Se g for diferenciável, a **Regra da Recíproca** afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use a Regra do Quociente para provar a Regra da Recíproca.

(b) Use a Regra da Recíproca para diferenciar a função do Exercício 19.

(c) Use a Regra da Recíproca para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo número positivo n.

3.3 Taxa de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Lembre da Seção 2.8 que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção examinamos algumas das aplicações dessa idéia na física, química, biologia, economia e outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7 que apresentou a idéia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

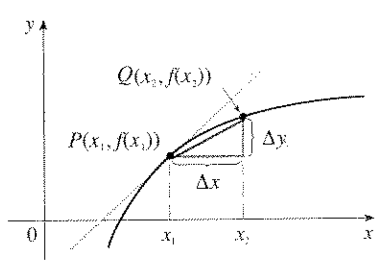
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente da diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a **taxa média da variação de y em relação a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da Figura 1. Seu limite quando $\Delta x \to 0$ é a derivada $f'(x_1)$, que pode ser interpretada como a taxa de variação instantânea de y em relação a x ou a inclinação da reta tangente em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



m_{PQ} = média da taxa de variação

$m = f'(x_1)$ = taxa de variação instantânea

FIGURA 1

Sempre que a função $y = f(x)$ tiver uma interpretação específica em uma das ciências, sua derivada terá uma interpretação específica como uma taxa de variação. (Como discutido na Seção 2.7, as unidades dy/dx são as unidades para y dividido pela unidade de x.) Agora vamos examinar algumas dessas interpretações nas ciências naturais e sociais.

Física

Se $s = f(t)$ for uma função posição de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s/\Delta t$ representa a velocidade média sobre um período de tempo Δt, e $v = ds/dt$ representa a **velocidade** instantânea (a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo). Isso foi discutido nas Seções 2.7 e 2.8, mas agora que conhecemos as fórmulas de diferenciação, estamos habilitados a resolver os problemas de velocidade mais facilmente.

EXEMPLO 1 A posição de uma partícula é dada pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

onde t é medido em segundos e s em metros.
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual é a velocidade após 2 s? Depois de 4 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo para a frente (isto é, no sentido positivo)?
(e) Faça um diagrama para representar o movimento da partícula.
(f) Encontre a distância total percorrida pela partícula durante os primeiros cinco segundos

SOLUÇÃO
(a) A função velocidade é a derivada da função posição.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) A velocidade depois de 2 s é a velocidade instantânea quando $t = 2$, isto é,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

A velocidade depois de 4 s é

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) A partícula está em repouso quando $v(t) = 0$, isto é,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

e isso acontece quando $t = 1$ ou $t = 3$. Dessa forma, a partícula está em repouso após 1 s e depois de 3 s.
(d) A partícula move-se no sentido positivo quando $v(t) > 0$, isto é,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Essa desigualdade é verdadeira quando ambos os fatores forem positivos ($t > 3$) ou quando ambos os fatores forem negativos ($t < 1$). Assim, a partícula move-se no sentido positivo no intervalo de tempo $t < 1$ e $t < 3$. Move-se para trás (no sentido negativo) quando $1 < t < 3$.

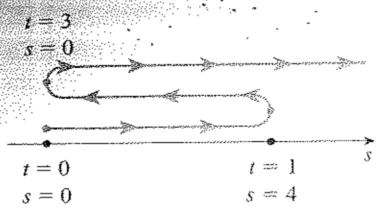


FIGURA 2

(e) Usando as informações da parte (d) fazemos um esquema ilustrativo do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar, ao longo da reta (eixo s) como mostrado na Figura 2.

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante o intervalo de tempo $[0, 1]$, $[1, 3]$ e $[3, 5]$.

A distância percorrida nos primeiros segundos é

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m.

EXEMPLO 2 Se uma barra ou pedaço de fio forem homogêneos, então sua *densidade linear* será uniforme e estará definida como a massa por unidade de comprimento ($\rho = m/l$) medida em quilogramas por metro. Suponha, contudo, que a barra não seja homogênea, mas que sua massa medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x seja $m = f(x)$, conforme mostrado na Figura 3.

FIGURA 3 Esta parte da barra tem massa $f(x)$.

A massa da parte da barra que está situada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$; logo, a densidade média daquela parte da barra é

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$ (isto é, $x_2 \to x_1$), estamos computando a densidade média sobre os intervalos cada vez menores. A **densidade linear** ρ em x_1 é o limite dessa densidade média quando $\Delta x \to 0$; isto é, a densidade linear é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento. Simbolicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Assim, a densidade linear da barra é a derivada da massa em relação ao comprimento.

Por exemplo, se $m = f(x) = \sqrt{x}$, onde x é medida em metros e m em quilogramas, então a densidade média da parte da barra dada em $1 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ é

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m}$$

enquanto a densidade à direita de $x = 1$ é

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m}$$

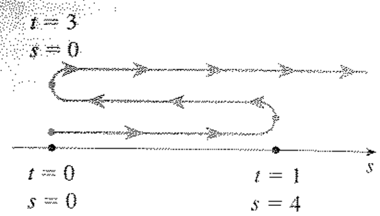


FIGURA 2

(e) Usando as informações da parte (d) fazemos um esquema ilustrativo do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar, ao longo da reta (eixo s) como mostrado na Figura 2.

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante o intervalo de tempo $[0, 1]$, $[1, 3]$ e $[3, 5]$.

A distância percorrida nos primeiros segundos é

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m.

EXEMPLO 2 □ Se uma barra ou pedaço de fio forem homogêneos, então sua *densidade linear* será uniforme e estará definida como a massa por unidade de comprimento ($\rho = m/l$) medida em quilogramas por metro. Suponha, contudo, que a barra não seja homogênea, mas que sua massa medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x seja $m = f(x)$, conforme mostrado na Figura 3.

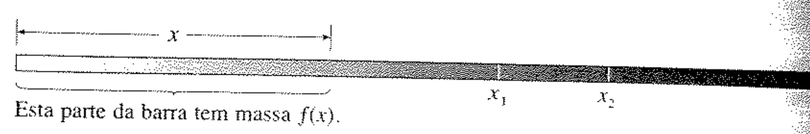


FIGURA 3

A massa da parte da barra que está situada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$; logo, a densidade média daquela parte da barra é

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$ (isto é, $x_2 \to x_1$), estamos computando a densidade média sobre os intervalos cada vez menores. A **densidade linear** ρ em x_1 é o limite dessa densidade média quando $\Delta x \to 0$; isto é, a densidade linear é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento. Simbolicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Assim, a densidade linear da barra é a derivada da massa em relação ao comprimento.

Por exemplo, se $m = f(x) = \sqrt{x}$, onde x é medida em metros e m em quilogramas, então a densidade média da parte da barra dada em $1 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ é

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m}$$

enquanto a densidade à direita de $x = 1$ é

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m} \quad \square$$

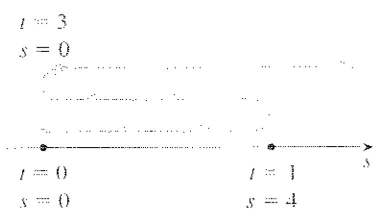


FIGURA 2

(e) Usando as informações da parte (d) fazemos um esquema ilustrativo do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar, ao longo da reta (eixo s) como mostrado na Figura 2.

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante o intervalo de tempo $[0, 1]$, $[1, 3]$ e $[3, 5]$.

A distância percorrida nos primeiros segundos é

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m.

EXEMPLO 2 □ Se uma barra ou pedaço de fio forem homogêneos, então sua *densidade linear* será uniforme e estará definida como a massa por unidade de comprimento ($\rho = m/l$) medida em quilogramas por metro. Suponha, contudo, que a barra não seja homogênea, mas que sua massa medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x seja $m = f(x)$, conforme mostrado na Figura 3.

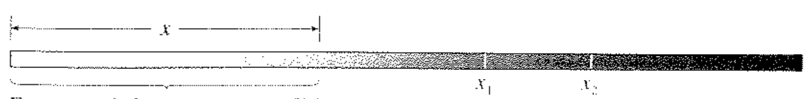


FIGURA 3 Esta parte da barra tem massa $f(x)$.

A massa da parte da barra que está situada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$; logo, a densidade média daquela parte da barra é

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$ (isto é, $x_2 \to x_1$), estamos computando a densidade média sobre os intervalos cada vez menores. A **densidade linear** ρ em x_1 é o limite dessa densidade média quando $\Delta x \to 0$; isto é, a densidade linear é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento. Simbolicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Assim, a densidade linear da barra é a derivada da massa em relação ao comprimento.

Por exemplo, se $m = f(x) = \sqrt{x}$, onde x é medida em metros e m em quilogramas, então a densidade média da parte da barra dada em $1 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ é

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m}$$

enquanto a densidade à direita de $x = 1$ é

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m}$$

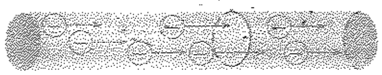


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Uma corrente existe sempre que a carga elétrica se move. A Figura 4 ilustra a parte de um fio e elétrons movimentando-se através de uma superfície plana sombreada. Se ΔQ for a quantidade de carga líquida que passa através dessa superfície durante um período de tempo Δt, então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como

$$\text{corrente média} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre os intervalos de tempo cada vez menores, obteremos o que denominamos **corrente I** em um dado instante t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Assim, a corrente é a taxa na qual o fluxo de carga atravessa uma superfície, medida em unidades de carga por unidade de tempo (freqüentemente coulombs por segundo, chamado ampères).

Além da velocidade, da densidade e da corrente, outras taxas de variação são importantes na física, como a potência (a taxa segundo a qual um trabalho é realizado), a taxa do fluxo de calor, o gradiente da temperatura (a taxa de variação da temperatura em relação à posição) e a taxa de decaimento radioativo de uma substância na física nuclear.

Química

EXEMPLO 4 Uma reação química resulta na formação de uma ou mais substâncias (conhecidas como *produtos*) a partir de um ou mais materiais iniciais (ditos *reagentes*). Por exemplo, a "equação"

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

indica que duas moléculas de hidrogênio e uma molécula de oxigênio formam duas moléculas de água. Consideremos a reação

$$A + B \longrightarrow C$$

onde A e B são reagentes e C é o produto. A **concentração** de um reagente A é o número de mols (1 mol = $6{,}022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro e é denotada por [A]. A concentração varia durante a reação, logo [A], [B] e [C] são funções do tempo (t). A taxa média da reação do produto C sobre um intervalo de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Mas os químicos estão mais interessados na **taxa de reação instantânea**, obtida fazendo-se o limite da taxa de reação média quando o intervalo de tempo Δt tende a 0:

$$\text{taxa de reação} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Uma vez que a concentração do produto aumenta quando a reação avança, a derivada $d[C]/dt$ será positiva. (Você pode ver intuitivamente que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função crescente é positiva.) Assim, a taxa de reação de C é positiva.

A concentração de reagentes, entretanto, decresce durante a reação; logo, para fazer as taxas de reação de A e B números positivos, colocamos sinais de menos na frente das derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ e $d[\mathrm{B}]/dt$. Uma vez que [A] e [B] decrescem na mesma taxa que [C] aumenta, temos

$$\text{taxa de reação} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

Mais geralmente, isso resulta que, para uma reação da forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \longrightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

temos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

A taxa de reação pode ser determinada por métodos gráficos (veja o Exercício 22). Em alguns casos podemos usar a taxa de reação para achar as fórmulas explícitas para as concentrações como funções do tempo (veja o Exercício 9.3).

EXEMPLO 5 □ Uma das grandezas de interesse na termodinâmica é a compressibilidade. Se uma dada substância for mantida em uma temperatura constante, então seu volume V depende de sua pressão P. Podemos considerar a taxa de variação do volume em relação à pressão — isto é, a derivada dV/dP. Quando P cresce, V decresce; logo, $dV/dP < 0$. A **compressibilidade** é definida introduzindo-se o sinal menos e dividindo essa derivada pelo volume V:

$$\text{compressibilidade isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Assim, β mede quão rápido, por unidade de volume, o volume de uma substância decresce quando a pressão sobre ela cresce em uma temperatura constante.

Por exemplo, o volume V (em metros cúbicos) de uma amostra do ar a 25 °C está relacionado com a pressão P (em quilopascals) pela equação

$$V = \frac{5{,}3}{P}$$

A taxa de variação de V em relação a P quando $P = 50$ kPa é

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} &= \left.-\frac{5{,}3}{P^2}\right|_{P=50} \\ &= -\frac{5{,}3}{2.500} = -0{,}00212 \text{ m}^3/\text{kPa}\end{aligned}$$

A compressibilidade naquela pressão é

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0{,}00212}{\frac{5{,}3}{50}} = 0{,}02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3$$

Biologia

EXEMPLO 6 Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população (animal ou vegetal) no instante t. A variação no tamanho da população entre os instantes $t = t_1$ e $t = t_2$ é $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$ e, portanto, a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A **taxa de crescimento instantâneo** é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo Δt tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Estritamente falando, isso não é bem preciso, pois o gráfico real de uma função população $n = f(t)$ seria uma função escada, que é descontínua sempre que ocorre um nascimento ou morte e, portanto, não é diferenciável. Contudo, para uma grande população animal ou vegetal, podemos substituir o gráfico por uma curva aproximada suave, como na Figura 5.

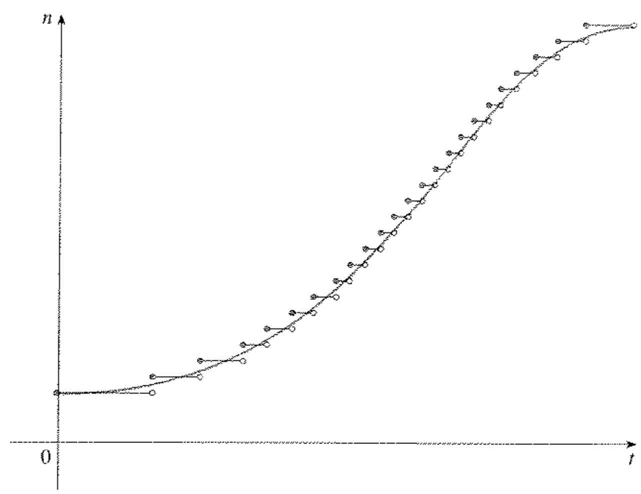


FIGURA 5
Uma curva aproximada suave de uma função crescimento

Para ser mais específico, considere uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponha que amostrando a população em um certo intervalo determina-se que ela duplique a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o instante t for medido em horas, então

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

e, em geral,

$$f(t) = 2^t n_0$$

A função população é $n = n_0 2^t$.

Na Seção 3.1 discutimos as derivadas de funções exponenciais e descobrimos que

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0,69)2^x$$

Portanto a taxa de crescimento da população de bactérias no instante t é

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) \approx n_0(0,69)2^t$$

Por exemplo, suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então a taxa de crescimento depois de 4 horas é

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} \approx 100(0,69)2^4 = 1.104$$

Isso quer dizer que, depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1.100 bactérias por hora.

EXEMPLO 7 □ Considerando o fluxo de sangue através de um vaso sangüíneo, como uma veia ou artéria, podemos supor a forma do vaso sangüíneo como um tubo cilíndrico com raio R e comprimento l, conforme ilustrado na Figura 6.

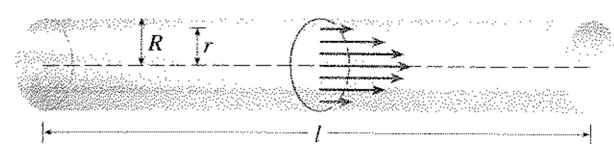


FIGURA 6
Fluxo de sangue em uma artéria

Em razão do atrito nas paredes do tubo, a velocidade v do sangue é a maior ao longo do eixo central e decresce à medida que r, que é a distância do eixo central até a parede, cresce até que v torna-se 0 na parede. A relação entre v e r é dada pela **lei do fluxo laminar**, descoberta em 1840 pelo físico francês Jean-Louis-Marie Poiseuille. Isso estabelece que

$$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{1}$$

onde η é a viscosidade do sangue e P, a diferença entre as pressões nos extremos do tubo. Se P e l forem constantes, então v é uma função de r com o domínio $[0, R]$. [Para informações mais detalhadas, veja W. Nichols e M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 4. ed. (Nova York: Oxford University Press, 1998).]

A taxa da variação da velocidade média quando movemos de $r = r_1$ para $r = r_2$ é dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

e se fizermos $\Delta r \to 0$, obteremos o **gradiente da velocidade**, isto é, a taxa instantânea de variação da velocidade em relação a r:

$$\text{gradiente da velocidade} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Usando a Equação 1, obtemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para uma artéria menor, podemos tomar $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4.000$ dinas/cm^2, o que fornece

$$\begin{aligned} v &= \frac{4.000}{4(0{,}027)2}(0{,}000064 - r^2) \\ &\approx 1{,}85 \times 10^4(6{,}4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

Em $r = 0{,}002$ cm o sangue está fluindo a uma velocidade de

$$\begin{aligned} v(0{,}002) &\approx 1{,}85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1{,}11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

e o gradiente da velocidade nesse ponto é

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0{,}002} = -\frac{4.000(0{,}002)}{2(0{,}027)2} \approx -74(\text{cm/s})/\text{cm}$$

Para sentir o que isso significa, vamos mudar nossas unidades de centímetros para micrômetros (1 cm = 10.000 μm). Então o raio da artéria é 80 μm. A velocidade no eixo central é 11.850 μm/s, que decresce para 11.110 μm/s a uma distância de $r = 20$ μm. O fato de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm quer dizer que quando $r = 20$ μm, a velocidade está decrescendo a uma taxa de cerca de 74 μm/s para cada micrômetro afastado do centro.

Economia

EXEMPLO 8 Suponha que $C(x)$ é o custo total que uma companhia incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função C é chamada **função custo**. Se o número de itens produzido estiver crescendo de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, isto é, a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado de **custo marginal** pelos economistas:

$$\text{custo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Uma vez que x pode geralmente assumir somente os valores inteiros, pode não fazer sentido tomar Δx, mas podemos sempre substituir $C(x)$ por uma função aproximativa suave, como no Exemplo 6.]

Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (tal que Δx é pequeno comparado com n), temos

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo da produção de mais uma unidade [a $(n + 1)$ésima unidade].

Em geral é apropriado representar uma função custo por um polinômio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão-de-obra e assim por diante. (O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x, mas o custo da mão-de-obra poderia depender parcialmente de potências mais altas de x, em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala.)

Por exemplo, suponha que uma companhia tenha estimado que o custo (em dólares) de produção de x itens seja

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0,01x^2$$

Então a função custo marginal é

$$C'(x) = 5 + 0,02x$$

O custo marginal no nível de produção de 500 itens é

$$C'(500) = 5 + 0,02(500) = \$15/\text{item}$$

Isso dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível de produção quando $x = 500$ e prediz o custo dos 501 primeiros itens.

O custo real da produção dos 501 primeiros itens é

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10.000 + 5(501) + 0,01(501)^2] \\ &\quad - [10.000 + 5(500) + 0,01(500)^2] \\ &= \$15,01 \end{aligned}$$

Note que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Os economistas também estudam a demanda marginal, a renda marginal e o lucro marginal, que são derivadas das funções demanda, renda e lucro. Isso será visto no Capítulo 4, depois que desenvolvermos as técnicas para encontrar os valores máximo e mínimo de funções.

Outras Ciências

As taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria através da condutividade térmica com o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou para fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura (veja o Exercício 17 da Seção 9.4 no Volume 2).

Em psicologia, aqueles interessados na teoria do aprendizado estudam a chamada curva do aprendizado, que é o gráfico do desempenho $P(t)$ de alguém aprender alguma coisa como função do tempo de treinamento t. É de particular interesse a taxa segundo a qual o desempenho melhora à medida que o tempo passa, isto é, dP/dt.

Em sociologia, o cálculo diferencial é usado na análise do espalhamento do boato (ou inovações, ou modismos, ou padrões). Se $p(t)$ denota a proporção de uma população que fica sabendo de um boato no instante t, então a derivada dp/dt representa a taxa de espalhamento do boato (veja o Exercício 70 na Seção 3.5).

Resumo

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de espalhamento de um boato na sociologia — todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes em cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados para todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais separadas para cada ciência. O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) colocou isso sucintamente: "Os matemáticos comparam os mais diversos fenômenos e descobrem as analogias secretas que os unem".

3.3 Exercícios

1–6 Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, onde t é medido em segundos e s em pés.

(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.

1. $f(t) = t^2 - 10t + 12$ **2.** $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$

3. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **4.** $f(t) = t^4 - 4t + 1$

5. $s = \dfrac{t}{t^2 + 1}$ **6.** $s = \sqrt{t}\,(3t^2 - 35t + 90)$

7. A função posição de uma partícula é dada por

$$s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t \qquad t \geqslant 0$$

Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s?

8. Se uma bola for empurrada ladeira abaixo, sobre um plano inclinado, a uma velocidade inicial de 5 m/s a distância que ela rola, após t segundos, será dada por $s = 5t + 3t^2$.
(a) Determine sua velocidade após 2 s.
(b) Quão longe ela estará do ponto de partida quando sua velocidade atingir 35 m/s?

9. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima sobre a superfície da Lua com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos será $h = 10t - 0{,}83t^2$.
(a) Qual a velocidade da pedra após 3 s?
(b) Qual a velocidade da pedra quando ela atingir 25 m?

10. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com uma velocidade de 80 pés/s, então sua altura depois de t segundos é $s = 80t - 16t^2$.
(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 96 pés acima do solo na subida?

11. (a) Uma companhia produz *chips* de computador. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento do lado x. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.
(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como aproximar as mudanças resultantes na área ΔA se Δx for pequeno?

12. (a) Os cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo a uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.
(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro mostrando um argumento análogo ao do Exercício 11(b).

13. (a) Encontre a taxa de variação média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1
(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.
(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

14. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce para fora a uma velocidade de 60 cm/s. Encon tre a taxa segundo a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você pode concluir?

15. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) 3 pés. Que conclusão você pode tirar?

16. (a) O volume de uma célula esférica em crescimento é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5,1 μm
(b) Encontre a taxa de variação instantânea de V em relação a r quando $r = 5\ \mu$m.
(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 13(c).

17. A massa da parte de uma barra de metal que está situada entre o extremo esquerdo e um ponto x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a) 1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

18. Se um tanque mantém 5.000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5.000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o fluxo é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

19. A quantidade de carga Q em coloumbs (C) que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade de corrente é o ampère (1 A = 1 C/s).] Em que instante a corrente é mais baixa?

20. A Lei de Gravitação de Newton diz que a grandeza F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

em que G é a constante gravitacional e r, é a distância entre os corpos.
(a) Se os corpos estão se movendo, encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?
(b) Suponha que se tenha conhecimento de que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20.000$ km. Quão rápido essa força varia quando $r = 10.000$?

21. A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e o volume permanecem constantes: $PV = C$.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.
(b) Uma amostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida à temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique.
(c) Prove que a compressibilidade isotérmica (veja o exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

22. O dado mostrado na tabela diz respeito à lactonização do ácido hidroxivalérico a 25 °C. É dada a concentração $C(t)$ desse ácido em mols por litro depois de t minutos.

t	0	2	4	6	8
$C(t)$	0.0800	0.0570	0.0408	0.0295	0.0210

(a) Encontre a taxa de reação média para os seguintes intervalos de tempo:
(i) $2 \leq t \leq 6$ (ii) $2 \leq t \leq 4$ (iii) $0 \leq t \leq 2$
(b) Desenhe os pontos da tabela e trace por eles uma curva suave com uma aproximação ao gráfico da função concentração. Então trace a tangente em $t = 2$ e use-a para estimar a taxa de reação instantânea quando $t = 2$.

23. A tabela dá a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1.650	1960	3.040
1910	1.750	1970	3.710
1920	1.860	1980	4.450
1930	2.070	1990	5.280
1940	2.300	2000	6.080
1950	2.560		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.
(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modela os dados (veja a Seção 1.2).
(c) Utilize o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.
(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).
(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

24. A tabela mostra como a média de idade das mulheres japonesas que se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1975	24.7
1955	23.8	1980	25.2
1960	24.4	1985	25.5
1965	24.5	1990	25.9
1970	24.2	1995	26.3

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de quarto grau.
(b) Use a parte (a) para achar um modelo para $A'(t)$.
(c) Estime a taxa de variação da idade de primeiro casamento dessas mulheres em 1990.
(d) Faça o gráfico dos pontos dados e os modelos para A e A'.

25. Se, no Exemplo 4, uma molécula do produto C é produzida de uma molécula do reagente A e de uma molécula do reagente B, e as concentrações iniciais de A e B têm um valor comum $[A] = [B] = a$ mols/L, então

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

onde k é uma constante.
(a) Encontre a taxa de reação no instante t.
(b) Mostre que se $x = [C]$, então

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?
(d) O que acontece com a taxa de reação quando $t \to \infty$?
(e) O que os resultados da parte (c) e (d) significam em termos práticos?

26. Suponha que uma população de bactérias inicialmente com 500 bactérias triplique a cada hora.
(a) Qual a população depois de 3 horas? Depois de 4 horas? Depois de t horas?
(b) Use o resultado de (5) da Seção 3.1 para estimar a taxa de crescimento da população de bactérias depois de 6 horas.

27. Considere a lei do fluxo laminar dado no Exemplo 7. Seja um vaso sangüíneo com raio 0,01 cm, comprimento 3 cm, diferença de pressão 3.000 dinas/cm², e viscosidade $\eta = 0{,}027$.
(a) Encontre a velocidade do sangue ao longo do eixo central $r = 0$, no raio $r = 0{,}005$ cm, e na parede $r = R = 0{,}01$ cm.
(b) Encontre o gradiente da velocidade em $r = 0$, $r = 0{,}005$ e $r = 0{,}01$.
(c) Onde a velocidade é máxima? Onde a velocidade muda mais?

28. A freqüência da vibração de uma corda de violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde L é o comprimento da corda; T, sua tensão; ρ, sua densidade linear. [Veja o Capítulo 11 em D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3. ed. (Pacific Grover, CA: Brooks/Cole, 2002).]
(a) Encontre a taxa de variação da freqüência em relação
 (i) ao comprimento (quando T e ρ são constantes);
 (ii) à tensão (quando L e ρ são constantes);
 (iii) à densidade linear (quando L e T são constantes).
(b) A intensidade de uma nota (quão alta ou baixa soa a nota) é determinada pela freqüência f. (Quanto maior a freqüência, maior a intensidade.) Use os sinais das derivadas da parte (a) para determinar o que acontece com a intensidade de uma nota
 (i) quando o comprimento efetivo de uma corda é decrescido colocando-se o dedo sobre a corda, de forma que uma porção menor da corda vibre;
 (ii) quando a tensão é aumentada girando-se a cravelha (pino de afinação);
 (iii) quando a densidade linear é aumentada, mudando-se a corda.

29. Suponha que o custo, em dólares, para uma companhia produzir x novas linhas de *jeans* é

$$C(x) = 2.000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.
(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu resultado. O que ele prediz?
(c) Compare $C'(100)$ com o custo de manufaturar os 101 primeiros *jeans*.

30. A função custo para uma certa mercadoria é

$$C(x) = 84 + 0{,}16x - 0{,}0006x^2 + 0{,}000003x^3$$

(a) Encontre e interprete $C'(100)$.
(b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

31. Se $p(x)$ for o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encontre $A'(x)$. Por que a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?
(b) Mostre que $A'(x) > 0$ se $p'(x)$ for maior que a produtividade média.

32. Se R denota a reação do corpo para algum estímulo de intensidade x, a *sensitividade* S é definida como a taxa de variação da reação em relação a x. Um exemplo acontece quando a luminosidade x de uma fonte de luz é aumentada e o olho reage decrescendo a área R da pupila. A fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

tem sido usada para modelar a dependência de R em x quando R é medido em milímetros quadrados e x em uma unidade apropriada de luminosidade.
(a) Encontre a sensitividade.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de R e S como funções de x. Comente sobre os valores de R e S em baixos níveis de luminosidade. Isso é o que você esperaria?

33. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, onde n é o número de mols de gás e $R = 0{,}0821$ é uma constante do gás. Suponha que, em um certo instante,

$P = 8{,}0$ atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e $V = 10$ L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante se $n = 10$ mols.

34. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e colhida regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes; P_c, a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua *capacidade de suporte*); e β, a porcentagem da população que é colhida.

(a) Qual o valor de dP/dt que corresponde à população estável?

(b) Se o pequeno lago pode manter 10.000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita, 4%, encontre o nível estável da população.

(c) O que acontece se β está elevando para 5%?

35. No estudo de ecossistemas, o modelo *predador–presa* é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por $W(t)$, e caribus, dada por $C(t)$, no norte do Canadá. A interação tem sido modelada pelas equações:

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) Que valores de dC/dt e dW/dt correspondem a populações estáveis?

(b) Como representar matematicamente a afirmativa: "O caribu está se extinguindo"?

(c) Suponha que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$ e $d = 0{,}0001$. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em harmonia, ou uma ou as duas espécies acabam por se extinguir?

3.4 Derivadas de Funções Trigonométricas

Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.

Antes de começar esta seção, talvez você precise revisar as funções trigonométricas. Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo o número real x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

deve ser entendido que sen x significa o seno do ângulo cuja medida em *radianos* é x. Uma convenção análoga é verdadeira para as outras funções trigonométricas, cos, tg, cossec, sec e cotg. Lembre-se da Seção 2.5 em que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à senóide a fim de esboçar o gráfico de f' (veja o Exercício 16 da Seção 2.9), isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à cossenóide (veja a Figura 1).

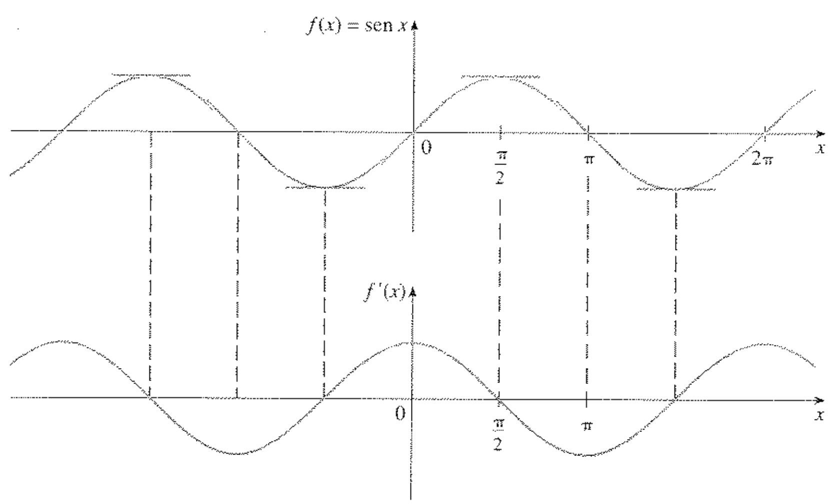


FIGURA 1

Vamos tentar confirmar nossa conjectura de que se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$. Da definição da derivada temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

□ Temos usado a fórmula da adição para o seno. Veja o Apêndice D.

Dois desses quatro limites são fáceis de calcular. Uma vez que consideramos x como uma constante quando computamos um limite quando $h \to 0$, temos

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

O limite de $(\operatorname{sen} h)/h$ não é óbvio. No Exemplo 3 da Seção 2.2 fazemos a conjectura, sobre a base das evidências numérica e gráfica, de que

$$\boxed{2} \qquad \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Agora usamos um argumento geométrico para provar a Equação 2. Pressuponha primeiro que θ está entre 0 e $\pi/2$. A Figura 2(a) mostra um setor do círculo com o centro O, o ângulo central θ e o raio 1. Desenhamos BC perpendicular a OA. Pela definição de medida do radiano, temos arc $AB = \theta$. Também, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Do diagrama vemos que

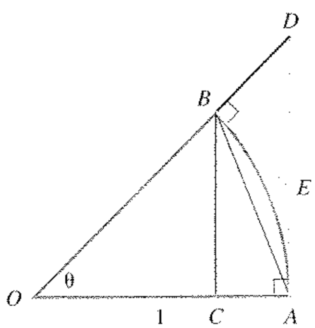
$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

Portanto $\qquad \operatorname{sen} \theta < \theta \qquad$ logo $\qquad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

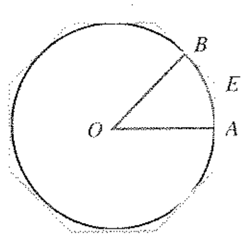
Suponha que as tangentes em A e B interceptam em E. Você pode ver da Figura 2(b) que a circunferência de um círculo é menor que o comprimento de um polígono circunscrito; logo, arc $AB < |AE| + |EB|$. Assim

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta \\ &= \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

(No Apêndice F a desigualdade $\theta \leqslant \operatorname{tg} \theta$ é provada diretamente da definição do comprimento de um arco sem que se recorra à intuição geométrica, como feito aqui.)



(a)



(b)

FIGURA 2

Conseqüentemente, temos

$$\theta < \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

logo

$$\cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ e $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$; logo, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Mas a função $(\text{sen } \theta)/\theta$ é uma função par; assim, seus limites direito e esquerdo devem ser iguais. Daqui, temos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

e provamos a Equação 2.

Podemos deduzir o valor do limite que restou em (1) como se segue

□ Multiplicamos o numerador e o denominador por $\cos \theta + 1$ para colocar a função em uma forma na qual podemos usar os limites que conhecemos.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\text{sen}^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1}$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(Pela Equação 2)}$$

3

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0}$$

Se pusermos agora os limites (2) e (3) em (1), obteremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

$$= (\text{sen } x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Logo, provamos a fórmula para a derivada da função seno:

4

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\text{sen } x) = \cos x}$$

A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 1 e suas derivadas. Note que $y' = 0$ sempre que y tiver a tangente horizontal.

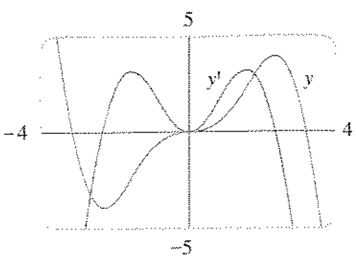


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Diferencie $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Produto e a Fórmula 4, temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

Utilizando o mesmo método como na prova da Fórmula 4, você pode provar (veja o Exercício 20) que

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

A função tangente também pode ser diferenciável empregando a definição de uma derivada, mas é mais fácil usar a Regra do Quociente junto com as Fórmulas 4 e 5:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x}$$

As derivadas das funções trigonométricas que restaram, cossec, sec e cotg, também podem ser encontradas facilmente usando a Regra do Quociente (veja os Exercícios 17-19). Reunimos todas as fórmulas de diferenciação para as funções trigonométricas na tabela a seguir:

Para memorizar essa tabela mais facilmente, note que o sinal de menos aparece nas derivadas das funções que têm "co" no nome: cosseno, cossecante e cotangente.

Derivadas das Funções Trigonométricas

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec}) x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$
$\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{sen}^2 x$	$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$

EXEMPLO 2 ☐ Diferencie $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem uma tangente horizontal?

SOLUÇÃO A Regra do Quociente dá

$$f'(x) = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\sec x \operatorname{tg} x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,[\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x]}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

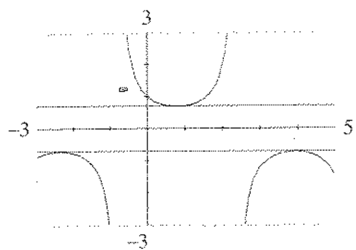


FIGURA 4
As tangentes horizontais do Exemplo 2

Simplificando a resposta, usamos a identidade $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Uma vez que $\sec x$ nunca é 0, vemos que $f'(x) = 0$ quando $\operatorname{tg} x = 1$, e isso ocorre quando $x = n\pi + \pi/4$, onde n é um inteiro (veja a Figura 4).

As funções trigonométricas muitas vezes são usadas em modelos para os fenômenos do mundo real. Em particular, as vibrações, ondas, movimentos elásticos e outras grandezas que variem de uma maneira periódica podem ser descritos utilizando-se as funções trigonométricas.

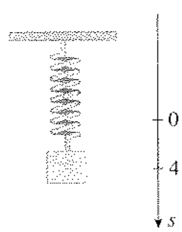


FIGURA 5

EXEMPLO 3 ☐ Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 cm além de sua posição no repouso e solto no instante $t = 0$. (Veja a Figura 5 e note que o sentido positivo é para baixo.) Sua posição no instante t é

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encontre a velocidade no instante t e use-a para analisar o movimento do objeto.

SOLUÇÃO A velocidade é

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

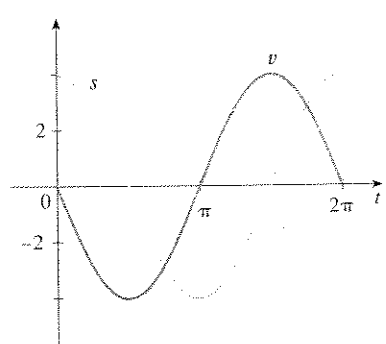


FIGURA 6

O objeto oscila desde o ponto mais baixo ($s = 4$ cm) até o mais alto ($s = -4$ cm). O período de oscilação é 2π, que é o período do cosseno de t.

A rapidez é $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, que é máxima quando $|\operatorname{sen} t| = 1$, isto é, quando $\cos t = 0$. Assim, os objetos movem-se mais rapidamente quando passam por sua posição de equilíbrio ($s = 0$). Sua rapidez é 0 quando $\operatorname{sen} t = 0$, isto é, no ponto mais alto e no mais baixo. Veja os gráficos na Figura 6.

Nosso uso principal para o limite na Equação 2 tem sido provar a fórmula de diferenciação para a função seno. Mas esse limite é também proveitoso na determinação de outros limites envolvendo a trigonometria, como nos dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 4 ☐ Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUÇÃO Para aplicar a Equação 2, vamos reescrever a função multiplicando e dividindo por 7:

Note que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Observe que quando $x \to 0$, temos $7x \to 0$; portanto, pela Equação 2 com $\theta = 7x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \lim_{7x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x} = 1$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

$$= \frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$.

SOLUÇÃO Aqui vamos dividir numerador e denominador por x:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \quad \text{(pela continuidade do cosseno e da Equação 2)}$$

$$= 1$$

3.4 Exercícios

1–16 Diferencie.

1. $f(x) = x - 3\operatorname{sen} x$
2. $f(x) = x\operatorname{sen} x$
3. $y = \operatorname{sen} x + 10\operatorname{tg} x$
4. $y = 2\operatorname{cossec} x + 5\cos x$
5. $g(t) = t^3\cos t$
6. $g(t) = 4\sec t + \operatorname{tg} t$
7. $h(\theta) = \operatorname{cossec}\theta + e^{\theta}\operatorname{cotg}\theta$
8. $y = e^u(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{\cos x}$
10. $y = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$
12. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \operatorname{cossec}\theta(\theta + \operatorname{cotg}\theta)$
15. $y = \sec\theta\operatorname{tg}\theta$
16. $y = x\operatorname{sen} x\cos x$
17. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x\operatorname{cotg} x$.
18. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\operatorname{tg} x$.
19. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.
20. Prove, usando a definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $y = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 1)$
22. $y = e^x\cos x$, $(0, 1)$
23. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $(0, 1)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x \cos x$ no ponto $(\pi, -\pi)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \sec x - 2 \cos x$ no ponto $(\pi/3, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

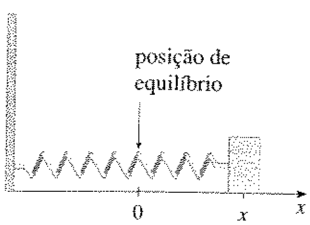
27. (a) Se $f(x) = 2x + \text{cotg } x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos f e f' para $0 < x < \pi$.

28. (a) Se $f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

29. Que valores de x fazem que o gráfico de $f(x) = x + 2 \text{ sen } x$ tenha uma reta horizontal?

30. Encontre os pontos sobre a curva $y = (\cos x)/(2 + \text{sen } x)$ na qual a tangente é horizontal.

31. Uma massa em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \text{ sen } t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Encontre a posição e a velocidade da massa no instante $t = 2\pi/3$. Em que sentido ela está se movendo nesse instante?



32. Uma faixa elástica é pendurada em um gancho e uma massa está presa na extremidade inferior da faixa. Quando a massa é puxada para baixo e então solta, ela vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2 \cos t + 3 \text{ sen } t$, $t \geqslant 0$, onde s é medida em centímetros e t, em segundos. (Consideramos o sentido positivo como sendo para baixo.)
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Faça os gráficos das funções velocidade e posição.
(c) Quando a massa passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
(d) A que distância da posição de equilíbrio a massa chega?
(e) Quando a velocidade é máxima?

33. Uma escada com 10 pés de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

34. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a grandeza da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu \text{ sen } \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
(c) Se $W = 50$ lb e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b).

35–44 □ Encontre o limite.

35. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

36. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x}$

37. $\lim_{t \to 0} \frac{\text{tg } 6t}{\text{sen } 2t}$

38. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\text{sen } \theta}$

39. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

40. $\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen}^2 3t}{t^2}$

41. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{cotg } 2x}{\text{cossec } x}$

42. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{\text{sen } x - \cos x}{\cos 2x}$

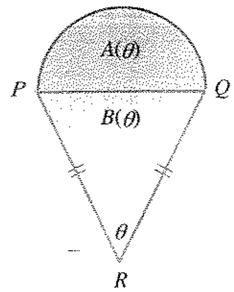
43. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta + \text{tg } \theta}$

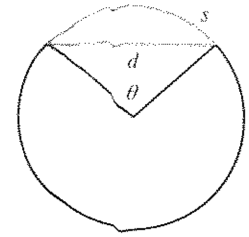
44. $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

45. Diferencie cada identidade trigonométrica para obter outra nova ou antiga.
(a) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$
(b) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
(c) $\text{sen } x + \cos x = \frac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

46. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ for a área do semicírculo e $B(\theta)$, a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$





47. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$

3.5 Regra da Cadeia

Suponha que lhe foi pedido para diferenciar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

As fórmulas de diferenciação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não o capacitaram a calcular $F'(x)$.

Veja a Seção 1.3 para a revisão de funções compostas.

Observe que F é uma função composta. De fato, se tomarmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e seja $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, isto é, $F = f \circ g$. Sabemos como diferenciar ambos, f e g, então seria proveitoso ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

Isso resulta que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é uma das mais importantes regras de diferenciação, chamada *Regra da Cadeia*. Parece plausível interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u em relação a x, dy/du como a taxa de variação de y em relação a u, e dy/dx como a taxa de variação de y em relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x e y três vezes mais rápido que u, então parece razoável que y varia seis vezes mais rápido que x, e assim esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Regra da Cadeia Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por $F(x) = f(g(x))$, então F é diferenciável e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Comentários sobre a Prova da Regra da Cadeia Seja Δu a variação de u correspondente à variação de Δx em x, isto é:

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Então a variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\boxed{1} \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Note que } \Delta u \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0\text{, uma vez que } g \text{ é contínua.)} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

A única falha nesse raciocínio é que em (1) pode acontecer que $\Delta u = 0$ (mesmo quando $\Delta x \neq 0$) e, obviamente, não podemos dividir por 0. Não obstante, esse raciocínio no mínimo *sugere* que a Regra da Cadeia é verdadeira. Uma prova completa da Regra da Cadeia é dada no final desta seção.

A Regra da Cadeia pode ser escrita também na notação linha

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Equação 3 é fácil de ser lembrada, pois se dy/du e du/dx forem quocientes, então devemos cancelar du. Lembre-se, entretanto, de que du não foi definida, e du/dx não deve ser interpretado como um quociente usual.

EXEMPLO 1 Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUÇÃO 1 (usando a Equação 2): No início desta seção expressamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2x$$

temos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 (usando a Equação 3): Se tomarmos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$, então

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Quando usarmos a Fórmula 3, deveremos ter em mente que dy/dx refere-se à derivada de y quando y é tida como uma função de x (chamada *derivada de y em relação a x*), ao passo que dy/du se refere à derivada de y quando y é considerada como uma função de u (a derivada de y em relação a u). Assim, no Exemplo 1, y pode ser considerada como uma função de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ e também como uma função de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{enquanto} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA ◻ Ao usarmos a Regra da Cadeia trabalhamos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *diferenciamos a função de fora f [na função de dentro g(x)] e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.*

$$\frac{d}{dx} \underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\ \text{externa}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

EXEMPLO 2 ◻ Diferencie (a) $y = \text{sen}(x^2)$ e (b) $y = \text{sen}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a) Se $y = \text{sen}(x^2)$, então a função de fora é a função seno, e a função de dentro é a função quadrada; logo, a Regra da Cadeia dá

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{função}\\ \text{externa}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}} \\ &= 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

(b) Note que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$. Aqui a função de fora é a função quadrada, e a função de dentro é a função seno. Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\text{sen}\, x)^2}_{\substack{\text{função}\\ \text{interna}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{calculada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

A resposta pode ser deixada como $2\,\text{sen}\, x \cos x$ ou $\text{sen}\, 2x$ (pela identidade trigonométrica conhecida como fórmula do ângulo duplo).

No Exemplo 2(a) combinamos a Regra da Cadeia com a regra para diferenciar a função seno. Em geral, se $y = \text{sen}\, u$, onde u é uma função diferenciável de x, então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Assim $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

Todas as fórmulas para diferenciar as funções trigonométricas podem ser combinadas com a Regra da Cadeia.

Vamos explicitar o caso especial da Regra da Cadeia, onde a função de fora f é uma função potência. Se $y = [g(x)]^n$, então podemos escrever $y = f(u) = u^n$, onde $u = g(x)$. Usando a Regra da Cadeia e então a Regra da Potência, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia Se n for qualquer número e $u = g(x)$ for diferenciável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Note que a derivada no Exemplo 1 poderia ser calculada tomando $n = \frac{1}{2}$ na Regra 4.

EXEMPLO 3 □ Diferencie $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUÇÃO Tomando $u = g(x) = x^3 - 1$ e $n = 100$ em (4), temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)\\ &= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 □ Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUÇÃO Primeiro reescreva f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$. Assim

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)\\ &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 □ Encontre a derivada da função

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUÇÃO Combinando a Regra da Potência, da Cadeia e Quociente, obtemos

$$\begin{aligned}g'(t) &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)\\ &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}\end{aligned}$$

Os gráficos das funções y e y' do Exemplo 6 são mostrados na Figura 1. Note que y' é maior quando y cresce rapidamente, e $y' = 0$ quando y tem uma tangente horizontal. Logo nossa resposta parece ser razoável.

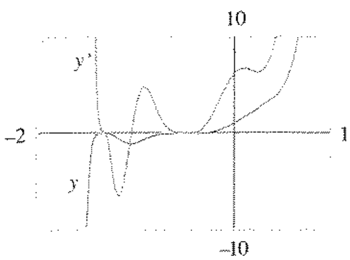


FIGURA 1

EXEMPLO 6 Diferencie $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUÇÃO Neste exemplo devemos usar a Regra do Produto antes de usar a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\
&= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\
&\qquad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1) \\
&= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2
\end{aligned}$$

Notando que cada termo tem um fator comum $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podemos fatorá-lo e escrever a resposta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

De forma geral, a Regra da Cadeia dá

$$\frac{d}{du}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

EXEMPLO 7 Diferencie $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUÇÃO Aqui a função de dentro é $g(x) = \operatorname{sen} x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$. Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$. Lembre-se da Seção 1.6 em que $a = e^{\ln a}$. Logo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

e a Regra da Cadeia dá

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x} \frac{d}{dx}(\ln a)x \\
&= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a
\end{aligned}$$

porque $\ln a$ é uma constante. Portanto, temos a fórmula

Não confunda a Fórmula 5 (onde x é o *expoente*) com a Regra da Potência (onde x é a base):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Em particular, se $a = 2$, obtemos

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

Na Seção 3.1 demos a estimativa

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x$$

Ela é consistente com a fórmula exata (6), pois $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

No Exemplo 6 da Seção 3.3 consideramos a população de bactérias que dobra a cada hora e vimos que após t horas a população é $n = n_0 2^t$, onde n_0 é a população inicial. A fórmula (6) capacita-nos encontrar a taxa de crescimento da população de bactérias:

$$\frac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2$$

A razão para o nome "Regra da Cadeia" ficou evidente quando fizemos uma cadeia maior adicionando mais um elo. Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde f, g e h são funções diferenciáveis. Então, para computar a derivada de y em relação a t, usamos duas vezes a Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EXEMPLO 8 □ Se $f(x) = \text{sen}(\cos(\text{tg}\, x))$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\text{tg}\, x))\frac{d}{dx}\cos(\text{tg}\, x) \\ &= \cos(\cos(\text{tg}\, x))[-\text{sen}(\text{tg}\, x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\text{tg}\, x))\,\text{sen}(\text{tg}\, x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Observe que usamos duas vezes a Regra da Cadeia.

EXEMPLO 9 □ Diferencie $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUÇÃO A função de fora é uma exponencial, a média é uma função secante, e a função de dentro é um triplo. Assim temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\ \text{tg}\ 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\ \text{tg}\ 3\theta \end{aligned}$$

Como Provar a Regra da Cadeia

Lembre-se de que se $y = f(x)$ e x variar de a a $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acordo com a definição de derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Dessa forma, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Mas $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Se definirmos $\varepsilon = 0$ quando $\Delta x = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δx. Assim, para uma função diferenciável f, podemos escrever

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{onde} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{quando } \Delta x \to 0$$

e ε é uma função contínua de Δx. Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita provar a Regra da Cadeia.

Prova da Regra da Cadeia Suponha que $u = g(x)$ é diferenciável em a e $y = f(u)$ é diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento de x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes em u e y, então poderemos usar a Equação 7 para escrever

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Da mesma forma

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Se substituirmos agora a expressão para Δu da Equação 8 na Equação 9, obteremos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

logo $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] \\ &= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)\end{aligned}$$

Isso prova a Regra da Cadeia.

3.5 Exercícios

1–6 Escreva na forma $f(g(x))$ a função composta. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–42 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$

8. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = e^{-mx}$

16. $y = 4 \sec 5x$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = \left(t^4 - 1\right)^3\left(t^3 + 1\right)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = xe^{-x^2}$

22. $y = e^{-5x} \cos 3x$

23. $y = e^{x \cos x}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^{2u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \operatorname{tg}(\cos x)$

30. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$

32. $y = \operatorname{tg}^2(3\theta)$

33. $y = (1 + \cos^2 x)^6$

34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x$

36. $y = e^{k \operatorname{tg} \sqrt{x}}$

37. $y = \operatorname{cotg}^2(\operatorname{sen} \theta)$

38. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

39. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

40. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

41. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x})$

42. $y = 2^{3^{x^2}}$

43–46 ▢ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

43. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$

44. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

45. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

46. $y = x^2e^{-x}$ $(1, 1/e)$

47. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

48. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada **curva ponta de bala**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

49. (a) Se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}/x$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

50. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, aparece em modulada (FM) aplicações para a sintetização de freqüência.

(a) Use uma calculadora gráfica para esboçar um gráfico da f e use esse gráfico para dar um esboço, mesmo que grosseiro, do gráfico de f'.

(b) Calcule $f'(x)$ e utilizando uma calculadora gráfica use a expressão de f' para obter seu gráfico. Compare com o obtido no item (a).

51. Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$

nos quais a reta tangente é horizontal.

52. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ em que a reta tangente é horizontal.

53. Suponha que $F(x) = f(g(x))$ e $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ e $f'(6) = 7$. Encontre $F'(3)$.

54. Suponha que $w = u \circ v$ e $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$ e $v'(2) = 6$. Encontre $w'(0)$.

55. É dada uma tabela de valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.

(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

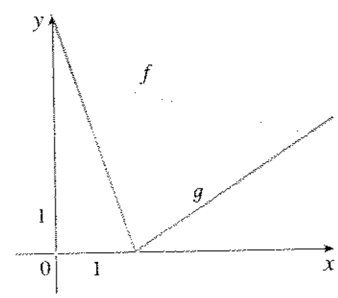
56. Sejam f e g as funções do Exercício 55.

(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.

(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

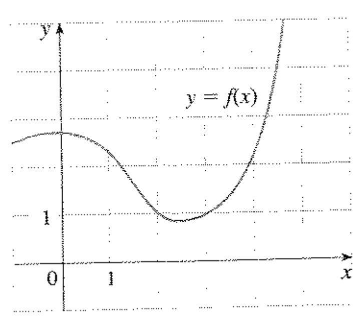
57. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, seja $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



58. Se f for a função cujo gráfico está mostrado, seja $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.

(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



59. Use a tabela para estimar o valor de $h'(0,5)$, onde $h(x) = f(g(x))$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	12,6	14,8	18,4	23,0	25,9	27,5	29,1
$g(x)$	0,58	0,40	0,37	0,26	0,17	0,10	0,05

60. Se $g(x) = f(f(x))$, use a tabela para estimar o valor de $g'(1)$.

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$f(x)$	1,7	1,8	2,0	2,4	3,1	4,4

61. Suponha que f seja diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

62. Suponha que f seja diferenciável em $\mathbb{R}$ e α, um número real. Seja $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

63. Suponha que L seja uma função tal que $L'(x) = 1/x$ para $x > 0$. Determinar uma expressão para a derivada de cada função.

(a) $f(x) = L(x^4)$ (b) $g(x) = L(4x)$

(c) $F(x) = [L(x)]^4$ (d) $G(x) = L(1/x)$

64. Seja $r(x) = f(g(h(x)))$ onde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $r'(1)$.

65. O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

onde s é medido em centímetros e t em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

66. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em um *movimento harmônico simples*.

(a) Encontre a velocidade da partícula no instante t.

(b) Quando a velocidade é zero?

67. A Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0,35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no instante t, onde t é medido em dias, foi modelado pela função

$$B(t) = 4,0 + 0,35\operatorname{sen}(2\pi t/5,4)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.

(b) Encontre, correta até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

68. No Exemplo 4 da Seção 1.3 chegamos a um modelo para a duração da luz do dia (em horas) na Filadélfia no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2,8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas da duração da luz do dia está crescendo na Filadélfia em 21 de março e 21 de maio.

69. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como amortecedor em um carro) é freqüentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1,5t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

onde s é medida em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leq t \leq 2$.

70. Sob certas circunstâncias um boato se espalha de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no instante t, e a e k são constantes positivas [na Seção 9.5 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$].

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

(b) Encontre a taxa de espalhamento do boato.

(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0,5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

71. O *flash* de uma câmera estoca carga em um capacitor e a dispara instantaneamente quando ativado. Os dados a seguir descrevem a carga remanescente no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no instante t (medido em segundos).

t	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Q	100,00	81,87	67,03	54,88	44,93	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.5).

(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA) que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0,04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

72. A tabela fornece a população dos Estados Unidos de 1790 a 1860.

Ano	População	Ano	População
1790	3.929.000	1830	12.861.000
1800	5.308.000	1840	17.063.000
1810	7.240.000	1850	23.192.000
1820	9.639.000	1860	31.443.000

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para ajustar uma função exponencial aos dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Qual a qualidade do ajuste?

(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1800 e 1850 fazendo a média de inclinações de retas secantes.

(c) Use o modelo exponencial da parte (a) para estimar as taxas de crescimento em 1800 e 1850. Compare essas estimativas com as da parte (b).

(d) Use o modelo exponencial para predizer a população em 1870. Compare com a população real de 38.558.000. Você pode explicar a discrepância?

73. Os CAS têm comandos que diferenciam as funções, mas a forma da resposta pode não ser conveniente e, portanto, os comandos posteriores podem ser necessários para simplificar a resposta.

(a) Use um CAS para encontrar a derivada do Exemplo 5 e compare com a resposta dele. Então use o comando simplificar e compare novamente.

(b) Use um CAS para diferenciar a função do Exemplo 6. O que acontecerá se você usar o comando simplificar? O que acontecerá se você usar o comando fatorar? Qual a forma da resposta para melhor localizar as tangentes horizontais?

74. (a) Use um CAS para diferenciar a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

e para simplificar o resultado.

(b) Onde o gráfico de f tem tangentes horizontais?

(c) Faça na mesma tela os gráficos de f e f'. Os gráficos são consistentes com sua resposta da parte (b)?

75. Use a Regra da Cadeia para provar o que se segue.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

76. Use a Regra da Cadeia e a Regra do Produto para dar uma prova alternativa da Regra do Quociente.
[*Sugestão:* Descreva $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

77. (a) Se n for um inteiro positivo, prove que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n\,\text{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Encontre uma fórmula para a derivada de

$$y = \cos^n x \cos nx$$

que seja similar àquela da parte (a).

78. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva que está sempre acima do eixo x e não tenha uma tangente horizontal, sendo f diferenciável em toda a parte. Para quais valores de y a taxa de variação de y^5 em relação a x é 80 vezes a taxa de variação de y em relação a x?

79. Use a Regra da Cadeia para mostrar que, se θ for medido em graus, então

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Isso dá uma razão para a convenção de que a medida em radianos é sempre usada quando tratamos no cálculo com as funções trigonométricas: as fórmulas de diferenciação não são simples se usamos a medida em graus.)

80. (a) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a Regra da Cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $f(x) = |\text{sen}\,x|$, encontre $f'(x)$ e esboce os gráficos de f e f'. Onde f não é diferenciável?

(c) Se $g(x) = \text{sen}\,|x|$, encontre $g'(x)$ e esboce os gráficos de g e g'. Onde g não é diferenciável?

81. Suponha que P e Q sejam polinômios e n seja um número inteiro positivo. Use o princípio de indução matemática para prover que a n-ésima derivada da função racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ pode ser escrita como uma função racional com denominador $[Q(x)]^{n+1}$. Em outras palavras, existe um polinômio A_n tal que $f^{(n)}(x) = A_n(x)/[Q(x)]^{n+1}$.

3.6 Diferenciação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra; por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x\,\text{sen}\,x$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tal como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

ou

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Em alguns casos é possível resolver uma equação para y como uma função explícita (ou várias funções) de x. Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 para y, obteremos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, logo, duas funções determinadas pela Equação implícita 1 são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Os gráficos de f e g são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 25$ (veja a Figura 1).

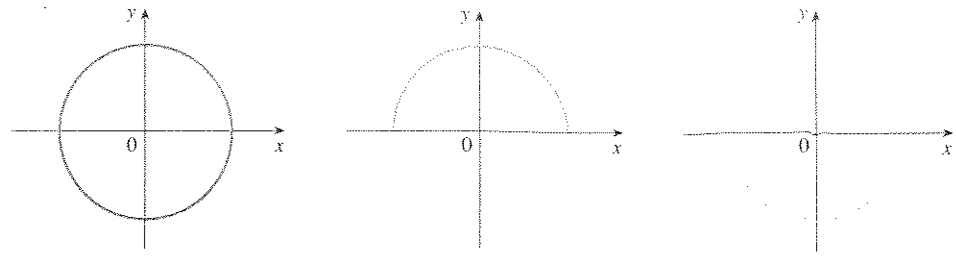


FIGURA 1

(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Não é fácil resolver a Equação 2 para y explicitamente como uma função de x à mão. (Para o sistema algébrico computacional não há problema, mas as expressões obtidas são muito complicadas.) Não obstante, (2) é a equação da curva chamada **fólio de Descartes**, mostrada na Figura 2, e implicitamente define y como várias funções de x. Os gráficos de três dessas funções estão representados na Figura 3. Quando dizemos que f é uma função definida implicitamente pela Equação 2, isso significa que a equação

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

é verdadeira para todos os valores de x no domínio de f.

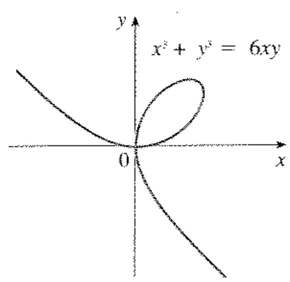


FIGURA 2

O fólio de Descartes

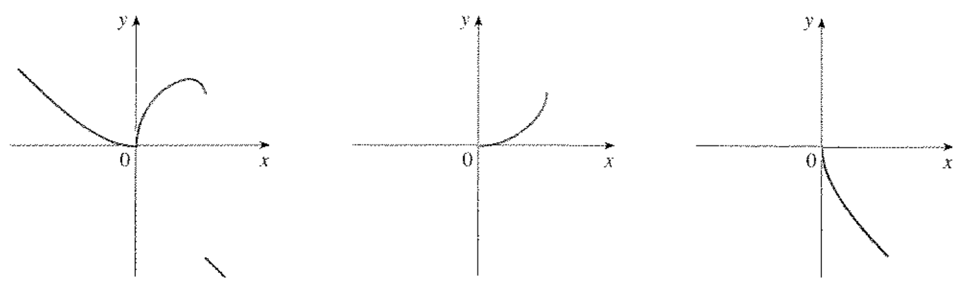


FIGURA 3

Gráficos de três funções definidas pelo fólio de Descartes

Felizmente não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para de encontrar a derivada de y. Em vez disso, podemos usar o método da **diferenciação implícita**, que consiste em diferenciar ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para y'. Nos exemplos e exercícios desta seção presuma sempre que a equação dada determine y implicitamente como uma função diferenciável de x de forma que o método da diferenciação implícita possa ser aplicado.

EXEMPLO 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

SOLUÇÃO 1

(a) Diferencie ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Assim,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora, vamos resolver essa equação para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) No ponto $(3, 4)$ temos $x = 3$ e $y = 4$; logo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em $(3, 4)$ é, portanto:

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUÇÃO 2

(b) Resolvendo a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto $(3, 4)$ está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Diferenciando f usando a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Logo

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e, como na Solução 1, uma equação da reta tangente é $3x + 4y = 25$.

NOTA 1 □ O Exemplo 1 ilustra que, mesmo quando é possível resolver uma equação explicitamente para y em termos de x, pode ser fácil usar a diferenciação implícita.

NOTA 2 □ A expressão $dy/dx = -x/y$ dá a derivada em termos de x e y. Isso está correto independentemente de qual função y ficará determinada pela equação dada. Por exemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

enquanto para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EXEMPLO 2

(a) Encontre y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Encontre a reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $(3, 3)$.

(c) Quais pontos sobre a curva à reta tangente são horizontais ou verticais?

SOLUÇÃO

(a) Diferenciando ambos os lados de $x^3 + y^3 = 6xy$ em relação a x, considerando y como uma função de x e usando a Regra da Cadeia no termo y^3 e a Regra do Produto no termo $6xy$, obtemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$$

ou

$$x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'$$

Agora vamos resolver para y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

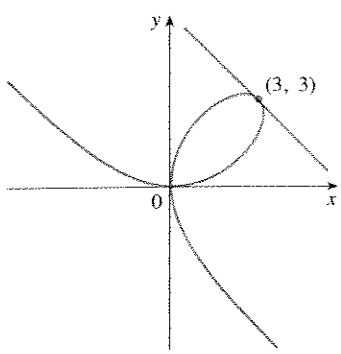


FIGURA 4

(b) Quando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

e uma olhada na Figura 4 confirma que este é um valor razoável para a inclinação em $(3, 3)$. Logo, uma equação da tangente ao fólio de $(3, 3)$ é

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 6$$

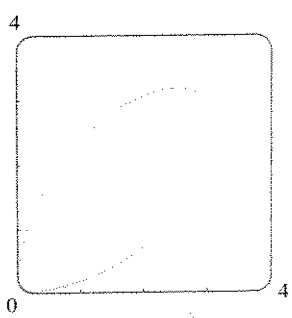


FIGURA 5

(c) A reta tangente é horizontal se $y' = 0$. Usando a expressão de y' da parte (a) vemos que $y' = 0$ quando $2y - x^2 = 0$. Substituindo $y = \frac{1}{2}x^2$ na equação da curva, obtemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

que se simplifica para $x^6 = 16x^3$. Portanto, tanto $x = 0$ como $x^3 = 16$. Se $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, então $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Assim, a tangente é horizontal em $(0, 0)$ e em $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, que é aproximadamente $(2{,}5198; 3{,}1748)$. Olhando a Figura 5 vemos que nossa resposta é razoável.

NOTA 3 ▫ Há uma fórmula para as três raízes de uma equação cúbica que é semelhante à fórmula quadrática, mas muito mais complicada. Se usarmos essa fórmula (ou um CAS) para resolver a equação $x^3 + y^3 = 6xy$ para y em termos de x, vamos obter as três funções determinadas pela equação:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

e

□ O matemático norueguês Niels Abel provou em 1824 que não existe uma fórmula geral dada para as raízes de uma equação de quinto grau em termos de radicais. Mais tarde o matemático francês Evariste Galois provou que é impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de n-ésimo grau (em termos de operações algébricas sobre os coeficientes) se n for qualquer inteiro maior que 4.

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Essas são as três funções cujos gráficos estão na Figura 3.) Você pode ver que o método da diferenciação implícita poupa uma enorme quantidade de trabalho em casos como este. Além disso, a diferenciação implícita funciona tão facilmente para as equações como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

para os quais é *impossível* encontrar uma expressão similar para y em termos de x.

EXEMPLO 3 □ Encontre y' se $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUÇÃO Diferenciando implicitamente em relação a x e lembrando que y é uma função em x, obtemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\operatorname{sen} x)$$

(Note que usamos a Regra da Cadeia no lado esquerdo e as Regras da Cadeia e do Produto no lado direito.) Juntando os termos que envolvem y' obtemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Portanto

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

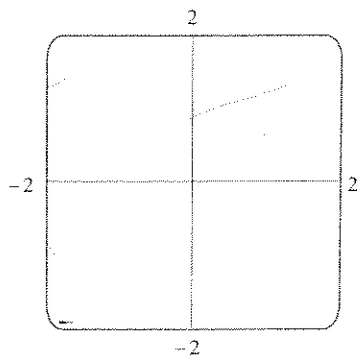


FIGURA 6

A Figura 6, feita com o comando *implicit-plott* de um CAS, mostra parte da curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como uma verificação de nossos cálculos, observe que $y' = -1$ quando $x = y = 0$, e no gráfico temos a impressão de que a inclinação é de aproximadamente -1 na origem.

Trajetórias Ortogonais

Duas curvas são chamadas **ortogonais** se em cada ponto de interseção suas tangentes são perpendiculares. No próximo exemplo vamos usar a diferenciação implícita para mostrar que duas famílias de curvas são **trajetórias ortogonais** uma da outra; isto é, cada curva em uma família é ortogonal a todas as curvas da outra família. As famílias ortogonais surgem em várias áreas da física. Por exemplo, as linhas de força em um campo eletrostático são ortogonais às linhas de potencial constante. Em termodinâmica, as isotérmicas (curvas de mesma temperatura) são ortogonais às linhas de fluxo de calor. As linhas aerodinâmicas (curvas de direção do fluxo de ar) são trajetórias ortogonais às curvas velocidade-equipotenciais.

EXEMPLO 4 □ A equação

$$xy = c \qquad c \neq 0 \tag{3}$$

representa uma família de hipérboles. (Os valores distintos da constante c dão origem a diferentes hipérboles. Veja a Figura 7.) A equação

$$x^2 - y^2 = k \qquad k \neq 0 \tag{4}$$

representa outra família de hipérboles com assíntotas $y = \pm x$. Mostre que toda curva da família (3) é ortogonal a toda curva na família (4); as famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

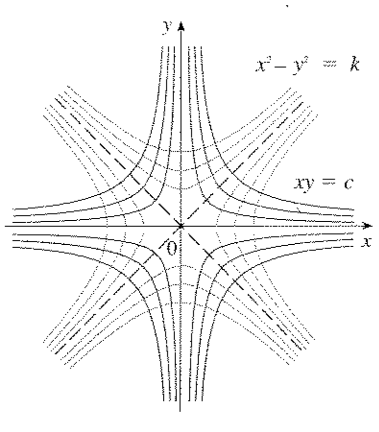


FIGURA 7

SOLUÇÃO Diferenciando implicitamente a Equação 3 obtemos

5 $$x\frac{dy}{dx}+y=0 \quad \text{logo} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

Diferenciando implicitamente a Equação 4 obtemos

6 $$2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{logo} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

De (5) e (6) vemos que em qualquer ponto de interseção das curvas em cada família, as inclinações das tangentes são os recíprocos negativos uma da outra. Portanto as curvas se interceptam em ângulos retos.

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

As funções inversas trigonométricas foram revisadas na Seção 1.6. Discutimos suas cor tinuidades na Seção 2.5 e suas assíntotas na Seção 2.6. Aqui a diferenciação implícita sei usada para determinar as derivadas das funções trigonométricas inversas, supondo qu essas funções sejam diferenciáveis [de fato, qualquer que seja a função f diferenciável um a um, pode ser provado que sua função inversa, f^{-1}, é também diferenciável, excet onde suas tangentes são verticais. Isso é plausível, pois o gráfico de uma função diferei ciável não possui bicos ou dobras e se o refletimos em torno de $y=x$, o gráfico de su função inversa também não terá bicos ou dobras].

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi dada por:

$$y=\operatorname{sen}^{-1}x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \qquad \text{e} \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

Diferenciando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x obtemos

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

Agora $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2\leqslant y\leqslant \pi/2$, logo:

$$\cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Esse mesmo método pode ser utilizado para obter a fórmula da derivada de *qualquer* função inversa. Veja o Exercício 67.

Portanto $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

A Figura 8 mostra o gráfico de $f(x)=\operatorname{tg}^{-1}x$ e sua derivada $f'(x)=1/(1+x^2)$. Note que f é crescente e $f'(x)$ é sempre positiva. O fato de que $\operatorname{tg}^{-1}x \to \pm\pi/2$ quando $x\to\pm\infty$ está refletido em que $f'(x)\to 0$ quando $x\to\pm\infty$.

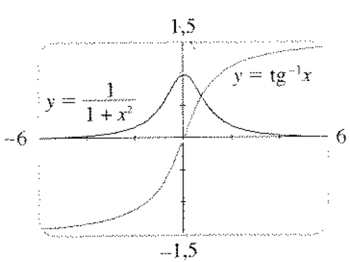


FIGURA 8

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira similar. Se $y=\operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Diferenciando essa última equação implicitamente em relação a x temos

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

EXEMPLO 5 Diferencie (a) $y = \dfrac{1}{\text{sen}^{-1}x}$ e (b) $f(x) = x \text{ arctg } \sqrt{x}$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\text{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\text{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

Lembre-se de que arctg x é uma notação também utilizada para $\text{tg}^{-1}x$.

(b)
$$f'(x) = x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \text{arctg } \sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \text{arctg } \sqrt{x}$$

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais freqüência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir. As provas das fórmulas ficam como exercício.

As fórmulas para as derivadas de $\text{cossec}^{-1}x$ e $\sec^{-1}x$ dependem das definições que foram usadas para essas funções (veja o Exercício 54).

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

3.6 Exercícios

1–4

(a) Encontre y' diferenciando implicitamente.
(b) Resolva a equação explicitamente para y e diferencie para obter y' em termos de x.
(c) Verifique se suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

5–20 Encontre dy/dx diferenciando implicitamente.

5. $x^2 + y^2 = 1$ **6.** $x^2 - y^2 = 1$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$ **8.** $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^2y + xy^2 = 3x$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \text{ sen } y = 4$ **12.** $1 + x = \text{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \text{ sen } y = 1$ **14.** $y \text{ sen}(x^2) = x \text{ sen}(y^2)$

15. $e^{x^2y} = x + y$ **16.** $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\text{tg}(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

19. $xy = \text{cotg}(xy)$ **20.** $\text{sen } x + \cos y = \text{sen } x \cos y$

21. Se $1 + f(x) + x^2[f(x)]^3 = 0$ e $f(1) = 2$, ache $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \text{ sen } g(x) = x^2$ e $g(1) = 0$, ache $g'(1)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a diferenciação implícita para encontrar dx/dy.

23. $y^4 + x^2y^2 + yx^4 = y + 1$ **24.** $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

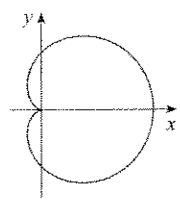
25–30 Use a derivação implícita para achar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

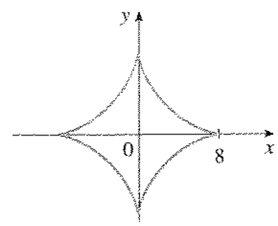
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (cardióide)

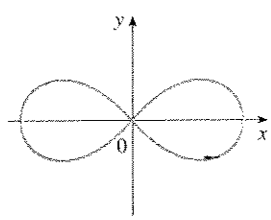
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astróide)

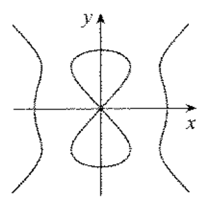




29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)

30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$,
$(0, -2)$
(curva do diabo)





31. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle de Eudoxus**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente sobre uma tela em comum. (Se seu recurso gráfico puder fazer o gráfico de curvas definidas implicitamente, então use essa capacidade. Se não, você poderá ainda fazer o gráfico dessa curva separando sua metade superior da inferior.)

32. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico da curva e as retas tangentes sobre uma tela em comum.

33. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade implícita de desenhar de um CAS.

(a) Faça o gráfico da curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as coordenadas x desses pontos.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.

(c) Encontre as coordenadas x exatas nos pontos da parte (a).

(d) Crie curvas mais extravagantes ainda modificando a equaçã da parte (a).

34. (a) A curva com a equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

tem sido comparada com um vagão sacolejante. Use um CA para fazer essa curva e descubra o porquê desse nome.

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas de x desses pontos.

35. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 29 onde a tangente é horizontal.

36. Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

37. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

38. Mostre que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

39. Mostre, usando a diferenciação implícita, que qualquer reta tangent em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

40. A Regra da Potência pode ser provada usando-se a diferenciaçã implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, $y = f(x) = x^n$ é assumida de antemão como uma função diferen ciável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a diferenciação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

41–50 Encontre a derivada da função. Simplifique onde possíve

41. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

42. $y = \sqrt{\text{tg}^{-1} x}$

43. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

44. $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ arcsen

45. $H(x) = (1 + x^2)\,\text{arctg}\, x$

46. $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

47. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$

48. $y = x\cos^{-1}x - \sqrt{1 - x^2}$

49. $y = \cos^{-1}\left(e^{2x}\right)$

50. $y = \text{arctg}(\cos\theta)$

51–52 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

51. $f(x) = e^x - x^2\,\text{arctg}\, x$

52. $f(x) = x\,\text{arcsen}(1 - x^2)$

53. Prove a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método como para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

54. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

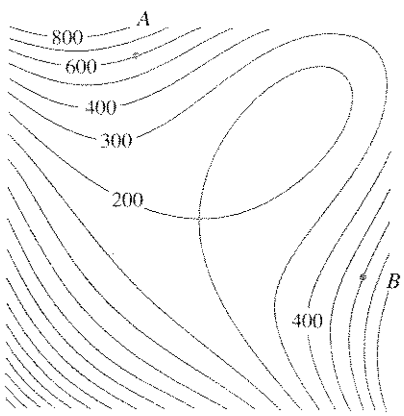
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

55–56 □ Mostre que as curvas dadas são ortogonais.

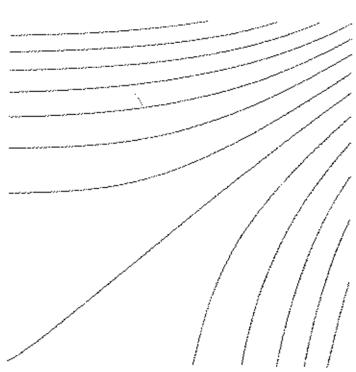
55. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$

56. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

57. As curvas de nível de uma região montanhosa são aquelas que ligam os pontos com a mesma elevação. Uma bola caindo de uma montanha segue a curva de descida mais inclinada, ortogonal às curvas de nível. Dado o mapa de nível de uma montanha, esboce os caminhos de bolas que começam nas posições A e B.



58. O homem do tempo da TV muitas vezes apresenta mapas mostrando frentes de pressão. Esses mapas exibem as curvas *isobáricas* ao longo das quais a pressão do ar é constante. Considere a família isobárica mostrada na figura.



Esboce os vários membros da família de trajetórias ortogonais dos isóbaros. Dado o fato de que o vento sopra da região de alta pressão para a de baixa, o que a família de ortogonais representa?

59–62 □ Mostre que as famílias de curvas dadas são trajetórias ortogonais uma da outra. Esboce ambas as famílias de curvas sobre o mesmo eixo.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

64. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intercepta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e a reta normal.

65. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

66. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passa pelo ponto $(12, 3)$.

67. (a) Suponha que f seja uma função um a um, diferenciável, e que sua função inversa f^{-1} seja também diferenciável. Use a diferenciação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

contanto que o denominador não seja 0.

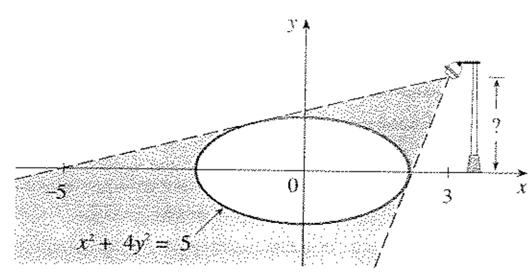
(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = 2x + \cos x$ é um a um.

(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use a fórmula do Exercício 67(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

69. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual o afastamento da lâmpada acima do eixo x?



3.7 Derivadas Superiores

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' é também uma função, logo f poderia ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Essa nova função f'' é chamad **derivada segunda** de f, pois é a derivada da derivada de f. Usando a notação de Leibniz escrevemos a derivada segunda de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Outra notação é $f''(x) = D^2f(x)$.

EXEMPLO 1 ◻ Se $f(x) = x\cos x$, encontre e interprete $f''(x)$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x) \\ &= -x\,\text{sen}\,x + \cos x \end{aligned}$$

Para achar $f''(x)$ diferenciamos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(-x\,\text{sen}\,x + \cos x) \\ &= -x\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x) + \text{sen}\,x\frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= -x\cos x - \text{sen}\,x - \text{sen}\,x \\ &= -x\cos x - 2\,\text{sen}\,x \end{aligned}$$

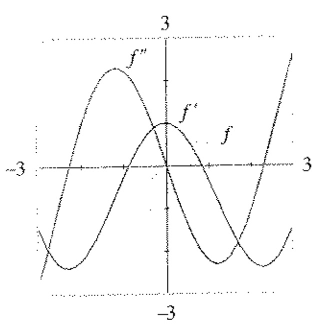


FIGURA 1
Os gráficos de $f(x) = x\cos x$ e suas derivadas primeira e segunda

Os gráficos de f, f' e f'' estão mostrados na Figura 1.

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$. Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Da Figura 1, pode-se notar que $f''(x) = 0$ sempre que $y = f'(x)$ tem uma tangente horizontal. Também, $f''(x)$ é positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva, e negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa. Logo, os gráficos servem como uma verificação sobre nossos cálculos.

Em geral, podemos interpretar uma derivada segunda como uma taxa de variação (taxa de variação. O exemplo mais conhecido disso é a *aceleração*, que definimos a segu

Se $s = s(t)$ é a função posição de um objeto que se move ao longo de uma linha re sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como ur função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo é denominada **acel ração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e portanto, a derivada segunda da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

EXEMPLO 2 □ A posição da partícula é dada pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

onde t é medido em segundos e s, em metros.
(a) Encontre a aceleração no instante t. Qual é a aceleração depois de 4 s?
(b) Faça o gráfico da função posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(c) Quando a partícula está aumentando a velocidade? Quando está diminuindo?

SOLUÇÃO
(a) A função velocidade é a derivada da função posição:

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

A aceleração é a derivada da função velocidade:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

□ A unidade usada para a aceleração é metro por segundo, denotada m/s².

(b) A Figura 2 mostra os gráficos de s, v e a.
(c) A partícula aumenta a rapidez quando a velocidade é positiva e crescente (v e a são ambos positivos) e também quando a velocidade é negativa e decrescente (v e a são ambos negativos). Em outras palavras, a partícula aumenta a rapidez quando a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal. (A partícula é empurrada no mesmo sentido de seu movimento.) Da Figura 2 vemos que isso acontece quando $1 < t < 2$ e $t > 3$. A partícula diminui a rapidez quando v e a têm sinais opostos, isto é, quando $0 \leqslant t < 1$ e $2 < t < 3$. A Figura 3 resume o movimento da partícula.

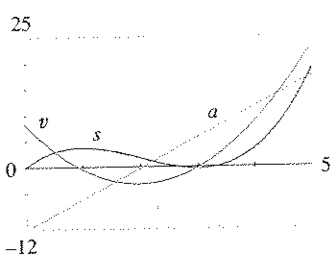
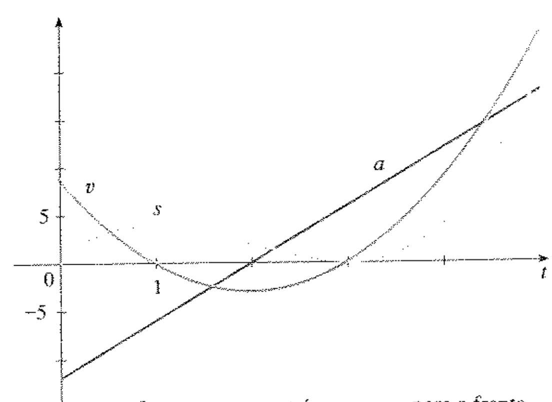


FIGURA 2



para a frente | para trás | para a frente

diminuindo a rapidez | aumentando a rapidez | diminuindo a rapidez | aumentando a rapidez

FIGURA 3

A **derivada terceira** f''' é a derivada da derivada segunda: $f''' = (f'')'$. Logo $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$, ou como a taxa de variação de $f''(x)$. Se $y = f(x)$, então as notações alternativas para a derivada terceira são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = D^3f(x)$$

O processo pode ser continuado. A derivada quarta f'''' é geralmente denotada por $f^{(4)}$. Em geral, a derivada n-ésima de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida de f diferenciando n vezes. Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = D^nf(x)$$

Podemos interpretar a derivada terceira fisicamente no caso onde a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a derivada terceira da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada **arranco**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Logo, o arranco é a taxa de variação da aceleração. Ela é assim chamada porque um grande arranco significa um movimento rápido na aceleração, que causa um movimento rápido em um veículo.

EXEMPLO 3 Se $\quad y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$

então

$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$
$$y'' = 6x - 12$$
$$y''' = 6$$
$$y^{(4)} = 0$$

e de fato $y^{(n)} = 0$ para todo $n \geqslant 4$.

EXEMPLO 4 Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, encontre $f^{(n)}(x)$.

SOLUÇÃO

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$f''(x) = (-2)(-1)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-5}$$
$$f^{(5)}(x) = -5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-6} = -5!x^{-6}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot x^{-(n+1)}$$

□ O fator $(-1)^n$ ocorre na fórmula para $f^{(n)}(x)$ porque introduzimos outro sinal negativo toda vez que diferenciamos. Uma vez que os valores sucessivos de $(-1)^n$ são $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$, a presença de $(-1)^n$ indica que o sinal varia para cada derivada sucessiva.

ou

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Aqui temos usado o símbolo fatorial $n!$ para o produto dos primeiros n inteiros positivos.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}$$

O exemplo a seguir mostra como achar a derivada segunda de uma função que é definida implicitamente.

EXEMPLO 5 □ Encontre y'' se $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUÇÃO Diferenciando a equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolvendo para y' temos

$$\boxed{1} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Para achar y'' diferenciamos essa expressão para y' usando a Regra do Quociente e lembrando que y é uma função de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Se substituirmos a Equação 1 dentro dessa expressão obteremos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Mas os valores de x e y devem satisfazer a equação original $x^4 + y^4 = 16$. Logo, a resposta simplifica-se para

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

□ A Figura 4 mostra o gráfico da curva $x^4 + y^4 = 16$ do Exemplo 5. Note que ela é uma versão esticada e achatada do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Por essa razão ela é algumas vezes chamada de *círculo gordo*. Ele começa muito íngreme pela esquerda e rapidamente se torna bem plano. Isso pode ser notado da expressão

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

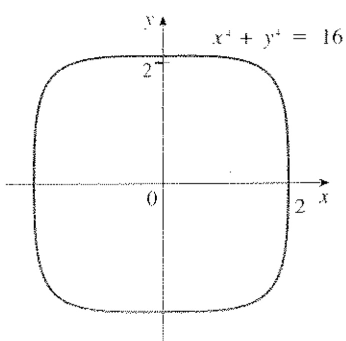


FIGURA 4

EXEMPLO 6 □ Encontre $D^{27} \cos x$.

SOLUÇÃO Algumas das primeiras derivadas de $\cos x$ são as seguintes:

$$D \cos x = -\text{sen}\, x$$

$$D^2 \cos x = -\cos x$$

$$D^3 \cos x = \text{sen}\, x$$

□ Observe o padrão.

$$D^4 \cos x = \cos x$$

$$D^5 \cos x = -\text{sen } x$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de período 4 e, em particular, $D^n \cos x = \cos x$ sempre que n é um múltiplo de 4. Conseqüentemente

$$D^{24} \cos x = \cos x$$

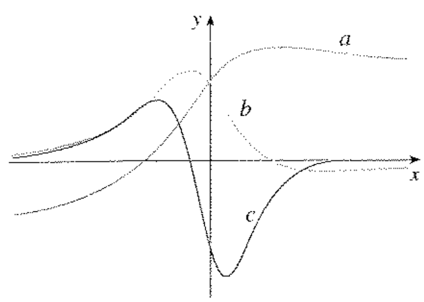
e, diferenciando mais três vezes, temos

$$D^{27} \cos x = \text{sen } x$$

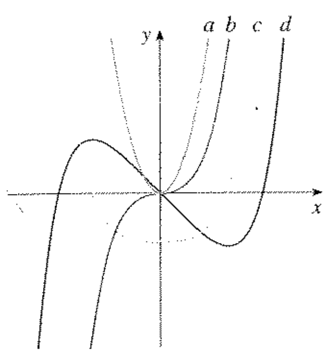
Vimos que uma aplicação das derivadas segunda e terceira ocorre analisando o movimento dos objetos usando a aceleração e um arranco. Investigaremos outra aplicação de derivada segunda no Exercício 62 e na Seção 4.3, nas quais mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11 do Volume II veremos como as derivadas segunda e superiores nos capacitam a representar as funções como as somas de série infinita.

3.7 Exercícios

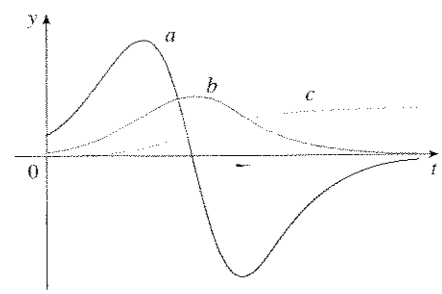
1. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique sua escolha.



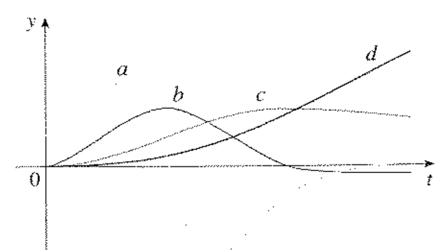
2. A figura mostra gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique sua escolha.



3. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, a outra, a velocidade do carro e uma terceira, sua aceleração. Identifique cada curva e explique sua escolha.



4. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição do carro, a outra, a velocidade do carro, uma terceira, a aceleração e uma quarta, o arranco. Identifique cada curva e explique sua escolha.



5–20 □ Encontre as derivadas primeira e segunda da função.

5. $f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$

6. $f(t) = t^8 - 7t^6 + 2t^4$

7. $y = \cos 2\theta$

8. $y = \theta \text{ sen } \theta$

9. $F(t) = (1 - 7t)^6$

10. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

11. $H(u) = \dfrac{1 - 4u}{1 + 3u}$

12. $H(s) = a\sqrt{s} + \dfrac{b}{\sqrt{s}}$

13. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

14. $y = xe^{cx}$

15. $y = \left(x^3 + 1\right)^{2/3}$

16. $y = \dfrac{4x}{\sqrt{x+1}}$

17. $H(t) = \text{tg } 3t$

18. $g(s) = s^2 \cos s$

19. $g(t) = t^3 e^{5t}$

20. $h(x) = \text{tg}^{-1}(x^2)$

21. (a) Se $f(x) = 2 \cos x + \text{sen}^2 x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Para ver se suas respostas para a parte (a) são razoáveis compare os gráficos de f, f'' e f''.

22. (a) Se $f(x) = e^x - x^3$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Para ver se suas respostas para a parte (a) são razoáveis compare os gráficos de f, f' e f''.

23–24 □ Encontre y'''.

23. $y = \sqrt{2x + 3}$

24. $y = \dfrac{x}{2x - 1}$

25. Se $f(t) = t \cos t$, encontre $f'''(0)$.

26. Se $g(x) = \sqrt{5 - 2x}$, encontre $g'''(2)$.

27. Se $f(\theta) = \text{cotg } \theta$, encontre $f'''(\pi/6)$.

28. Se $g(x) = \sec x$, encontre $g'''(\pi/4)$.

29–32 □ Encontre y'' diferenciando implicitamente.

29. $9x^2 + y^2 = 1$

30. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

31. $x^3 + y^3 = 1$

32. $x^4 + y^4 = a^4$

33–37 □ Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$.

33. $f(x) = x^n$

34. $f(x) = \dfrac{1}{5x - 1}$

35. $f(x) = e^{2x}$

36. $f(x) = \sqrt{x}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$

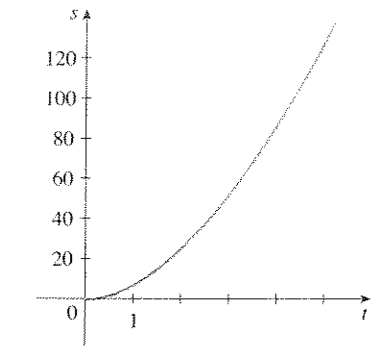
38–40 □ Encontre a derivada dada encontrando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

38. $D^{74}\text{sen } x$

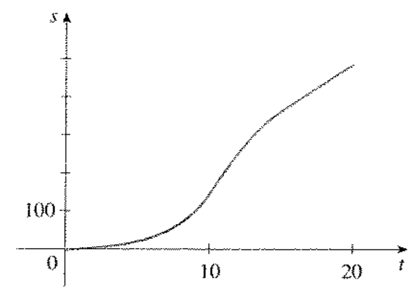
39. $D^{103}\cos 2x$

40. $D^{1.000}xe^{-x}$

41. Um carro inicia do repouso, e o gráfico de sua função posição está mostrado na figura, onde s é medida em pés e t, em segundos. Use-o para fazer o gráfico da velocidade e estime a aceleração em $t = 2$ segundos do gráfico da velocidade. Então esboce um gráfico da função aceleração.



42. (a) O gráfico de uma função posição de um carro é mostrado, onde s é medida em pés e t, em segundos. Use-o para fazer o gráfico da velocidade e da aceleração do carro. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o arranco em $t = 10$ segundos. Quais são as unidades para o arranco?

43–46 □ A equação do movimento é dada por uma partícula, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre (a) a velocidade e a aceleração como funções em t, (b) a aceleração depois de 1 segundo e (c) a aceleração no instante em que a velocidade é 0.

43. $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2, \quad t \geq 0$

44. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t, \quad t \geq 0$

45. $s = \text{sen } (\pi t/6) + \cos(\pi t/6), \quad 0 \leq t \leq 2$

46. $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1, \quad t \geq 0$

47–48 □ Uma equação do movimento é dada, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre (a) o instante em que a aceleração é 0 e (b) o deslocamento e a velocidade nesse instante.

47. $s = t^4 - 4t^3 + 2$

48. $s = 2t^3 - 9t^2$

49. Uma partícula move-se de acordo com uma lei do movimento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, onde t está medido em segundos e s, em metros.
(a) Encontre a aceleração no instante t e depois de 3 s.
(b) Faça o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 8$.
(c) Quando a partícula está aumentando a rapidez? E quando está diminuindo?

50. Uma partícula move-se ao longo do eixo x, sua posição no instante t dado por $x(t) = t/(1 + t^2)$, $t \geq 0$, onde t está medido em segundos e x, em metros.
(a) Encontre a aceleração no instante t. Quando ela está em 0?
(b) Faça o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 4$.
(c) Quando a partícula está aumentando a rapidez? E quando está diminuindo?

51. Uma massa atada a uma mola vertical tem função posição dada por $y(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, onde A é a amplitude de sua oscilação e ω, é uma constante.
(a) Encontre a velocidade e aceleração como função do tempo.
(b) Mostre que a aceleração é proporcional ao deslocamento de y.
(c) Mostre que a velocidade é máxima quando a aceleração é 0.

52. Uma partícula move-se ao longo de uma reta como o deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

53. Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

54. Encontre um polinômio de terceiro grau Q tal que $Q(1) = 1$, $Q'(1) = 3$, $Q''(1) = 6$ e $Q'''(1) = 12$.

55. A equação $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$ é chamada **equação diferencial**, pois envolve a função desconhecida y e suas derivada y' e y''. Encontre as constantes A e B tal que sua função $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisfaça essa equação. (Equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9 do Volume II.)

56. Encontre as constantes A, B e C tal que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = x^2$.

57. Para que os valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

58. Encontre os valores de λ para os quais $y = e^{\lambda x}$ satisfaz a equação $y + y' = y''$.

59–61 A função g é uma função duas vezes diferenciável. Encontre f'' em termos de g, g' e g''.

59. $f(x) = xg(x^2)$

60. $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

61. $f(x) = g(\sqrt{x})$

62. Se $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 5$, faça os gráficos de f e f''. Em quais intervalos $f''(x) > 0$? Nesses intervalos, como está relacionado o gráfico de f a suas retas tangentes? O que acontece nos intervalos onde $f''(x) < 0$?

63. (a) Compute algumas das primeiras derivadas da função $f(x) = 1/(x^2 + x)$ até ver que os cálculos ficam algebricamente intratáveis.
(b) Use a identidade

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

para computar as derivadas mais facilmente. Então encontre uma expressão para $f^{(n)}(x)$. Esse método de dividir uma fração em termos de frações mais simples, chamado *frações parciais*, será visto com mais detalhes na Seção 7.4.

64. (a) Use um sistema algébrico computacional para calcular f''', onde

$$f(x) = \frac{7x + 17}{2x^2 - 7x - 4}$$

(b) Determine uma expressão para f''', expressando, primeiramente f em frações parciais. [No Maple, use o comando convert(f,parfrac,x); no Mathematica, utilize Apart[f].]

65. Determine as expressões para as cinco primeiras derivadas de $f(x) = x^2e^x$. Você vê alguma regra nessas expressões? Proponha uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e prove-a usando a indução matemática.

66. (a) Se $F(x) = f(x)g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que

$$F'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

(b) Encontre fórmulas similares para F''' e $F^{(4)}$.
(c) Conjecture uma fórmula para $F^{(n)}$.

67. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes diferenciáveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

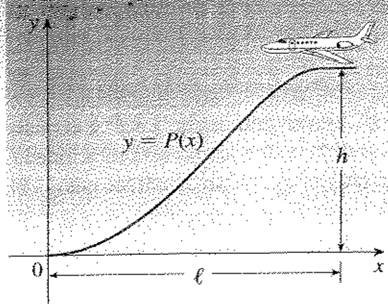
68. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem derivadas terceiras encontre uma fórmula para d^3y/dx^3 similar à dada no Exercício 67

69. Suponha p um inteiro positivo e f uma função p vezes o diferenciável tal que $f^{(p)} = f$. Usando a indução matemática, mostre que f é n vezes o diferenciável, para todo o inteiro positivo n, e que cada uma das suas derivadas mais altas, $f^{(n)}$, é igual a uma das p funções $f, f', f'', \ldots, f^{(p-1)}$.

Projeto Aplicado — Onde um Piloto Deve Começar a Descida?

Um caminho de aproximação para uma aeronave aterrissar é mostrado na figura e satisfaz as seguintes condições:

(i) A altitude é h quando a descida começa, a uma distância horizontal ℓ da origem.



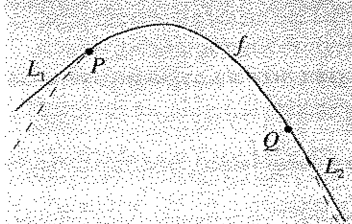
(ii) O piloto tem de manter uma velocidade constante horizontal v ao longo da descida.

(iii) O valor absoluto da aceleração vertical não deveria exceder uma constante k (que é muito menor que a aceleração devido à gravidade).

1. Ache um polimônio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaça a condição (i) impondo condições satisfatórias em $P(x)$ e $P'(x)$ para o começo da descida e para a aterrissagem.
2. Use as condições (ii) e (iii) para mostrar
$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leq k$$
3. Suponha que uma companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical de um avião exceda $k = 860$ mi/h^2. Se a altitude de um avião é 35.000 pés e a velocidade é 300 mi/h, a que distância do aeroporto o piloto deve iniciar a descida?
4. Faça um caminho de aproximação se as condições declaradas no Problema 3 estiverem satisfeitas.

Projeto Aplicado

Construindo uma Montanha-russa Melhor



Suponha que você tenha sido contratado para construir a primeira rampa de subida e de descida de uma nova montanha-russa. Analisando as fotografias de suas montanhas-russas preferidas, você decidiu construir a rampa de ascensão com inclinação de 0,8 e a de descida com inclinação de $-1,6$. Decidiu também ligar essas duas semi-retas $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$, com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde x e $f(x)$ são medidos em pés. Para que a trajetória seja suave, não deve haver mudanças bruscas na direção e sentido do movimento, por isso você quer que os segmentos de retas L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição, P e Q (veja a figura). Para tornar suas equações mais simples, você escolheu o ponto P como origem de seu sistema de referência.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja de 100 pés. Escreva equações em a, b e c que lhe garantam que a trajetória seja suave nos pontos de transição.
   (b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c e encontre uma fórmula para $f(x)$.
   (c) Faça gráficos de L_1, f e L_2 para verificar geometricamente que as transições são suaves.
   (d) Ache a diferença de elevação entre P e Q.
2. A solução obtida no Problema 1 *pode parecer suave*, mas ela poderá não *ser sentida* suave visto que a função definida por partes [formada por $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$ e por $L_2(x)$ para $x > 100$] não tem segunda derivada contínua. Então você decide melhorar seu projeto usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ somente no intervalo $10 \leq x \leq 90$ e conectando-a com as duas funções lineares por meio das duas funções cúbicas seguintes:
$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n, \quad 0 \leq x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s, \quad 90 < x \leq 100$$
   (a) Escreva um sistema de equações em 11 variáveis que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas sejam concordantes nos pontos de transição.
   (b) Resolva as equações da parte (a) usando um sistema algébrico computacional e determine as fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
   (c) Faça gráficos de L_1, g, q, h, e L_2 e compare com os desenhados no Problema 1(c).

3.8 Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a diferenciação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, a função logarítmica natural $y = \ln x$. Assumiremos que as funções logarítmicas são diferenciáveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos. (Veja Figura 12 na Seção 1.6.)

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

Prova Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

□ A Fórmula 3.5.5 diz que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Diferenciando essa equação implicitamente em relação a x, usando a Fórmula 3.5.5, obtemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

e logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Se pusermos $a = e$ na Fórmula 1, então o fator $\ln a$ no lado direito torna-se $\ln e = 1$, e obtemos a fórmula para a derivada da função logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Comparando-se as Fórmulas 1 e 2, vemos uma das principais razões para os logaritmos naturais (logaritmos com base e) serem usados em cálculo. A fórmula de diferenciação é a mais simples quando $a = e$, pois $\ln e = 1$.

EXEMPLO 1 □ Diferencie $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUÇÃO Para usar a Regra da Cadeia vamos fazer $u = x^3 + 1$. Então $y = \ln u$; logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

Em geral, se combinarmos a Fórmula 2 com a Regra da Cadeia, como no Exemplo 1, obtemos

3
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EXEMPLO 2 □ Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUÇÃO Usando (3), temos

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{cotg} x$$

EXEMPLO 3 □ Diferencie $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUÇÃO Dessa vez o logaritmo é a função de dentro; logo, a Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EXEMPLO 4 □ Diferencie $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 1 com $a = 10$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}$$

EXEMPLO 5 □ Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$.

A Figura 1 mostra o gráfico da função f do Exemplo 5 junto com o gráfico de suas derivadas. Ela dá uma verificação visual de nossos cálculos. Note que $f'(x)$ é muito grande em valor absoluto (negativo) quando f está decrescendo rapidamente.

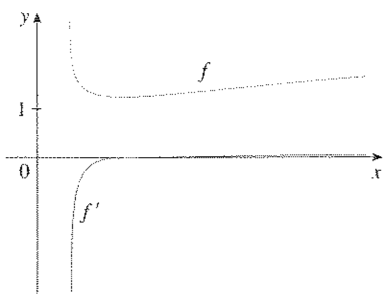


FIGURA 1

SOLUÇÃO 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\,\frac{d}{dx}\,\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1-(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro simplificarmos a função dada usando as leis do logaritmo, então a diferenciação ficará mais fácil:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right] \\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)\end{aligned}$$

(Essa resposta pode ser deixada assim, mas se usássemos um denominador comum obteríamos a mesma resposta da Solução 1.)

A Figura 2 mostra o gráfico da função $f(x) = \ln|x|$ do Exemplo 6 e suas derivadas $f'(x) = 1/x$. Observe que quando x é pequeno, o gráfico de $y = \ln|x|$ é íngreme e, portanto, $f'(x)$ é grande (positiva ou negativa).

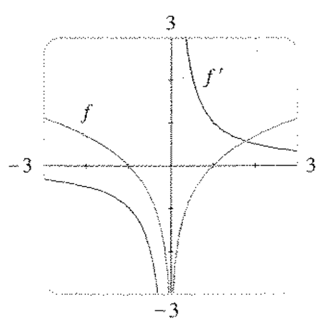


FIGURA 2

EXEMPLO 6 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln|x|$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sempre que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

O resultado do Exemplo 6 vale a pena ser lembrado:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

Diferenciação Logarítmica

Os cálculos de derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes ou potências podem muitas vezes ser simplificados tomando-se os logaritmos. O método usado no exemplo a seguir é chamado **diferenciação logarítmica**.

EXEMPLO 7 Diferencie $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUÇÃO Tome o logaritmo em ambos os lados da equação e use as Leis do Logaritmo para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Diferenciando implicitamente em relação a x temos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Resolvendo dy/dx, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

□ Se não usássemos a diferenciação logarítmica no Exemplo 7, teríamos de utilizar tanto a Regra do Quociente quanto a Regra do Produto. Os cálculos resultantes seriam horríveis.

Como temos uma expressão explícita para y, podemos substituí-lo por ela e escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Passos na Diferenciação Logarítmica

1. Tome o logaritmo natural em ambos os lados de uma equação $y = f(x)$ e use as Leis dos Logaritmos para simplificar.
2. Diferencie implicitamente em relação a x.
3. Resolva a equação resultante para y'.

Se $f(x) < 0$ para algum valor de x, então $\ln f(x)$ não está definida, mas podemos escrever $|y| = |f(x)|$ e usar a Equação 4. Ilustramos esse procedimento provando a versão geral da Regra da Potência, como prometemos na Seção 3.1.

A Regra da Potência Se n for qualquer número real e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova Seja $y = x^n$. Use a diferenciação logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

□ Se $x = 0$, podemos mostrar que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ diretamente da definição de uma derivada.

Conseqüentemente

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Daí

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Você deve distinguir cuidadosamente entre a Regra da Potência $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, onde a base é variável e o expoente, constante, e a regra para diferenciar as funções exponenciais $[(a^x)' = a^x \ln a]$, onde a base é constante e o expoente, variável.

Em geral há quatro casos para os expoentes e as bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ $\quad$ (a e b são constantes)

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para achar $(dy/dx)[f(x)]^{g(x)}$, a diferenciação logarítmica pode ser usada, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 8 □ Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}$.

□ A Figura 3 ilustra o Exemplo 8 mostrando os gráficos de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ e suas derivadas.

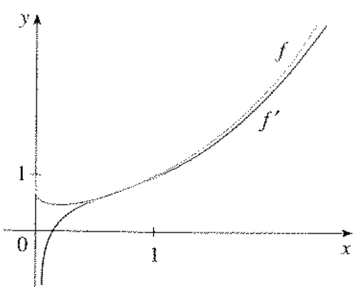


FIGURA 3

SOLUÇÃO 1 Usando a diferenciação logarítmica, temos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUÇÃO 2 Outro método é escrever $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)$$

$$= e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

O Número e como um Limite

Temos mostrado que se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1/x$. Assim, $f'(1) = 1$. Usamos esse fato para expressar o número e como um limite.

Da definição de uma derivada como um limite temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

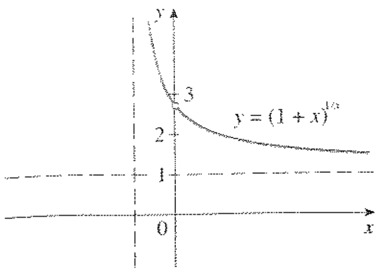


FIGURA 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1+x)^{1/x}$ da Figura 4 e na tabel para os valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, correto até a sétima casa decima

$$e \approx 2{,}7182818$$

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$, e uma expressã alternativa para e é

6 $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.8 Exercícios

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–20 □ Diferencie a função.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$
3. $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$
4. $f(x) = \cos(\ln x)$
5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$
6. $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$
8. $f(x) = \ln\sqrt[5]{x}$
9. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$
10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
11. $F(t) = \ln\dfrac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}$
12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
13. $g(x) = \ln\dfrac{a - x}{a + x}$
14. $F(y) = y\ln(1 + e^y)$
15. $f(u) = \dfrac{\ln u}{1 + \ln(2u)}$
16. $y = \ln(x^4 \operatorname{sen}^2 x)$
17. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$
18. $G(u) = \ln\sqrt{\dfrac{3u+2}{3u-2}}$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21–24 □ Encontre y' e y''.

21. $y = x\ln x$
22. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
23. $y = \log_{10} x$
24. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

25–28 □ Diferencie f e encontre o domínio de f.

25. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x-1)}$
26. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

27. $f(x) = x^2 \ln(1 - x^2)$

28. $f(x) = \ln \ln \ln x$

29. Se $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, encontre $f'(e)$.

30. Se $f(x) = x^2 \ln x$, encontre $f'(1)$.

31–32 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

31. $y = \ln \ln x, \quad (e, 0)$

32. $y = \ln(x^3 - 7), \quad (2, 0)$

33. Se $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

34. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e suas retas tangentes.

35–46 □ Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de função.

35. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

36. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

38. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

39. $y = x^x$

40. $y = x^{1/x}$

41. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

42. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

43. $y = (\ln x)^x$

44. $y = x^{\ln x}$

45. $y = x^{e^x}$

46. $y = (\ln x)^{\cos x}$

47. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

48. Encontre y' se $x^y = y^x$.

49. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

50. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

51. Use a definição da derivada para provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

52. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

3.9 Funções Hiperbólicas

Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem freqüentemente em matemática e suas aplicações e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas **funções hiperbólicas**, particularmente **seno hiperbólico, cosseno hiperbólico** e assim por diante.

Definições de Funções Hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Os gráficos do seno e cosseno hiperbólico podem ser esboçados usando-se um recurso gráfico como nas Figuras 1 e 2.

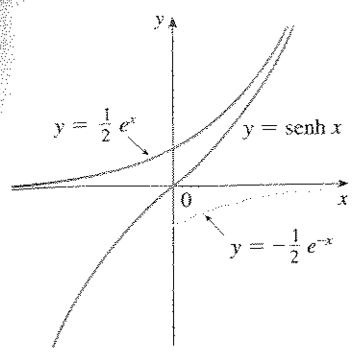


FIGURA 1
$y = \text{senh}\, x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

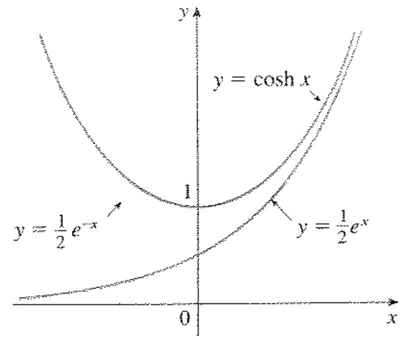


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

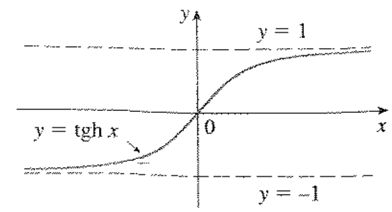


FIGURA 3
$y = \text{tgh}\, x$

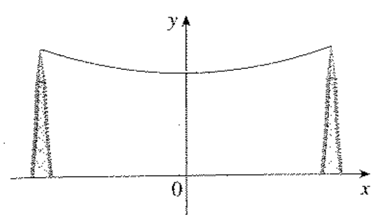


FIGURA 4
Uma catenária $y = c + a \cosh (x/a)$

Note que senh possui domínio e imagem iguais a $\mathbb{R}$, enquanto cosh tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[1, \infty)$. O gráfico de tgh está mostrado na Figura 3. Tem assíntotas horizontais $y = \pm 1$ (veja o Exercício 23).

Alguns dos usos matemáticos de funções hiperbólicas serão vistos no Capítulo 7. As aplicações na ciência e engenharia ocorrem sempre que uma entidade, como a luz, a velocidade, a eletricidade ou a radioatividade, é gradualmente absorvida ou extinguida, pois o decaimento pode ser representado por funções hiperbólicas. A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado. Pode ser provado que se um cabo flexível pesado (como uma linha de telefone ou de eletricidade) estiver suspenso entre dois pontos na mesma altura, então ele assume a forma de uma curva com a equação $y = c + a \cosh (x/a)$, chamada *catenária* (veja a Figura 4). (A palavra latina *catena* significa "cadeia".)

As funções trigonométricas satisfazem um número de identidades que são análogas a bem conhecidas identidades trigonométricas. Listemos algumas aqui e deixemos muitas das provas para os exercícios.

Identidades Hiperbólicas

$$\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x$$

$$\text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x \,\text{senh}\, y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x \,\text{senh}\, y$$

EXEMPLO 1 □ Prove (a) $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$ e (b) $1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \tfrac{4}{4} = 1$$

(b) Vamos começar com a identidade provada na parte (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Se dividirmos ambos os lados por $\cosh^2 x$, obteremos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ou
$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

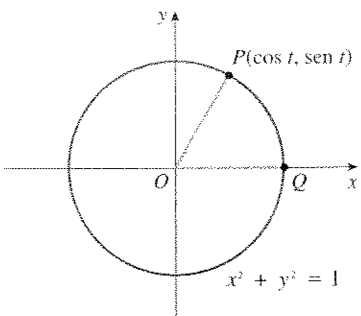


FIGURA 5

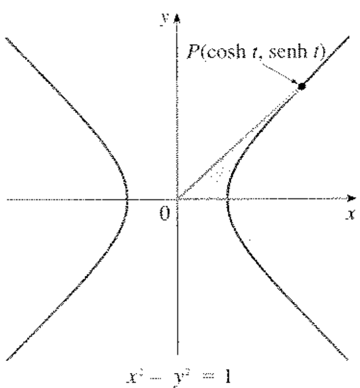


FIGURA 6

A identidade provada no Exemplo 1(a) fornece um indício para a razão do nome "funções hiperbólicas".

Se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, pois $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. De fato, t pode ser interpretada como a medida em radianos de $\angle POQ$ da Figura 5. Por essa razão as funções trigonométricas são algumas vezes chamadas funções *circulares*.

Da mesma maneira, se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está sobre o ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, pois $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ e $\cosh t \geqslant 1$. Dessa vez, t não representa a medida de um ângulo. Entretanto, resulta que t representa o dobro da área sombreada do setor hiperbólico da Figura 6, da mesma forma que no caso trigonométrico t representa o dobro da área sombreada do setor circular na Figura 5.

As derivadas das funções hiperbólicas são facilmente computadas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Vamos listar as fórmulas de diferenciação para as funções hiperbólicas como Tabela 1. As provas restantes ficarão como exercícios. Note a analogia com as fórmulas de diferenciação para as funções trigonométricas, mas esteja alerta — os sinais algumas vezes são diferentes.

1 Derivadas de Funções Hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cossech}^2 x$$

EXEMPLO 2 □ Qualquer uma dessas regras de diferenciação pode ser combinada com a Regra da Cadeia. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh\sqrt{x}) = \operatorname{senh}\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Funções Hiperbólicas Inversas

Você pode ver a partir das Figuras 1 e 3 que senh e tgh são funções um a um; logo, ela têm funções inversas denotadas por senh^{-1} e tgh^{-1}. A Figura 2 mostra que cosh não é um um, mas quando restringida no domínio $[0, \infty)$ torna-se um a um. A inversa da funçã cosseno hiperbólico está definida como a inversa dessa função restrita.

2
$$y = \text{senh}^{-1}x \iff \text{senh}\, y = x$$
$$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$
$$y = \text{tgh}^{-1}x \iff \text{tgh}\, y = x$$

As inversas das demais funções hiperbólicas são definidas analogamente (veja o Exercício 28)

Podemos esboçar os gráficos de senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ e tgh^{-1} nas Figuras 7, 8 e 9 usando a Figuras 1, 2 e 3.

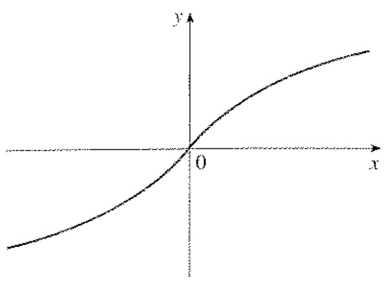


FIGURA 7
$y = \text{senh}^{-1}x$
domínio $= \mathbb{R}$
imagem $= \mathbb{R}$

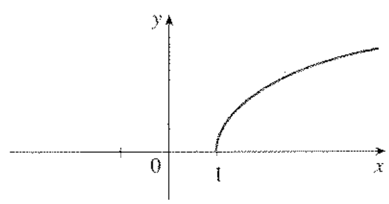


FIGURA 8
$y = \cosh^{-1}x$
domínio $= [1, \infty)$
imagem $= [0, \infty)$

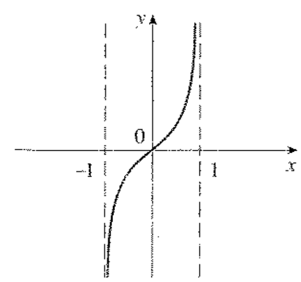


FIGURA 9
$y = \text{tgh}^{-1}x$
domínio $= (-1, 1)$
imagem $= \mathbb{R}$

Uma vez que as funções hiperbólicas estão definidas em termos das funções exponen ciais, não é surpreendente aprender que as das funções hiperbólicas inversas podem se expressas em termos de logaritmos. Em particular, temos:

3 $$\text{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\text{tgh}^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

□ A Fórmula 3 está provada no Exemplo 3. As provas das Fórmulas 4 e 5 são requisitadas nos Exercícios 26 e 27.

EXEMPLO 3 □ Mostre que $\text{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUÇÃO Seja $y = \text{senh}^{-1}x$. Então

$$x = \text{senh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

logo
$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

ou, multiplicando por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Isso é realmente uma equação quadrática em e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Resolvendo a fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Note que $e^y > 0$, mas $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ $\left(\text{pois } x < \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Assim, o sinal de menos é inadmissível e temos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Conseqüentemente $\qquad y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(Veja o Exercício 25 para outro método.)

6 Derivadas de Funções Hiperbólicas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossech}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

□ Observe que as fórmulas para as derivadas de $\text{tgh}^{-1}x$ e $\text{cotg}^{-1}x$ parecem ser idênticas. Mas os domínios dessas funções não têm nenhum ponto em comum: $\text{tg}^{-1}x$ é definida para $|x| < 1$, enquanto $\text{cotg}^{-1}x$ é definida para $|x| > 1$.

As funções hiperbólicas inversas são todas diferenciáveis, pois as funções hiperbólicas são diferenciáveis. As fórmulas na Tabela 6 podem ser provadas ou pelo método para as funções inversas ou diferenciando as Fórmulas 3, 4 e 5.

EXEMPLO 4 □ Prove que $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \text{senh}^{-1}x$. Então $\text{senh}\, y = x$. Se diferenciarmos essa equação implicitamente em relação a x, obteremos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Uma vez que $\cosh^2 y - \text{senh}^2 y = 1$ e $\cosh y \geqslant 0$, temos $\cosh y = \sqrt{1 + \text{senh}^2 y}$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUÇÃO 2 Da Equação 3, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)]$.

SOLUÇÃO Usando a Tabela 6 e a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)] &= \frac{1}{1-(\text{sen}\, x)^2}\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)\\ &= \frac{1}{1-\text{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x\end{aligned}$$

3.9 Exercícios

1–6 Encontre o valor numérico de cada expressão.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0
2. (a) tgh 0 (b) tgh 1
3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2
4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)
5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$
6. (a) senh 1 (b) $\text{senh}^{-1} 1$

7–19 Prove a identidade.

7. $\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$
(Isso mostra que senh é uma função ímpar.)
8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Isso mostra que cosh é uma função par.)
9. $\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$
10. $\cosh x - \text{senh}\, x = e^{-x}$
11. $\text{senh}(x+y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$
12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$
13. $\text{cotg}^2 x - 1 = \text{cossech}^2 x$
14. $\text{tgh}(x+y) = \dfrac{\text{tgh}\, x + \text{tgh}\, y}{1 + \text{tgh}\, x\, \text{tgh}\, y}$
15. $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$
16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$
17. $\text{tgh}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
18. $\dfrac{1+\text{tgh}\, x}{1-\text{tgh}\, x} = e^{2x}$
19. $(\cosh x + \text{senh}\, x)^n = \cosh nx + \text{senh}\, nx$
(n qualquer número real)

20. Se $\text{senh}\, x = \frac{3}{4}$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.
21. Se $\text{tgh}\, x = \frac{4}{5}$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.
22. (a) Use os gráficos de senh, cosh e tgh das Figuras 1–3 para fazer os gráficos de cossech, sech e cotgh.
(b) Verifique os gráficos que você esboçou na parte (a) usando o recurso gráfico para produzi-los.

23. Use as definições das funções hiperbólicas para achar os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{tgh} x$ (b) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tgh} x$

(c) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{senh} x$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x$

(e) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sech} x$ (f) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{cotgh} x$

(g) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotgh} x$ (h) $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{cotgh} x$

(i) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cossech} x$

24. Prove as fórmulas dadas na Tabela 1 para as derivadas das funções (a) cosh, (b) tgh, (c) cossech, (d) sech e (e) cotgh.

25. Dê uma solução alternativa para o Exemplo 3 tomando $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ e então usando o Exercício 9 e o Exemplo 1(a) com x substituído por y.

26. Prove a Equação 4.

27. Prove a Equação 5 usando (a) o método do Exemplo 3 e (b) o Exercício 18 com x substituído por y.

28. Para cada uma das seguintes funções (i) dê uma definição como aquelas em (2), (ii) esboce o gráfico e (iii) encontre uma fórmula similar à Equação 3.

(a) $\operatorname{cossech}^{-1}$ (b) sech^{-1} (c) $\operatorname{cotgh}^{-1}$

29. Prove as fórmulas dadas na Tabela 6 para as derivadas das funções que se seguem.

(a) $\cosh^{-1}$ (b) tgh^{-1} (c) $\operatorname{cossech}^{-1}$

(d) sech^{-1} (e) $\operatorname{cotgh}^{-1}$

30–47 □ Encontre a derivada.

30. $f(x) = \operatorname{tgh} 4x$

31. $f(x) = x \cosh x$

32. $g(x) = \operatorname{senh}^2 x$

33. $h(x) = \operatorname{senh}(x^2)$

34. $F(x) = \operatorname{senh} x \operatorname{tgh} x$

35. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

36. $f(t) = e^t \operatorname{sech} t$

37. $h(t) = \operatorname{cotgh}\sqrt{1 + t^2}$

38. $f(t) = \ln(\operatorname{senh} t)$

39. $H(t) = \operatorname{tgh}(e^t)$

40. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

41. $y = e^{\cosh 3x}$

42. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(2x)$

43. $y = \operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x \operatorname{tgh}^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

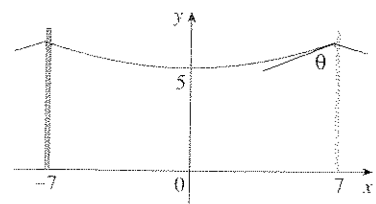
47. $y = \operatorname{cotgh}^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

48. Um cabo flexível sempre fica pendurado na forma de uma catenária $y = c + a \cosh(x/a)$, onde c e a são constantes e $a > 0$ (veja a Figura 4 e o Exercício 50). Faça o gráfico de vários membros da família de funções $y = a \cosh(x/a)$. Como o gráfico muda quando a varia?

49. Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados a 14 m na forma da catenária $y = 20 \cosh(x/20) - 15$, em que x e y são medidas em metros.

(a) Encontre a inclinação dessa curva quando ela encontra o poste à direita.

(b) Encontre o ângulo θ entre a reta e o poste.



50. Usando os princípios da física pode ser mostrado que, quando um cabo é pendurado entre dois postes, toma a forma de uma curva $y = f(x)$, que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração devido à gravidade e T, a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenada é apropriadamente escolhido. Verifique que a função

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

é a solução dessa equação diferencial.

51. (a) Mostre que qualquer função da forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisfaz a equação diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Encontre $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$, e $y'(0) = 6$.

52. Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

53. Em quais pontos da curva $y = \cosh x$ faz a tangente ter inclinação 1?

54. Se $x = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$, mostre que $\sec \theta = \cosh x$.

55. Mostre que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β tal que $ae^x + be^{-x}$ é igual à $\alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$ ou $\alpha \cosh(x + \beta)$. Em outras palavras, quase todas as funções da forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ são as funções seno ou cosseno hiperbólicas esticadas e deslocadas.

3.10 Taxas Relacionadas

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume como o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a idéia é computar a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados em relação ao tempo.

EXEMPLO 1 □ Está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico, e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o diâmetro é 50 cm?

■ De acordo com os Princípios de Problema–Solução discutidos no Capítulo 1, na página 80 o primeiro passo é entender o problema. Isso inclui lê-lo cuidadosamente, identificando o que foi dado e pedido, e introduzir uma notação adequada.

SOLUÇÃO Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada*:

a taxa de crescimento do volume do ar é 100 cm^3/s

e o *que foi pedido*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

Para expressar matematicamente essas grandezas introduzimos alguma *notação* sugestiva:

Seja V o volume do balão e r o seu raio.

A chave está em lembrar-se de que taxas de variação são derivadas. Neste problema, o volume e o raio são ambos funções do tempo t. A taxa de crescimento do volume em relação ao tempo é a derivada dV/dt, e a taxa de crescimento do raio é dr/dt. Podemos, portanto, reapresentar o que foi dado e pedido como a seguir:

$$\textit{Dado:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Pedido:} \qquad \frac{dr}{dt} \text{ quando } r = 25 \text{ cm}$$

■ O segundo estágio do problema–solução é idealizar um plano para conectar o que foi dado e o que foi pedido.

Para conectar dV/dt e dr/dt primeiro relacionamos V e r pela fórmula para o volume de uma esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para usar a informação dada, diferenciamos cada lado dessa equação em relação a t. Para diferenciar o lado direito precisamos usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

■ Observe que, embora dV/dt seja constante, dr/dt *não* é constante.

Agora resolvemos para a grandeza desconhecida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Se colocarmos $r = 25$ e $dV/dt = 100$ nessa equação, obteremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

O raio do balão está crescendo a uma taxa de $1/(25\pi)$ cm/s.

EXEMPLO 2 □ Uma escada com 10 pés de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 pé/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 6 pés da parede?

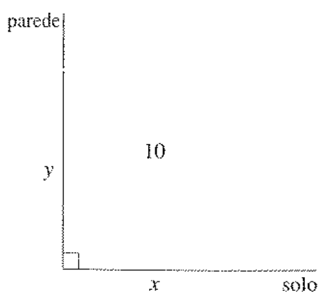


FIGURA 1

SOLUÇÃO Primeiro desenhe um diagrama e marque-o como na Figura 1. Seja x em pés a distância da base da escada à parede, e y em pés a distância do topo da escada ao solo. Note que x e y são ambas as funções de t (tempo).

Estamos dando que $dx/dt = 1$ pé/s e vamos querer achar dy/dt quando $x = 6$ pés (veja a Figura 2). Neste problema, a relação entre x e y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Diferenciando cada lado em relação a t usando a Regra da Cadeia, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

e resolvendo essa equação para a taxa desejada, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

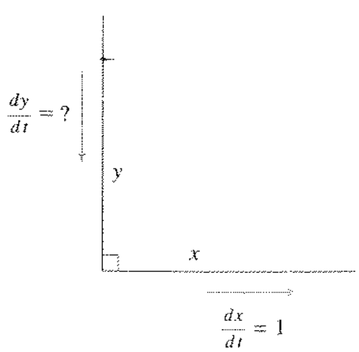


FIGURA 2

Quando $x = 6$, o Teorema de Pitágoras fornece $y = 8$; logo, substituindo esses valores e $dx/dt = 1$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pé/s}$$

O fato de dy/dt ser negativo significa que a distância do topo da escada ao solo está *decrescendo* a uma taxa de $\frac{3}{4}$ pé/s. Em outras palavras, o topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de $\frac{3}{4}$ pé/s.

EXEMPLO 3 □ Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de 2 m³/min, encontre a taxa na qual o nível da água estará elevado quando a água estiver a 3 m de profundidade.

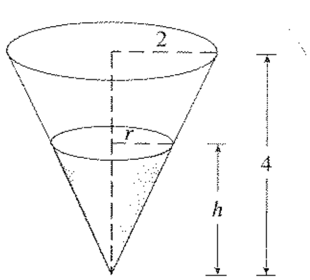


FIGURA 3

SOLUÇÃO Primeiro vamos esboçar o cone e marcá-lo, como na Figura 3. Seja V, r e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t, onde t está medido em minutos.

Dado que $dV/dt = 2$ m³/min, precisamos achar dh/dt quando $h = 3$ m. A grandeza V e h estão relacionadas pela equação

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

mas é muito proveitoso expressar V como uma função de h. Em ordem, para eliminar r, usamos os triângulos similares na Figura 3 para escrever

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

e a expressão para V torna-se

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Agora podemos diferenciar cada lado em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

logo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$ m e $dV/dt = 2$ m³/min, temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

O nível da água estará subindo uma taxa de $8/(9\pi) \approx 0{,}28$ m/min.

Estratégia É útil lembrar-se de alguns dos princípios do problema–solução do Capítulo 1, na página 80, e adaptá-los para as taxas relacionadas com a base em nossa experiência dos Exemplos 1–3:

O que temos de aprender dos Exemplos 1–3 que nos ajudará a resolver os problemas futuros?

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível, faça um diagrama.
3. Introduza a notação. Atribua os símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa requerida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição (como no Exemplo 3).
6. Use a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação em relação a t.
7. Substitua a informação dada dentro da equação resultante e resolva-a para a taxa desconhecida.

Os exemplos a seguir são ilustrações da estratégia.

Advertência: Um erro comum é substituir a informação numérica dada (para as grandezas que variam com o tempo) precocemente. Isso deve ser feito somente *após* a diferenciação. (O Passo 7 segue o Passo 6.) Por exemplo, no Exemplo 3 tratamos com os valores genéricos com h até que finalmente na última etapa substituímos $h = 3$. (Se tivéssemos feito $h = 3$ anteriormente, teríamos obtido $dV/dt = 0$, que está claramente errado.)

EXEMPLO 4 O carro A está indo rumo ao oeste a 50 mi/h e o carro B está indo rumo ao norte a 60 mi/h. Ambos estão dirigindo para a interseção de duas estradas. A que taxa os carros estão se aproximando um do outro quando o carro A está a 0,3 mi e o carro B está a 0,4 mi da interseção?

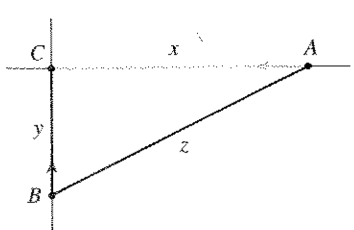


FIGURA 4

SOLUÇÃO Desenhemos a Figura 4, onde C é a interseção das estradas. Em um dado instante t, seja x a distância do carro A a C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, onde x, y e z são dadas em milhas.

Dado que $dx/dt = -50$ mi/h e $dy/dt = -60$ mi/h. (As derivadas são negativas porque e y são decrescentes.) Pedimos para encontrar dz/dt. A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Diferenciando cada lado em relação a t, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Quando $x = 0{,}3$ mi e $y = 0{,}4$ mi, o Teorema de Pitágoras dá $z = 0{,}5$ mi; logo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}5}\left[0{,}3(-50) + 0{,}4(-60)\right]$$
$$= -78 \text{ mi/h}$$

Os carros se aproximam um do outro a uma taxa de 78 mi/h.

EXEMPLO 5 □ Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 4 pés/s. Um holofote localizado no chão a 20 pés do caminho focaliza o homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 15 pés do ponto do caminho mais próximo da luz?

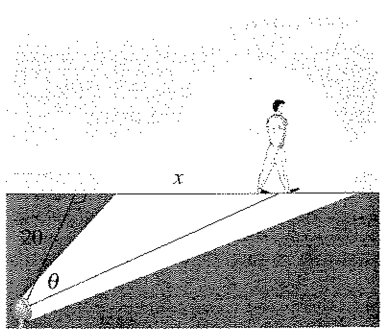


FIGURA 5

SOLUÇÃO Fizemos um esboço da Figura 5, onde x é a distância entre o homem e o ponto do caminho mais próximo ao holofote. Seja θ o ângulo entre o feixe do holofote e a perpendicular ao caminho.

Dado que $dx/dt = 4$ pés/s, nos foi pedido para encontrar $d\theta/dt$ quando $x = 15$. A equação que relaciona x e θ pode ser escrita a partir da Figura 5:

$$\frac{x}{20} = \text{tg } \theta \qquad x = 20 \text{ tg } \theta$$

Diferenciando cada lado em relação a t, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = 20 \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

logo

$$\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \tfrac{1}{5}\cos^2\theta$$

Quando $x = 15$, o comprimento do feixe é 25, logo $\cos\theta = \frac{4}{5}$ e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0{,}128$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,128 rad/s.

3.10 Exercícios

1. Se V for o volume de um cubo com a aresta de comprimento x e à medida que o tempo passa o cubo se expande, encontre dV/dt em termos de dx/dt.

2. (a) Se A for a área do círculo com raio r e à medida que o tempo passa o círculo se expande, encontre dA/dt em termos de dr/dt.
   (b) Suponha que o óleo sai por uma ruptura de um petroleiro e espalha-se em um padrão circular. Se o raio do óleo derramado cresce a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do derramamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

3. Se $y = x^3 + 2x$ e $dx/dt = 5$, encontre dy/dt quando $x = 2$.

4. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $dy/dt = 6$, encontre dx/dt quando $y = 4$.

5. Se $z^2 = x^2 + y$, $dx/dt = 2$ e $dy/dt = 3$, encontre dz/dt quando $x = 5$ e $y = 12$.

6. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Quando ela atinge o ponto $(2, 3)$, a coordenada y está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Quão rápido está variando a coordenada x do ponto naquele instante?

7–10 □

(a) Quais são as grandezas dadas no problema?
(b) Qual é a grandeza desconhecida?
(c) Faça um desenho da situação para qualquer instante t.
(d) Escreva uma equação que relacione as grandezas.
(e) Termine resolvendo o problema.

7. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 1 mi, a 500 mi/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância do avião até a estação está crescendo quando ele está a 2 mi além da estação.

8. Se uma bola de neve derrete de forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de 1 cm²/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro está a 10 cm.

9. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 15 pés. Um homem com 6 pés de altura anda afastando-se do poste com uma velocidade de 5 pés/s de acordo com uma trajetória reta. Com que velocidade se move o topo de sua sombra quando ele está a 40 pés do poste?

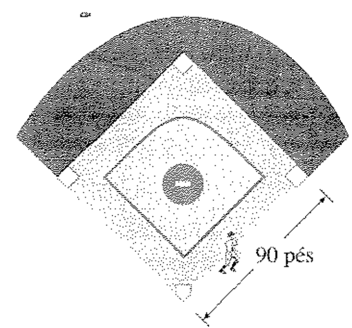
10. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h, e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido estará variando a distância entre os navios às 4 horas da tarde?

11. Dois carros iniciam o movimento de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60 mi/h, e o outro para o oeste a 25 mi/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

12. Um holofote sobre o chão ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido decresce sua sombra sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

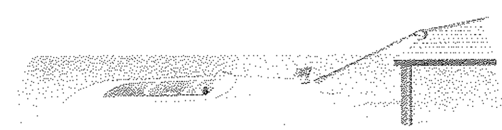
13. Um homem começa a andar para o norte a 4 pés/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 5 pés/s de um ponto a 500 pés a leste de P. A que taxa as pessoas estão se separando 15 minutos depois de a mulher começar a andar?

14. Uma quadra de beisebol é um quadrado com 90 pés. Um batedor atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s.
   (a) A que taxa está decrescendo sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?
   (b) A que taxa está aumentando sua distância da terceira base no mesmo momento?



15. A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto a área do triângulo cresce a uma taxa de 2 cm²/min. A que taxa está variando a base do triângulo quando a altura é 10 cm e a área, 100 cm²

16. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (que está 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido está se aproximando o bote do ancoradouro quando ele estiver a 8 m dele?



17. Ao meio-dia, um navio A está 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h, e o B está indo para o norte a 25 km/h. Quão rápido está variando a distância entre eles às 4 horas da tarde?

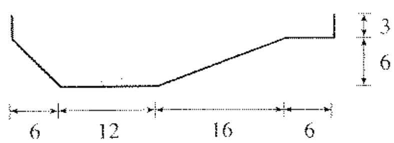
18. Uma partícula está se movendo ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

19. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm³/min. Ao mesmo tempo está sendo bombeada a água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura, o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque

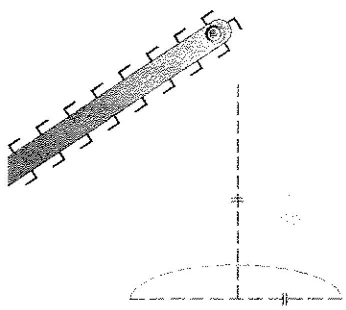
20. Um cocho tem 10 pés de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 3 pés na base e 1 pé de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 12 pés³/min, quão rápido estará se elevando o nível da água quando ele estiver com 6 polegadas de profundidade?

21. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezóide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m³/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?

22. Uma piscina tem 20 pés de largura por 40 pés de comprimento, 3 pés de profundidade na parte rasa, e 9 pés na parte mais funda. Uma secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for preenchida a uma taxa de 0,8 pés³/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 5 pés?



23. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 30 pés³/min, constitunido uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido está crescendo a altura da pilha quando está a 10 pés de altura?



24. Um papagaio (pipa) a 100 pés acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 8 pés/s. A que taxa está decrescendo o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 200 pés de linha serem soltos?

25. Dois lados de um triângulo são 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados do comprimento fixo é $\pi/3$.

26. Dois lados de um triângulo são 12 m e 15 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 2°/min. Quão rápido está crescendo o comprimento do terceiro lado quando o ângulo entre os lados do comprimento fixo é 60°?

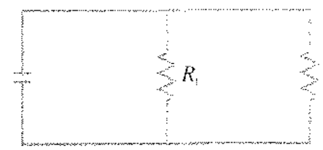
27. A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás está comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 600 cm³, a pressão é 150 kPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

28. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$, onde C é uma constante. Suponha que a um certo instante o volume é de 400 cm³ e a pressão, 80 kPa, e está decrescendo a uma taxa de 10 kPa//min. A que taxa está crescendo o volume nesse instante?

29. Se dois resistores com resistência R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

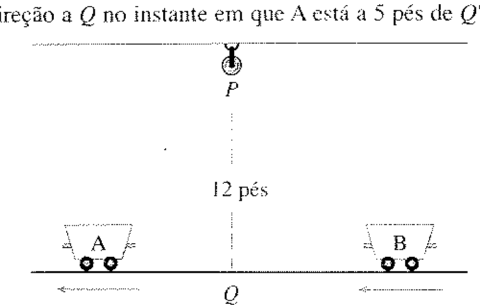
Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s, respectivamente, quão rápido está variando R quando $R_1 = 80\ \Omega$ e $R_2 = 100\ \Omega$?



30. Nos peixes, o peso do cérebro B como uma função do peso corporal W tem sido modelado pela função potência $B = 0{,}007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função do comprimento corporal L (medido em centímetros) é $W = 0{,}12L^{2,53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?

31. Uma escada com 10 pés de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de 2 pés/s, quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando o ângulo é $\pi/4$ rad?

32. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 39 pés que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q está sobre o chão 12 pés diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada afastando-se de Q a uma velocidade de 2 pés/s. Quão rápido está se movendo a carreta B em direção a Q no instante em que A está a 5 pés de Q?



33. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés.

(a) Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento?

(b) Se a câmera de televisão apontar sempre em direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?

34. Um farol está localizado em uma ilha, e a distância entre ele e o ponto mais próximo P em uma praia reta do continente é de 3 km. Sua luz faz quatro revoluções por minuto. Quão rápido estará se movendo o feixe de luz ao longo da praia quando ele estiver a 1 km de P?

35. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30°. A que taxa está crescend a distância do avião à estação de radar 1 minuto mais tarde?

36. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Um vai para o leste a 3 mi/h e a outra, para o nordeste a 2 mi/h. Quão rápido está variando a distância entre as pessoas após 15 minutos?

37. Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m a um velocidade constante de 7 m/s. Seu amigo está em pé a uma distância de 200 m do centro da pista. Quão rápido estará variando a distância entre os amigos quando estiverem a uma distância de 200 m?

38. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?

3.11 Aproximações Lineares e Diferenciais

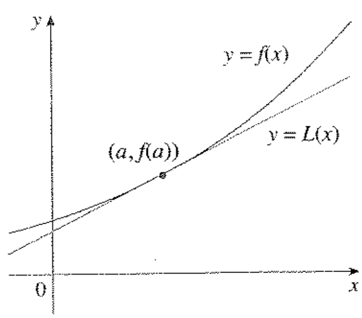


FIGURA 1

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto d tangência. De fato, dando um *zoom* em direção a um ponto sobre o gráfico de uma funçã diferenciável, notamos que o gráfico assemelha-se cada vez mais a sua reta tangente (ve a Figura 2 na Seção 2.7 e a Figura 3 na Seção 2.8). Essa observação é a base para o métod de encontrar os valores aproximados de funções.

A idéia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas é difícil (o mesmo impossível) computar os valores próximos de f. Assim decidimos pelos valore facilmente computados da função L, cujo gráfico é a reta tangente de f em $(a, f(a))$. (Ve a Figura 1.)

Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para curva $y = f(x)$ quando x está próximo de a. Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a. função linear cujo gráfico é essa reta tangente, isto é,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é chamada de **linearização** de f em a.

O seguinte exemplo é típico em situações nas quais usamos uma aproximação line para predizer o comportamento futuro de uma função dada empiricamente.

EXEMPLO 1 □ Suponha que após ter recheado um peru a sua temperatura é de 50 °F e você então o coloca no forno a 325 °F. Depois de uma hora o termômetro do peru indic que sua temperatura está a 93 °F e, após 2 horas, a 129 °F. Prediga a temperatura do pe após 3 horas.

SOLUÇÃO Se $T(t)$ representa a temperatura do peru após t horas, nos foi dado que $T(0) = 50$, $T(1) = 93$ e $T(2) = 129$. Para fazer uma aproximação linear com $a = 2$, precisamos de uma estimativa para a derivada $T'(2)$. Uma vez que

$$T'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2}$$

podemos estimar $T'(2)$ pelo quociente de diferenças com $t = 1$:

$$T'(2) \approx \frac{T(1) - T(2)}{1 - 2} = \frac{93 - 129}{-1} = 36$$

Isso equivale a aproximar a taxa instantânea de variação da temperatura pela taxa média de variação entre $t = 1$ e $t = 2$, que é de 36 °F/h. Com essa estimativa, a aproximação linear (1) para a temperatura após 3 horas é

$$T(3) \approx T(2) + T'(2)(3 - 2)$$
$$\approx 129 + 36 \cdot 1 = 165$$

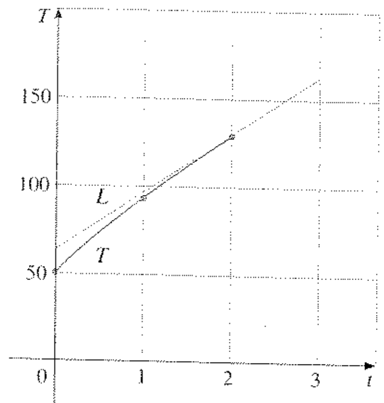


FIGURA 2

Logo, a temperatura esperada após 3 horas é de 165 °F.

Obtemos uma estimativa mais precisa para $T'(2)$ desenhando os dados, como na Figura 2, e estimando a inclinação da reta tangente em $t = 2$ como

$$T'(2) \approx 33$$

Então nossa aproximação linear torna-se

$$T(3) \approx T(2) + T'(2) \cdot 1 \approx 129 + 33 = 162$$

e nossa estimativa melhorada para a temperatura é de 162 °F.

Uma vez que a curva da temperatura fica abaixo da reta tangente, parece que a temperatura real após 3 horas será um pouco menor do que a 162 °F, talvez mais próxima a 160 °F.

EXEMPLO 2 Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$. Colocando esses valores na Equação 2, vemos que a linearização é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

A aproximação linear correspondente (1) é

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \quad \text{(quando } x \text{ está próximo de 1)}$$

Em particular, temos

$$\sqrt{3,98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0,98}{4} = 1,995 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4,05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1,05}{4} = 2,0125$$

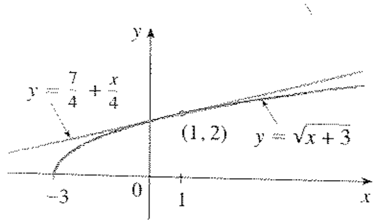


FIGURA 3

A aproximação linear está ilustrada na Figura 3. Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando x está próximo de 1. Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$, mas a aproximação linear funciona em todo o intervalo.

Na tabela a seguir comparamos as estimativas de uma aproximação linear no Exemplo 2 com os valores verdadeiros. Observe na tabela, e também na Figura 3, que a aproximação pela reta tangente dá boas estimativas quando x está próximo de 1, mas a precisão da aproximação deteriora à medida que x se afasta de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176 ...
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1,99499373 ...
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000 ...
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,01246117 ...
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2,02484567 ...
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797 ...
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974 ...

Quão boa é a aproximação obtida no Exemplo 2? O exemplo a seguir mostra que usando uma calculadora gráfica ou computador podemos determinar o intervalo dentro do qual uma aproximação linear fornece uma precisão especificada.

EXEMPLO 3 Para que valores de x a aproximação linear

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

é precisa dentro de 0,5? O que se pode dizer sobre uma precisão dentro de 0,1?

SOLUÇÃO Uma precisão dentro de 0,5 significa que as funções devem diferir, uma da outra, por menos que 0,5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0,5$$

Assim, podemos escrever

$$\sqrt{x+3} - 0,5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0,5$$

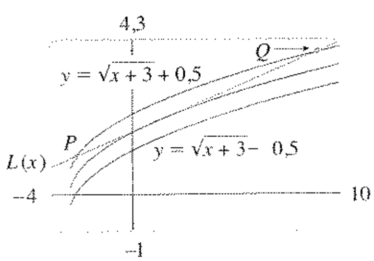


FIGURA 4

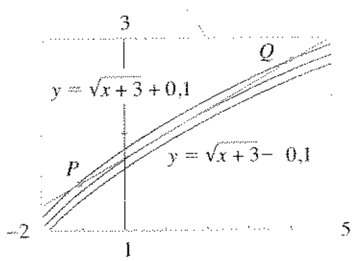


FIGURA 5

o que estabelece que a aproximação linear deve ficar entre as curvas obtidas deslocando-se a curva $y = \sqrt{x+3}$ para cima e para baixo por uma distância de 0,5. A Figura 4 mostra que a reta tangente $y = (7 + x)/4$ intercepta a curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0,5$ em P e Q. Dando um *zoom* e usando o cursor, estimamos que a coordenada x de P é cerca de $-2,66$ e que a coordenada x de Q é cerca de 8,66. Assim, vemos do gráfico que a aproximação

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

é precisa dentro de 0,5 quando $-2,6 < x < 8,6$. (Por segurança, arredondamos.)

Analogamente, da Figura 5 vemos que a aproximação é precisa dentro de 0,1 quando $-1,1 < x < 3,9$.

Aplicações à Física

As aproximações lineares são muitas vezes usadas em física. Analisando as conseqüências de uma equação, um físico às vezes precisa simplificar uma função substituindo-a por sua aproximação linear. Por exemplo, ao deduzir uma fórmula para o período de um pêndulo, os textos de física obtêm a expressão $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial e então substituem $\operatorname{sen} \theta$ por θ com a observação de que $\operatorname{sen} \theta$ está muito próximo de θ se θ não for grande. (Veja, por exemplo, *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht, 2. ed., Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000, p. 431.) Você pode verificar que a linearização da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = 0$ é $L(x) = x$, e assim a aproximação linear em 0 é

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(veja o Exercício 48). Assim, a dedução da fórmula para o período de um pêndulo usa a aproximação pela reta tangente para a função seno.

Outro exemplo ocorre na teoria da óptica, quando os raios de luz que chegam em ângulos rasos em relação ao eixo ótico são chamados *raios paraxiais*. Na ótica paraxial (ou gaussiana), tanto $\operatorname{sen} \theta$ como $\cos \theta$ são substituídos por suas linearizações. Em outras palavras, as aproximações lineares

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{e} \qquad \cos \theta \approx 1$$

são usadas, pois θ está próximo de 0. Os resultados de cálculos feitos com essas aproximações tornam-se a ferramenta teórica básica para projetar as lentes. (Veja *Optics*, de Eugene Hecht, 4. ed., Reading, MA: Addison-Wesley, 2002, p. 154.)

Na Seção 11.12 do Volume II vamos apresentar várias outras aplicações da idéia de aproximação linear para a física.

Diferenciais

Se $dx \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da Equação 3 por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Temos visto equações similares antes, mas agora o lado esquerdo pode genuinamente ser interpretado como uma taxa de diferenciais.

As idéias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais*. Se $y = f(x)$, onde f é uma função diferenciável, então a **diferencial** dx é uma variável independente; isto é, a dx pode ser dado um valor real qualquer. A **diferencial** dy é então definida em termos de dx pela equação

$$dy = f'(x)\, dx \tag{3}$$

Assim dy é uma variável dependente; ela depende dos valores de x e dx. Se a dx for dado um valor específico e x for algum número específico no domínio de f, então o valor numérico de dy está determinado.

O significado geométrico de diferenciais está na Figura 6. Seja $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e façamos $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

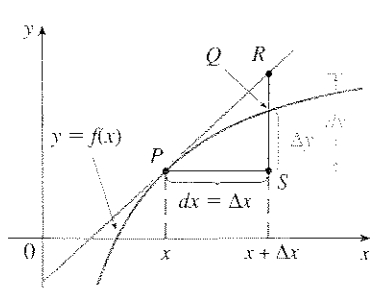


FIGURA 6

A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S a R é $f'(x)\, dx = dy$. Conseqüentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

EXEMPLO 4 Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x variar (a) de 2 para 2,05 e (b) de 2 para 2,01.

SOLUÇÃO
(a) Temos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$
$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$$
$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

Em geral, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, temos

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$$

(b) $$f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$$
$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$$

▫ A Figura 7 mostra a função do Exemplo 4 e uma comparação de dy e Δy quando $a = 2$. A janela de inspeção é [1,8, 2,5] por [6, 18].

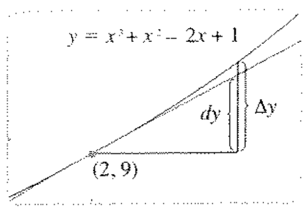


FIGURA 7

Note que no Exemplo 4 a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Note também que é muito mais fácil computar dy do que Δy. Para as funções mais complicadas pode ser impossível computar exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente proveitosa.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear (1) pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 2, temos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e $$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 2.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 5 ▫ O raio de uma esfera tem 21 cm, com um erro de medida possível de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm³.

NOTA □ Embora o erro possível no Exemplo 5 possa parecer muito grande, uma idéia melhor dele é dada pelo **erro relativo**, que é computado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

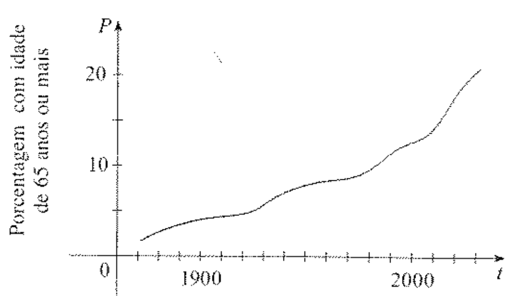
Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 5 o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também podem ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.11 Exercícios

1. No Exemplo 1, o peru é removido do forno quando sua temperatura atinge 185 °F e colocado sobre uma mesa em uma sala onde a temperatura é de 75 °F. Após dez minutos a temperatura é de 172 °F, e após 20 minutos, 160 °F. Use uma aproximação linear para predizer a temperatura do peru após meia hora. Você acha sua predição superestimada ou subestimada? Por quê?

2. A pressão atmosférica P decresce à medida que a altura h aumenta. A uma temperatura de 15 °C, a pressão é 101,3 quilopascals (kPa) no nível do mar, 87,1 kPa a $h = 1$ km e 74,9 kPa a $h = 2$ km. Use uma aproximação linear para estimar a pressão atmosférica a uma altitude de 3 km.

3. O gráfico indica como a população da Austrália está envelhecendo, apontando o passado e a porcentagem projetada da população com idade superior ou igual a 65 anos. Use uma aproximação linear para prever a porcentagem da população que terá 65 anos ou mais nos anos 2040 e 2050. Você acredita que suas previsões estão muito para mais ou para menos? Por quê?



4. A tabela mostra a população do Nepal (em milhões) em 30 de junho de cada ano dado. Use uma aproximação linear para estimar a população em meados de 1984. Utilize outra para prever a população em 2006.

t	1980	1985	1990	1995	2000
$N(t)$	15,0	17,0	19,3	22,0	24,9

5–8 □ Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

5. $f(x) = x^3$, $a = 1$

6. $f(x) = \ln x$, $a = 1$

7. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -8$

9. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e a reta tangente.

10. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0{,}95}$ e $\sqrt[3]{1{,}1}$. Ilustre fazendo os gráficos de g e a reta tangente.

11–14 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. Então determine os valores de x para os quais a aproximação linear é precisa dentro de 0,1.

11. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$

12. $\operatorname{tg} x \approx x$

13. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

14. $e^x \approx 1 + x$

15–20 Encontre a diferencial da função.

15. $y = x^4 + 5x$

16. $y = \cos \pi x$

17. $y = x \ln x$

18. $y = \sqrt{1 + t^2}$

19. $y = \dfrac{u + 1}{u - 1}$

20. $y = (1 + 2r)^{-4}$

21–26 (a) Encontre a diferencial dy e (b) calcule dy para os valores dados de x e dx.

21. $y = x^2 + 2x, \quad x = 3, dx = \frac{1}{2}$

22. $y = e^{x/4}, \quad x = 0, \ dx = 0{,}1$

23. $y = \sqrt{4 + 5x}, \ \ x = 0, \ \ dx = 0{,}04$

24. $y = 1/(x + 1), \ \ x = 1, \ \ dx = -0{,}01$

25. $y = \operatorname{tg} x, \quad x = \pi/4, \quad dx = -0{,}1$

26. $y = \cos x, \quad x = \pi/3, \quad dx = 0{,}05$

27–30 Compute Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. Então esboce um diagrama como o da Figura 6, mostrando o segmento de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

27. $y = x^2, \quad x = 1, \Delta x = 0{,}5$

28. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \Delta x = 1$

29. $y = 6 - x^2, \quad x = -2, \Delta x = 0{,}4$

30. $y = 16/x, \quad x = 4, \Delta x = -1$

31–36 Use as diferenciais (ou, de maneira equivalente, uma aproximação linear) para estimar o número dado.

31. $(2{,}001)^5$

32. $\sqrt{99{,}8}$

33. $(8{,}06)^{2/3}$

34. $1/1.002$

35. $\operatorname{tg} 44°$

36. $\ln 1{,}07$

37–39 Explique em termos de aproximação linear ou de difere ciais por que a aproximação é razoável.

37. $\sec 0{,}08 \approx 1$

38. $(1{,}01)^6 \approx 1{,}06$

39. $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$

40. Sejam $f(x) = (x - 1)^2$, $\quad g(x) = e^{-2x}$
e $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$.

(a) Determine as linearizações para f, g e h em $a = 0$. O qu você observa? Como explicar o que aconteceu?

(b) Faça os gráficos de f, g e h e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pio Justifique.

41. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível em computar (a) o volume do cubo e (b) a área da superfície do cubo.

42. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 c

(a) Use as diferenciais para estimar o erro máximo na área d disco calculado.

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

43. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possív de 0,5 cm.

(a) Use as diferenciais para estimar o erro máximo na área superficial calculada. Qual o erro relativo?

(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

44. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

45. (a) Utilize as diferenciais para achar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.

(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

46. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sangüíneo, o fluxo (o volume de sangue por unidade de tempo passando por u dado ponto) é proporcional à quarta potência do raio R do vas

$$F = kR^4$$

(Isso é conhecido como a Lei de Poiseuille; mostraremos p que isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmen obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angi plastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro (artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangu

Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afe o fluxo do sangue?

47. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

(a) $dc = 0$

(b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u + v) = du + dv$

(d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

(f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

48. Em *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht, 2. ed., Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2002, p. 431, no curso da dedução da fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pequenos, o valor de θ em radianos é muito próximo do valor de sen θ; eles diferem por menos do que 2% até cerca de 20°".

(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

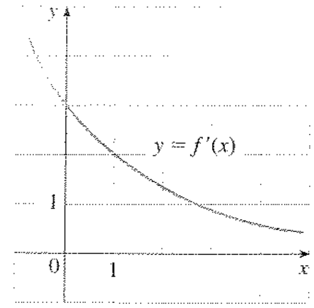
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Use um recurso gráfico para determinar os valores de x para os quais sen x e x diferem por menos do que 2%. Então verifique a afirmativa de Hecht, convertendo de radianos para graus.

49. Suponha que a única informação que temos sobre uma função f é que $f(1) = 5$ e que o gráfico de suas *derivadas* é como mostrado.

(a) Use a aproximação linear para estimar $f(0,9)$ e $f(1,1)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.



50. Suponha que não temos uma fórmula para $g(x)$, mas sabemos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo x.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $g(1,95)$ e $g(2,05)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

Projeto de Laboratório — Polinômios de Taylor

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor daquela de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$, pois $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor do que a linear, vamos tentar aquela de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

(i) $P(a) = f(a)$ (P e f devem ter o mesmo valor em a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P e f devem ter a mesma taxa de variação em a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (A inclinação de P e f deve variar segundo a mesma taxa.)

1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P, f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f.

2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) = P(x)$ do Problema 1 é precisa dentro de 0,1. [*Sugestão:* Faça o gráfico de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ e $y = \cos x + 0{,}1$ na mesma tela.]

3. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P nas proximidades de um número a, é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encontre a aproximação quadrática $f(x) = \sqrt{x + 3}$ nas proximidades de $a = 1$. Faça os gráficos de f, da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 3 da Seção 3.11 na mesma tela. O que você conclui?

5. Em vez de ficar satisfeito com as aproximações lineares ou quadráticas a $f(x)$ nas proximidades de $x = a$, vamos tentar encontrar as aproximações melhores com polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n e suas n primeiras derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ como f e suas n primeiras derivadas. Diferenciando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$, e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é chamado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.**

6. Encontre o polinômio de Taylor de oitavo grau centrado em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 na janela de inspeção $[-5, 5]$ por $[-1{,}4, 1{,}4]$ e comente a qualidade da aproximação de f.

3 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Estabeleça as seguintes regras da diferenciação em símbolos e palavras.
(a) A Regra da Potência
(b) A Regra do Múltiplo Constante
(c) A Regra da Soma
(d) A Regra da Diferença
(e) A Regra do Produto
(f) A Regra do Quociente
(g) A Regra da Cadeia

2. Estabeleça a derivada de cada função.

(a) $y = x^n$	(b) $y = e^x$	(c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$	(e) $y = \log_a x$	(f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$	(h) $y = \operatorname{tg} x$	(i) $y = \operatorname{cossec} x$
(j) $y = \sec x$	(k) $y = \operatorname{cotg} x$	(l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
(m) $y = \cos^{-1} x$	(n) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$	(o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$	(q) $y = \operatorname{tgh} x$	(r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
(s) $y = \cosh^{-1} x$	(t) $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$	

3. (a) Como é definido o número e?
(b) Expresse e como limite.
(c) Por que a função exponencial natural $y = e^x$ é usada mais freqüentemente em cálculo do que as outras funções exponenciais $y = a^x$?
(d) Por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais freqüentemente em cálculo do que as demais funções logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique como funciona a diferenciação implícita.
(b) Explique como funciona a diferenciação logarítmica.

5. O que são a segunda e a terceira derivadas da função f? Se f é uma função posição de um objeto, como você interpreta f'' e f'''?

6. (a) Escreva uma expressão para a linearização de f em a.
(b) Se $y = f(x)$, escreva uma expressão para diferenciar dy.
(c) Se $dx = \Delta x$, faça uma figura que mostre os significados de dy e de Δy.

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Se for falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo da afirmativa.

1. Se f e g forem diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se f e g forem diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Se f e g forem diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Se f for diferenciável, então $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Se f for diferenciável, então $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Se $y = e^2$, então $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Se $g(x) = x^5$, então $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

13. Uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ em $(-2, 4)$ é $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EXERCÍCIOS

1–48 □ Calcule y'.

1. $y = \left(x^4 - 3x^2 + 5\right)^3$

2. $y = \cos(\operatorname{tg} x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

8. $y = e^{-t}\left(t^2 - 2t + 2\right)$

9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$

10. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(e^x\right)$

11. $y = xe^{-1/x}$

12. $y = x^r e^{sx}$

13. $y = \operatorname{tg}\sqrt{1 - x}$

14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(x - \operatorname{sen} x\right)}$

15. $x^2 y = x + 3y$

16. $y = \ln(\operatorname{cossec} 5x)$

17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \operatorname{tg} 2\theta}$

18. $x^2 \cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$

19. $y = e^{cx}(c \operatorname{sen} x - \cos x)$

20. $y = \ln\left(x^2 e^x\right)$

21. $y = e^{e^x}$

22. $y = \sec\left(1 + x^2\right)$

23. $y = \left(1 - x^{-1}\right)^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \operatorname{tg}^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos\left(e^x\right)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \operatorname{tg} 5x|$

34. $y = 10^{\operatorname{tg} \pi\theta}$

35. $y = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln\left(t^4\right)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)$

39. $y = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}\left(x^2\right)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

49. Se $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, ache $f''(2)$.

50. Se $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $g''(\pi/6)$.

51. Encontre y'' se $x^6 + y^6 = 1$.

52. Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = 1/(2 - x)$.

53. Use a indução matemática para mostrar que se $f(x) = xe^x$, então $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

54. Calcule $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\operatorname{tg}^3(2t)}$.

55–59 □ Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado.

55. $y = 4\operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$

56. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(0, -1)$

57. $y = \sqrt{1 + 4\operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

58. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$

59. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

60. Se $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, encontre $f'(x)$. Faça o gráfico de f e f' na mesma tela e comente.

61. (a) Se $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encontre $f'(x)$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = x\sqrt{5 - x}$ nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 4)$.
(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes.
(d) Verifique se a resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

62. (a) Se $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encontre f' e f''.
(b) Verifique se as respostas da parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

63. Em quais pontos da curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

64. Encontre os pontos sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ onde a reta tangente tem inclinação 1.

65. Se $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, mostre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

66. (a) Diferenciando a fórmula do ângulo duplo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

obtenha a fórmula do ângulo duplo para a função seno.

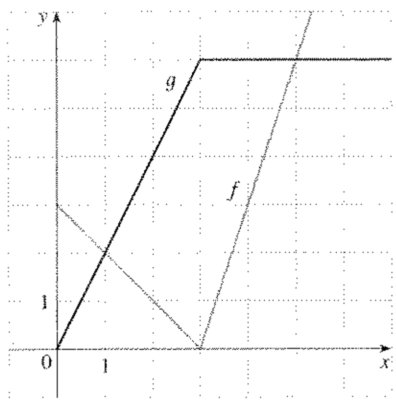
(b) Diferenciando a fórmula de adição

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenha a fórmula de adição para a função cosseno.

67. Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ e $F(x) = f(g(x))$, onde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $f'(5) = 11$. Encontre (a) $h'(2)$ e (b) $F'(2)$.

68. Se f e g forem as funções cujo gráfico está a seguir, seja $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ e $C(x) = f(g(x))$. Encontre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ e (c) $C'(2)$.



69–76 □ Encontre f' em termos de g'.

69. $f(x) = x^2 g(x)$

70. $f(x) = g(x^2)$

71. $f(x) = [g(x)]^2$

72. $f(x) = g(g(x))$

73. $f(x) = g(e^x)$

74. $f(x) = e^{g(x)}$

75. $f(x) = \ln|g(x)|$

76. $f(x) = g(\ln x)$

77–79 □ Encontre h' em termos de f' e g'.

77. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

78. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

79. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

80. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ na janela de inspeção $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) Em qual intervalo a taxa média de variação é maior: $[1, 2]$ ou $[2, 3]$?
(c) Em qual valor de x a taxa instantânea de variação é maior: $x = 2$ ou $x = 5$?
(d) Verifique sua estimativa visual na parte (c) computando $f'(x)$ e comparando os valores numéricos de $f'(2)$ e $f'(5)$.

81. Em qual ponto sobre a curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ a reta tangente é horizontal?

82. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x$ que seja paralela à reta $x - 4y = 1$.
(b) Encontre uma equação da tangente à curva $y = e^x$ que passe pela origem.

83. Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

84. A função $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sangüínea no instante t.
(a) Mostre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
(b) Encontre $C'(t)$, a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
(c) Quando essa taxa é igual a zero?

85. Uma equação de movimento da forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

86. Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal de forma que sua coordenada no instante t seja $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geq 0$, onde b e c são constantes positivas.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Mostre que a partícula se move sempre no sentido positivo.

87. Uma partícula se move sobre uma reta vertical de forma que sua coordenada no instante t seja $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Quando a partícula se move para cima? E para baixo?
(c) Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.

88. O volume de um cone circular reto é $V = \pi r^2 h/3$, onde r é o raio da base e h é a altura.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio for mantido constante.
(b) Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura for mantida constante.

89. A massa da parte de um fio é $x(1 + \sqrt{x})$ kg, onde x é medido em metros a partir de uma extremidade do fio. Encontre a densidade linear do fio quando $x = 4$ m.

90. O custo, em dólares, da produção de x unidades de um certo utensílio é

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3$$

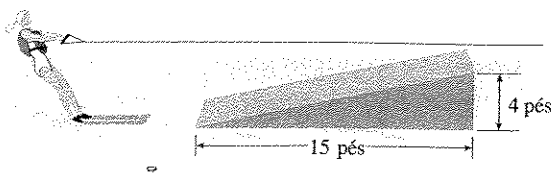
(a) Encontre a função custo marginal.
(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu significado.
(c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101º item.

91. O volume de um cubo cresce a uma taxa de 10 cm³/min. Com que rapidez está crescendo a área superficial quando o comprimento de uma aresta é 30 cm?

92. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm³/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade?

93. Um balão sobe a uma velocidade constante de 5 pés/s. E um rapaz anda de bicicleta ao longo de uma estrada reta a uma velocidade de 15 pés/s. Ao passar sobre o ciclista o balão está 45 pés acima dele. Com que velocidade cresce a distância entre o balão e o rapaz 3 segundos mais tarde?

94. Uma esquiadora aquática sobe a rampa mostrada na figura a uma velocidade de 30 pés/s. Com que velocidade ela está subindo quando deixa a rampa?



95. O ângulo de elevação do Sol está decrescendo a uma taxa de 0,25 rad/h. Com que velocidade está crescendo a sombra de um prédio de 400 pés de altura quando o ângulo de elevação do Sol é $\pi/6$?

96. (a) Encontre a aproximação linear para $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ nas proximidades de 3.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de f e da aproximação linear.
(c) Para quais valores de x a aproximação linear é precisa dentro de 0,1?

97. (a) Encontre a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ em $a = 0$. Estabeleça a aproximação linear correspondente e use-a para dar um valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}03}$.
(b) Determine os valores de x para os quais a aproximação linear dada na parte (a) é precisa dentro de 0,1.

98. Calcule dy se $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ e $dx = 0{,}2$.

99. Uma janela tem um formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela mede 60 cm com um erro possível na medida de 0,1 cm. Use as diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo da área da janela.

100–102 □ Expresse o limite como uma derivada e calcule-o.

100. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

101. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

102. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos\theta - 0{,}5}{\theta - \pi/3}$

103. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

104. Suponha que f seja uma função diferenciável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Mostre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

105. Encontre $f'(x)$ sabendo-se que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

106. Mostre que o comprimento da parte de qualquer reta tangente à astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada fora pelos eixos coordenados é constante.

Problemas Quentes

Antes de você olhar todo o exercício, cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho.

Exemplo 1 Quantas retas são tangentes às parábolas $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$? Encontre as coordenadas dos pontos nos quais essas tangentes tocam as parábolas.

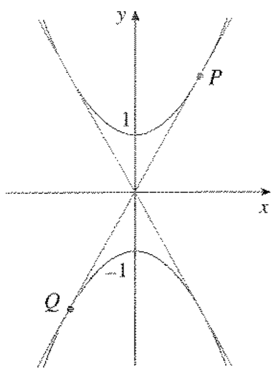


FIGURA 1

Solução É essencial fazer o diagrama para este problema. Assim, esboçamos as parábolas $y = 1 + x^2$ (que é a parábola-padrão $y = x^2$ deslocada uma unidade para cima) e $y = -1 - x^2$ (obtida refletindo-se a primeira parábola em torno do eixo x). Se tentarmos traçar uma reta tangente às parábolas, logo descobriremos que existem somente duas possibilidades, conforme ilustrado na Figura 1.

Seja P um ponto no qual uma dessas tangentes toca a parábola de cima e seja a sua coordenada x. (A escolha de notação para a incógnita é importante. Naturalmente, poderíamos ter usado b, c, x_0 ou x_1 em vez de a. Contudo, não é recomendável usar x no lugar de a, pois ele poderia ser confundido com a variável x na equação da parábola.) Então, uma vez que P está sobre a parábola $y = 1 + x^2$, sua coordenada y deve ser $1 + a^2$. Em virtude da simetria mostrada na Figura 1, as coordenadas do ponto Q onde a tangente toca a parábola de baixo devem ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar a informação dada de que a reta é uma tangente, equacionamos a inclinação da reta PQ como a inclinação da reta tangente em P. Temos que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Se $f(x) = 1 + x^2$, então a inclinação da reta tangente em P é $f'(a) = 2a$. Dessa forma, a condição de que precisamos usar é

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Resolvendo essa equação, obtemos $1 + a^2 = 2a^2$, logo $a^2 = 1$ e $a = \pm 1$. Portanto, os pontos são $(1, 2)$ e $(-1, -2)$. Por simetria, os pontos remanescentes são $(-1, 2)$ e $(1, -2)$. □

Exemplo 2 Para quais valores de c a equação $\ln x = cx^2$ tem exatamente uma solução?

Solução Um dos princípios mais importantes do problema é fazer um diagrama mesmo que o problema dado não mencione explicitamente uma situação geométrica. O presente problema pode ser reformulado geometricamente da seguinte forma: para quais valores de c a curva $y = \ln x$ intercepta a curva $y = cx^2$ em exatamente um ponto?

Vamos começar fazendo os gráficos de $y = \ln x$ e $y = cx^2$ para os diversos valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ é uma parábola que se abre para cima se $c > 0$ e para baixo se $c < 0$. A Figura 2 mostra as parábolas $y = cx^2$ para vários valores positivos de c. A maior parte deles não intercepta $y = \ln x$, e um intercepta duas vezes. Temos a intuição de que deve existir um valor de c (em algum lugar entre 0,1 e 0,3) para o qual a curva intercepta exatamente uma vez, como na Figura 3.

12. Calcule $\lim_{x \to \pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

13. Sejam T e N as retas tangente e normal para a elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ no ponto qualquer P sobre a elipse no primeiro quadrante. Sejam x_T e y_T os interceptos x e y de T e x_N e y_N os interceptos de N. À medida que P se move ao longo da elipse no primeiro quadrante (mas não sobre os eixos), que valores podem assumir x_T, y_T, x_N e y_N? Tente primeiro conjecturar a resposta somente olhando na figura. Então use o cálculo para resolver o problema e veja quão boa está sua intuição.

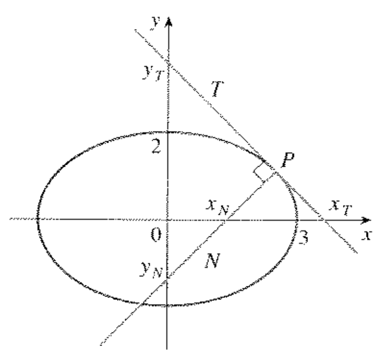


FIGURA PARA O PROBLEMA 13

14. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

15. (a) Use a identidade para $\operatorname{tg}(x - y)$ (veja a Equação 14b do Apêndice D) para mostrar que se duas retas L_1 e L_2 intersectam em um ângulo α, então

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

onde m_1 e m_2 são as inclinações de L_1 e L_2, respectivamente.

(b) O **ângulo entre as curvas** C_1 e C_2 em um ponto de interseção P é definido como o ângulo entre as retas tangentes a C_1 e C_2 em P (se existirem). Use a parte (a) para encontrar, corretos até o grau mais próximo, o ângulo entre cada par de curvas em cada ponto de interseção.

(i) $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ e $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

16. Seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre a parábola $y^2 = 4px$ com foco $F(p, 0)$. Seja α o ângulo entre a parábola e o segmento de reta FP e seja β o ângulo entre a reta horizontal $y = y_1$ e a parábola, como na figura. Prove que $\alpha = \beta$. (Assim, por um princípio da ótica geométrica, a luz de uma fonte localizada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x. Isso explica por que os *parabolóides*, superfícies obtidas por rotações de parábolas sobre seus eixos, são usados como forma de alguns faróis de automóveis e espelhos para os telescópios.)

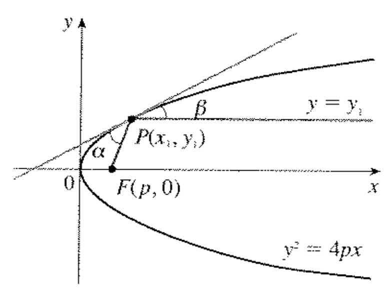


FIGURA PARA O PROBLEMA 16

17. Suponhamos que o espelho parabólico do Problema 16 tenha sido substituído por um esférico. Embora o espelho não tenha foco, podemos mostrar a existência de um foco *aproximado*. Na figura, C é um semicírculo com centro O. O raio de luz vindo na direção do espelho paralelo ao eixo ao longo da reta PQ será refletido para o ponto R sobre o eixo, tal que $\angle PQO = \angle OQR$ (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). O que acontecerá ao ponto R se P for tomado cada vez mais próximo do eixo?

18. Se f e g forem funções diferenciáveis com $f(0) = g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

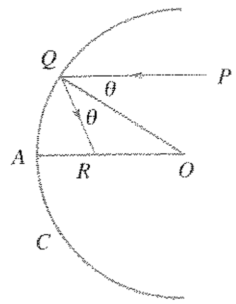


FIGURA PARA O PROBLEMA 17

19. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

20. (a) A função cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tem três raízes distintas: 0,2 e 6. Faça o gráfico da j e as suas retas tangentes nos pontos *médios* de cada par de zeros. O que você nota?

(b) Suponha que a função cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tenha três zeros distintos: a, b e c. Prove, usando um sistema algébrico computacional, que a reta tangente ao gráfico da f correspondente ao ponto médio dos dois zeros a e b intercepta o gráfico da f no terceiro zero

21. Para quais valores de k a equação $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tem exatamente uma solução?

22. Para quais números positivos a é verdadeiro que $a^x \geqslant 1 + x$ para todo x?

23. Se

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

mostre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

24. Dada uma elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, onde $a \neq b$, encontre a equação do conjunto de todos c pontos para os quais existem duas tangentes à curva cujas inclinações são (a) recíprocas e (b recíprocas negativas.

25. Encontre os dois pontos sobre a curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que têm uma reta tangente em comun

26. Suponha que três pontos sobre a parábola $y = x^2$ têm a seguinte propriedade: suas retas normai intersectam em um ponto em comum. Mostre que a soma de suas coordenadas x é 0.

27. Um *ponto de lattice* no plano é um ponto com coordenadas inteiras. Suponha que os círculos com raio r são feitos usando-se todos os pontos de lattice como centros. Encontre o menor valor de r para o qual toda reta com inclinação $\frac{2}{5}$ intercepta alguns desses círculos.

28. Um cone de raio r centímetros e altura h centímetros é submergido a uma taxa de 1 cm/s pa dentro de um cilindro maior, com raio R cm, parcialmente cheio de água. Com que velocida está se elevando o nível de água no instante em que o cone fica completamente submerso?

29. Um recipiente com a forma de um cone invertido tem 16 cm de altura e 5 cm de raio no top Ele está parcialmente cheio com um líquido que vaza pelos lados a uma taxa proporcional à área do recipiente que está em contato com o líquido. (A área superficial de um cone πrl, on r é o raio e l é o comprimento lateral.) Se estivermos derramando o líquido para dentro do recipiente a uma taxa de 2 cm³/min, então a altura do líquido decrescerá a uma taxa de 0,3 cm/min quando a altura for 10 cm. Se nossa finalidade for manter constante a altura do líquido em 10 cm, a que taxa deveremos derramar o líquido para dentro do recipiente?

4

Aplicações da Diferenciação

Os cientistas têm tentado explicar como os arco-íris são formados desde os tempos de Aristóteles. No projeto da página 288, você será capaz, usando os princípios do cálculo diferencial, de explicar a formação, localização e as cores do arco-íris.

Já pesquisamos algumas das aplicações da derivada; agora, porém, com o auxílio das regras de diferenciação, estamos em posição de estudar as aplicações de diferenciação com maior profundidade. Aprendemos como as derivadas afetam o formato do gráfico de uma função e, em particular, como nos ajudam a localizar os valores máximos e mínimos de funções. Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação. Em particular, seremos capazes de pesquisar a forma ótima de uma lata e explicar a localização de um arco-íris no céu.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. A seguir listamos alguns dos problemas de otimização que resolveremos neste capítulo:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm que suportar os efeitos da aceleração.)
- Qual o raio de uma traquéia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sangüíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

Esses problemas podem ser reduzidos ao encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

> **1 Definição** Uma função f tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D, e o número $f(c)$ é denominado **valor mínimo** de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.

A Figura 1 mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto do gráfico, enquanto $(a, f(a))$ é o ponto mais baixo.

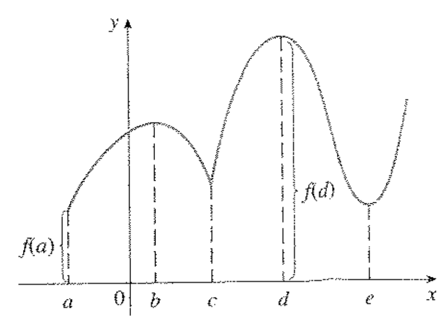


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

Na Figura 1, se considerarmos somente os valores de x próximos de b [por exemplo, s restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior desses valores de $f(x$

e é chamado *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é denominado *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leqslant f(x)$ para x nas proximidades de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f tem também um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

2 Definição Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. [Isso significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, f tem um **mínimo local** em c se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x estiver próximo de c.

EXEMPLO 1 □ A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) de 1 um número infinito de vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Da mesma forma, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer inteiro.

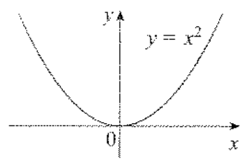


FIGURA 2
Valor mínimo 0, nenhum máximo

EXEMPLO 2 □ Se $f(x) = x^2$, então $f(x) \geqslant f(0)$, pois $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola $y = x^2$ (veja a Figura 2). Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.

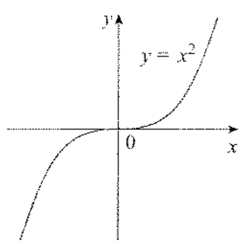


FIGURA 3
Nenhum mínimo, nenhum máximo

EXEMPLO 3 □ Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na Figura 3, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela não tem nenhum valor extremo local.

EXEMPLO 4 □ O gráfico da função

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

está mostrado na Figura 4. Você pode ver que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$. [Esse máximo absoluto não é um máximo local, pois ocorre em um extremo do intervalo.] Também, $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local como um mínimo absoluto. Note que em $x = 4$, f não tem um máximo local nem um máximo absoluto.

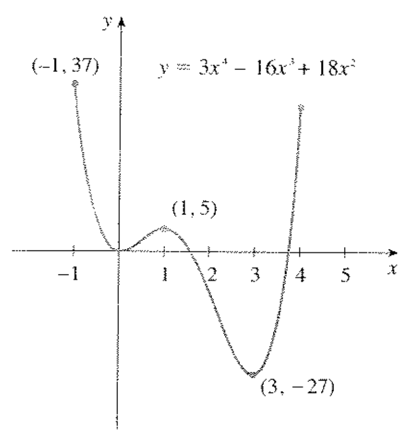


FIGURA 4

Vimos que algumas funções têm valores extremos, ao contrário de outras. O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

3 O Teorema do Valor Extremo Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 5. Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez. Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser provado e, assim, omitimos sua demonstração.

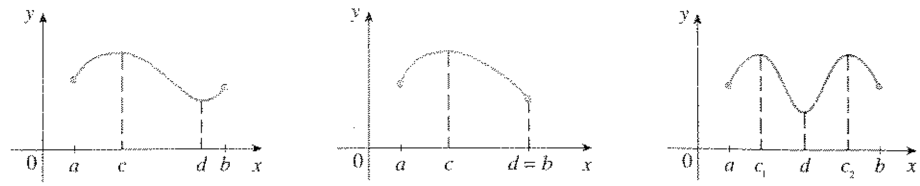


FIGURA 5

As Figuras 6 e 7 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida alguma das hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

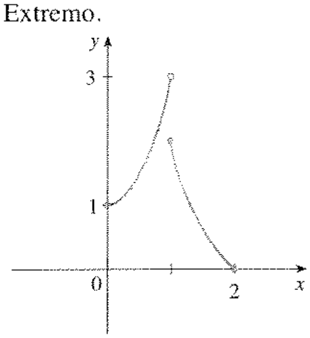


FIGURA 6

Esta função tem um valor mínimo $f(2) = 0$, mas não tem valor máximo

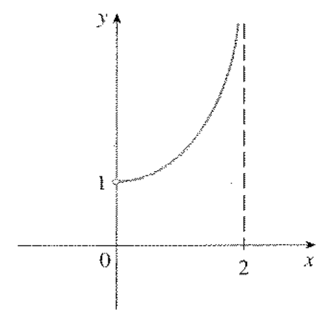


FIGURA 7

Esta função contínua g não tem nem máximo nem mínimo

A função f, cujo gráfico está mostrado na Figura 6, está definida no intervalo fechado $[0, 2]$, mas não tem valor máximo. [Observe que a imagem de f é $[0, 3.)$ A função assume valores arbitrariamente próximos de 3, porém nunca realmente o valor 3.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois f não é contínua. [Não obstante, uma função descontínua *pode* ter valores máximo e mínimo. Veja o Exercício 13(b).]

A função g da Figura 7 é contínua no intervalo aberto $(0, 2)$, mas não tem nem valor máximo, nem mínimo. [A imagem de g é $(1, \infty)$. A função assume valores arbitrariamente grandes.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois o intervalo $(0, 2)$ não está fechado.

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar por examinar os valores extremos locais.

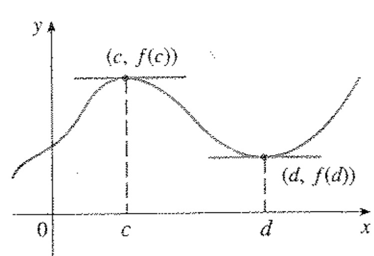


FIGURA 8

A Figura 8 mostra o gráfico de uma função f com o máximo local em c e o mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

⁚⁚ O Teorema de Fermat é assim designado em homenagem a Pierre Fermat (1601-1665), um advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Apesar de seu amadorismo, Fermat foi, junto com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Seus métodos para encontrar as tangentes, as curvas e os valores máximo e mínimo (antes da invenção de limites de derivadas) fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial.

4 Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Prova Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 2, $f(c) \geqslant f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0, h sendo positivo ou negativo, então

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

e, portanto,

$$f(c + h) - f(c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade (usando o Teorema 2.3.2), obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leqslant 0$.

Se $h < 0$, então inverte-se o sentido da desigualdade 5 quando dividimos por h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Logo, tomando o limite esquerdo, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Mostramos que $f'(c) \geqslant 0$ e também que $f'(c) \leqslant 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

Provamos o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser provado de forma análoga, ou pode ser deduzido do caso já provado usando o Exercício 76 (veja o Exercício 77).

Os exemplos a seguir aconselham prudência contra interpretar muito profundamente o Teorema de Fermat. Não podemos esperar localizar os valores extremos equacionando $f'(x) = 0$ e resolvendo para x.

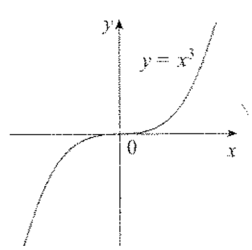


FIGURA 9

Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, mas f não tem mínimo nem máximo

EXEMPLO 5 ⁚⁚ Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 9. (Ou observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, mas $x^3 < 0$ para $x < 0$.) O fato de que $f'(0) = 0$ significa simplesmente que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em $(0, 0)$. Em vez de ter máximo ou mínimo em $(0, 0)$, a reta cruza sua tangente horizontal aí.

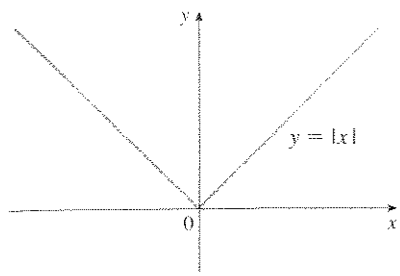


FIGURA 10

Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe

EXEMPLO 6 A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0; contudo, esse valor não pode ser encontrado equacionando-se $f'(x) = 0$, pois, conforme mostramos no Exemplo 6 da Seção 2.9, $f'(0)$ não existe (veja a Figura 10).

ADVERTÊNCIA Os Exemplos 5 e 6 mostram que devemos ser muito cuidadosos no uso do Teorema de Fermat. O Exemplo 5 demonstra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir o máximo ou o mínimo em c. (Em outras palavras, o inverso do Teorema de Fermat em geral é falso.) Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c) = 0$ não existir (como no Exemplo 6).

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 Definição Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

A Figura 11 mostra um gráfico da função f do Exemplo 7. Ele sustenta nossa resposta, pois há uma tangente horizontal quando $x = 1{,}5$ e uma tangente vertical quando $x = 0$.

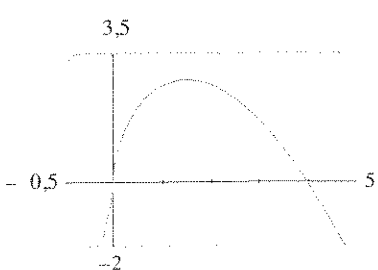


FIGURA 11

EXEMPLO 7 Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUÇÃO A Regra do Produto nos dá que

$$f'(x) = \tfrac{3}{5}x^{-2/5}(4-x) + x^{3/5}(-1) = \frac{3(4-x)}{5x^{2/5}} - x^{3/5}$$

$$= \frac{3(4-x) - 5x}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[O mesmo resultado poderia ter sido obtido escrevendo-se primeiro $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, isto é, $x = \frac{3}{2}$, e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0.

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir (compare a Definição 6 com o Teorema 4):

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Para encontrar um máximo ou um mínimo absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado, notamos que ou ele é local [nesse caso ocorre em um número crítico por (7)] ou acontece em um extremo do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 8 □ Encontre os valores absolutos máximo e mínimo da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

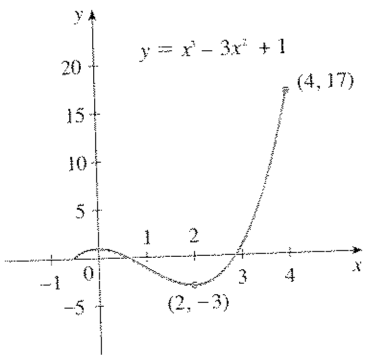


FIGURA 12

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nos extremos do intervalo são

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando-se esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Note que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em um extremo, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado na Figura 12.

Se você tiver uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico, poderá estimar facilmente os valores máximo e mínimo. Mas, como mostra o próximo exemplo, o cálculo é necessário para encontrar os valores *exatos*.

EXEMPLO 9 □
(a) Use um recurso gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(b) Utilize o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

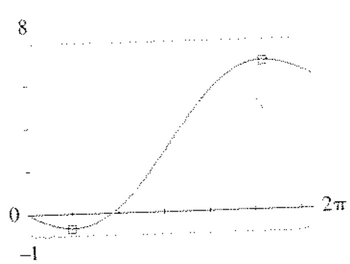


FIGURA 13

SOLUÇÃO
(a) A Figura 13 mostra um gráfico de f na janela de inspeção $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Movendo o cursor próximo ao ponto de máximo, vemos que a coordenada y não varia muito nas vizinhanças do máximo. O valor máximo absoluto é cerca de 6,97 e ocorre quando $x \approx 5{,}2$. Analogamente, movendo seu cursor para próximo do ponto de mínimo, vemos que o valor mínimo absoluto é cerca de $-0{,}68$ e ocorre quando $x \approx 1{,}0$. É possível obter mais precisão nas estimativas por meio de um *zoom* em direção aos pontos máximo e mínimo, mas, em vez disso, vamos usar o cálculo.

(b) A função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ é contínua em $[0, 2\pi]$. Uma vez que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, temos $f'(x) = 0$ quando $\cos x = \frac{1}{2}$ e isso ocorre quando $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Os valores de f nesses pontos críticos são

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}684853$$

e
$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}968039$$

Os valores de f nos extremos são

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6{,}28$$

Comparando-se esses quatros números e usando o Método do Intervalo Fechado, vemos que o valor mínimo absoluto é $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ enquanto o valor máximo absoluto é $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Os valores da parte (a) servem como uma verificação de nosso trabalho.

EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a entrada em funcionamento do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083$$

(em pés/s). Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a entrada do foguete auxiliar.

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas, em vez disso, da função aceleração. Assim, precisamos primeiro diferenciar para encontrar a aceleração:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083) \\ &= 0{,}003906t^2 - 0{,}18058t + 23{,}61 \end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0{,}007812t - 0{,}18058$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0{,}18058}{0{,}007812} \approx 23{,}12$$

Calculando-se o valor de $a(t)$ no número crítico e nos extremos, temos

$$a(0) = 23{,}61 \qquad a(t_1) \approx 21{,}52 \qquad a(126) \approx 62{,}87$$

Assim, a aceleração máxima é cerca de 62,87 pés/s², e a aceleração mínima, cerca de 21,52 pés/s².

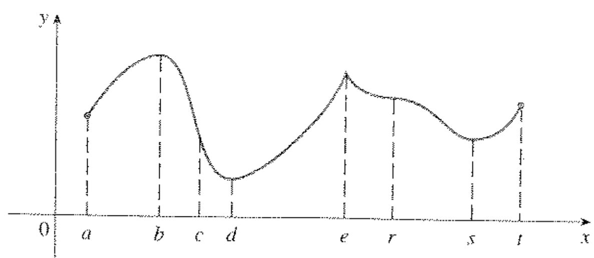
4.1 Exercícios

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

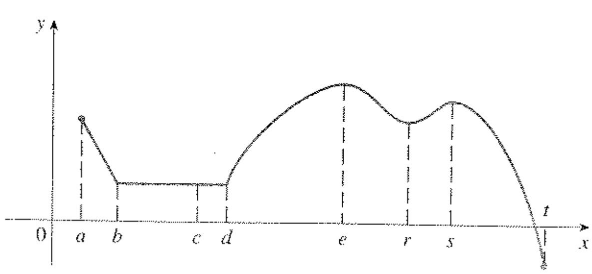
2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.
(a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?
(b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

3–4 □ Para cada um dos números a, b, c, d, e, r, s e t, estabeleça se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, um máximo ou mínimo local, ou nem máximo nem mínimo.

3.

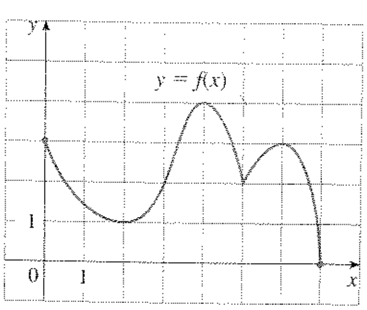


4.

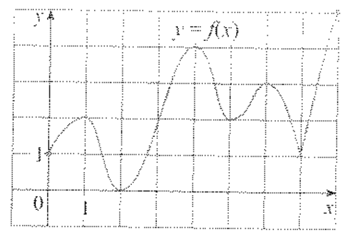


5–6 □ Use o gráfico para estabelecer os valores máximo e mínimo locais e absolutos da função.

5.



6.



7–10 □ Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e é diferenciável em 2.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e é contínua, mas não diferenciável em 2.
(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–30 □ Encontre os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f. Comece por esboçar à mão seu gráfico. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2$, $-3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x+1)^2$, $-2 \leqslant x < 5$

23. $f(t) = 1/t$, $0 < t < 1$

24. $f(t) = 1/t$, $0 < t \leqslant 1$

25. $f(\theta) = \text{sen}\,\theta$, $-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

26. $f(\theta) = \text{tg}\,\theta$, $-\pi/4 \leqslant \theta < \pi/2$

27. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

28. $f(x) = e^x$

29. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

31–46 Encontre os números críticos da função.

31. $f(x) = 5x^2 + 4x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

33. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

34. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

35. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

36. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 + z + 1}$

37. $g(x) = |2x + 3|$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

40. $g(x) = \sqrt{t}(1-t)$

41. $F(x) = x^{4/5}(x-4)^2$

42. $G(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \text{sen}^2\,\theta$

44. $g(\theta) = 4\theta - \text{tg}\,\theta$

45. $f(x) = x \ln x$

46. $f(x) = xe^{2x}$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, $[-1, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $[0, 3]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$, $[-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}$, $[-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t)$, $[0, 8]$

57. $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$, $[0, \pi/3]$

58. $f(x) = x - 2\cos x$, $[-\pi, \pi]$

59. $f(x) = xe^{-x}$, $[0, 2]$

60. $f(x) = (\ln x)/x$, $[1, 3]$

61. $f(x) = x - 3\ln x$, $[1, 4]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$, $[0, 1]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ com uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^3 - 8x + 1$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = (\cos x)/(2 + \text{sen}\,x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

69. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima

70. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a grandeza da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\text{tg}\,\theta = \mu$.

71. Um modelo para o índice de preço de alimentos (o preço de uma cesta básica) entre 1984 e 1994 é dado pela função

$$I(t) = 0{,}00009045t^5 + 0{,}001438t^4 - 0{,}06561t^3 + 0{,}4598t^2 - 0{,}6270t + 99{,}33$$

onde t é medido em anos desde a metade do ano de 1984; assim $0 \leqslant t \leqslant 10$, e $I(t)$ é medido em dólares em 1987 e reduzido em uma escala tal que $I(3) = 100$. Estime os período nos quais a comida foi mais barata e mais cara durante o período de 1984–1994.

72. Em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49.

A tabela a seguir fornece os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (pés/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	185
Fim da manobra de inclinação	15	319
Acelerando para 89%	20	447
Acelerando para 67%	32	742
Acelerando para 104%	59	1.325
Pressão dinâmica máxima	62	1.445
Separação do foguete auxiliar	125	4.151

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

73. Quando um objeto estranho se aloja na traquéia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traquéia, fazendo um canal para o ar expelido fluir por ele. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova através do tubo mais estreito com mais velocidade que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traquéia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante uma tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traquéia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

onde k é uma constante e r_0, o raio normal da traquéia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traquéia endurecem sob pressão, e uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ é evitada (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

74. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas g não tem um valor extremo local em 5.

75. Prove que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem nem máximo nem mínimo locais.

76. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

77. Prove o Teorema de Fermat para o caso no qual f tenha um mínimo local em c.

78. Uma função cúbica é um polinômio de grau três; isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ onde $a \neq 0$.

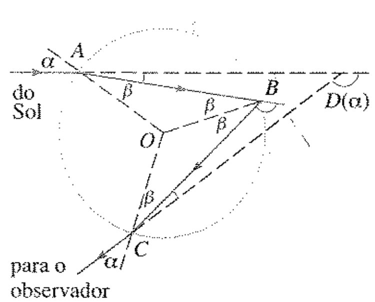
(a) Mostre que uma função cúbica pode ter 2, 1 ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e esboços para ilustrar essas três possibilidades.

(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

Projeto Aplicado

O Cálculo do Arco-íris

O arco-íris é o fenômeno que resulta da dispersão da luz do Sol em gotas de chuva suspensas na atmosfera. Ele vem fascinando a humanidade desde os tempos antigos e inspirou tentativas de explicação científica desde a época de Aristóteles. Neste projeto usaremos as idéias de Descartes e de Newton para explicar a forma, a localização e as cores dos arco-íris.



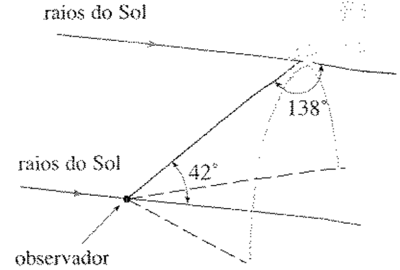
Formação do arco-íris principal

1. A figura mostra um raio de luz solar entrando em uma gota de chuva esférica em A. Parte da luz é refletida, mas a reta AB mostra a trajetória da parte que entra na gota. Observe que a luz é refratada em direção à reta normal a AO e de fato a Lei de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, onde α é o ângulo de incidência, β é o ângulo de refração e $k \approx \frac{4}{3}$, o índice de refração para a água. Em B uma parte da luz passa através da gota e é refratada para o ar, mas a reta BC mostra que parte é refletida. (O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.) Quando o raio atinge C, parte dele é refletido, mas por hora estamos mais interessados na parte que deixa a gota de chuva em C. (Note que ela é refratada a uma distância da reta normal.) O *ângulo de desvio* $D(\alpha)$ é o tamanho da rotação no sentido horário sofrida pelo raio que passa por esse processo de três etapas. Assim

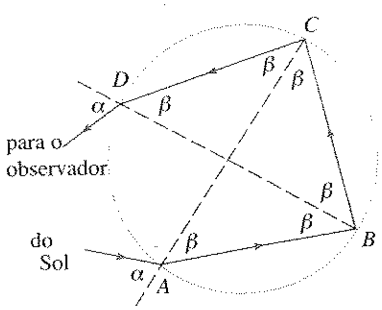
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Mostre que o valor mínimo do desvio é $D(\alpha) \approx 138°$ e ocorre quando $\alpha \approx 59{,}4°$.

A significância do desvio mínimo está em que quando $\alpha \approx 59{,}4°$ temos $D'(\alpha) \approx 0$, logo $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Isso significa que muitos raios com $\alpha \approx 59{,}4°$ são desviados aproximadamente pela mesma quantidade. Essa é a *concentração* de raios vindos das proximidades da direção de desvio mínimo que cria a luminosidade do arco-íris primário. A figura mostra que o ângulo de elevação a partir do observador até o ponto mais alto sobre o arco-íris é $180° - 138° = 42°$. (Esse ângulo é chamado *ângulo do arco-íris*.)



2. O problema explica a localização do arco-íris principal, mas como explicar as cores? A luz do Sol é formada por um espectro de comprimentos de onda, desde o vermelho através do laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Como Newton havia descoberto em seus experimentos com prismas em 1666, o índice de refração é diferente para cada cor. (O efeito é denominado *dispersão*.) Para a luz vermelha, o índice de refração é $k \approx 1{,}3318$, enquanto para a luz violeta é $k \approx 1{,}3435$. Repetindo os cálculos do Problema 1 para esses valores de k, mostre que o ângulo do arco-íris é cerca de $42{,}3°$ para o arco vermelho e $40{,}6°$ para o arco violeta. Assim, o arco-íris consiste realmente em sete arcos individuais correspondentes às sete cores.



Formação do arco-íris secundário

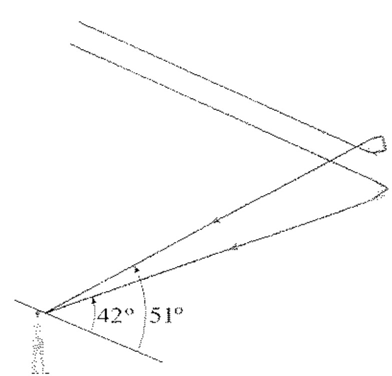
3. Talvez você tenha visto um arco-íris secundário mais fraco acima do primeiro. Esse segundo arco-íris resulta da parte de um raio que entra em uma gota de chuva e é refratado em A, refletido duas vezes (em B e C) e refratado quando deixa a gota em D (veja a figura). Dessa vez o ângulo de desvio $D(\alpha)$ é o tamanho total da rotação no sentido anti-horário que o raio sofre nesse processo de quatro etapas

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

e $D(\alpha)$ tem um valor mínimo quando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, mostre que o desvio mínimo é cerca de 129° e assim o ângulo do arco-íris para o secundário é cerca de 51°, conforme se vê na figura.



4. Mostre que as cores no arco-íris secundário aparecem na ordem inversa daquela do primário.

4.2 Teorema do Valor Médio

Veremos que muitos dos resultados deste capítulo dependem de um fato central, que é chamado Teorema do Valor Médio. Mas para chegar ao Teorema do Valor Médio precisamos primeiro do seguinte resultado.

□ O Teorema de Rolle foi publicado pela primeira vez em 1691 pelo matemático francês Michel Rolle (1652-1719) no livro intitulado *Méthode pour résoudre les égalitéz*. Mais tarde, porém, ele tornou-se porta-voz dos críticos dos métodos de sua época e atacou o cálculo como uma "coleção de falácias engenhosas".

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é diferenciável no intervalo aberto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar uma prova, vamos olhar nos gráficos de algumas funções típicas que satisfaçam as três hipóteses. A Figura 1 mostra os gráficos de quatro dessas funções. Em cada caso parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$. Assim, o Teorema de Rolle é plausível.

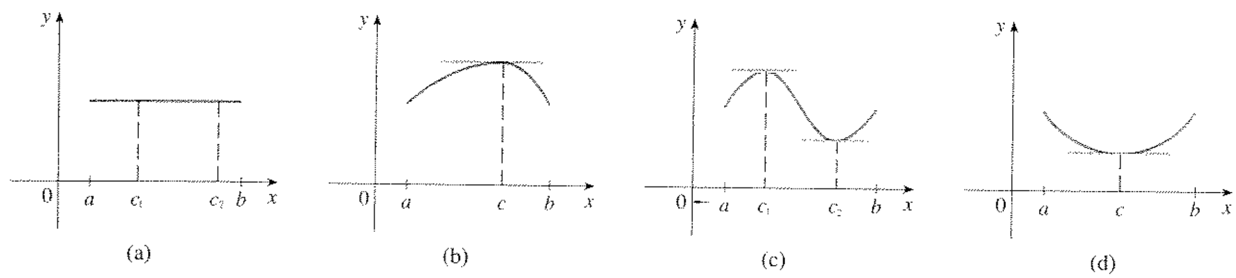


FIGURA 1

□ Veja os casos

Prova Existem três casos:

CASO I □ $f(x) = k$, uma constante
Então $f'(x) = 0$, assim, o número c pode ser tomado como qualquer número em (a, b).

CASO II □ $f(x) > f(a)$ para algum x em (a, b) [como na Figura 1(b) ou (c)]
Pelo Teorema do Valor Extremo (que podemos aplicar pela hipótese 1), f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Uma vez que $f(a) = f(b)$ ela deve assumir esse valor máximo em um número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um máximo *local* em c e, pela hipótese 2, f é diferenciável em c. Portanto, $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

CASO III □ $f(x) < f(a)$ para algum x em (a, b) [como na Figura 1(c) ou (d)]
Pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor mínimo em $[a, b]$ e como $f(a) = f(b)$, ela assume esse valor mínimo em um número c em (a, b). Novamente $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat. □

EXEMPLO 1 □ Vamos aplicar o Teorema de Rolle à função de posição $s = f(t)$ de um objeto em movimento. Se o objeto estiver no mesmo lugar em dois instantes diferentes $t = a$ e $t = b$, então $f(a) = f(b)$. O Teorema de Rolle afirma que existe algum instante do tempo $t = c$ entre a e b onde $f'(c) = 0$; isto é, a velocidade é 0. (Em particular, você pode ver que isto é verdadeiro quando uma bola é atirada diretamente para cima.) □

□ A Figura 2 mostra um gráfico da função $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida no Exemplo 2. O Teorema de Rolle mostra que, independentemente do tamanho da janela de inspeção, não podemos nunca encontrar um segundo intercepto x.

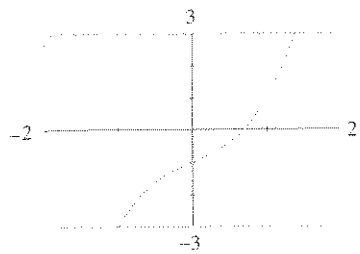


FIGURA 2

□ O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado teorema da existência. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema do Valor Extremo e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com uma certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.

EXEMPLO 2 □ Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

SOLUÇÃO Primeiro usamos o Teorema do Valor Intermediário (2.5.10) para mostrar que existe uma raiz. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$. Então $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Uma vez que f é um polinômio, ela é contínua; assim, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. A equação dada, portanto, tem uma raiz.

Para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o Teorema de Rolle e argumentamos por contradição. Suponhamos que ela tenha duas raízes a e b. Então $f(a) = 0 = f(b)$ e, uma vez que f é um polinômio, é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um número c entre a e b tal que $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para todo } x$$

(uma vez que $x^2 \geqslant 0$), portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero. Isso leva a uma contradição. Contudo a equação não pode ter duas raízes reais.

Nosso maior uso do Teorema de Rolle é na prova do seguinte importante teorema, o qual foi primeiro estabelecido por outro matemático francês, Joseph-Louis Lagrange.

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é diferenciável no intervalo aberto (a, b).

Então existe um número c em (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de provar esse teorema, podemos ver que ele é razoável interpretando-o geome tricamente. As Figuras 3 e 4 mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos d duas funções diferenciáveis. A inclinação da reta secante AB é

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

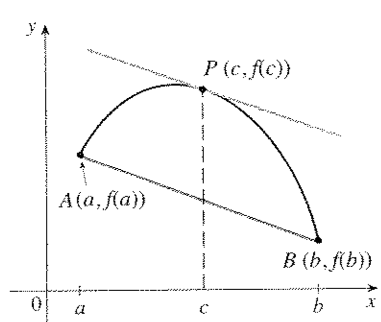


FIGURA 3

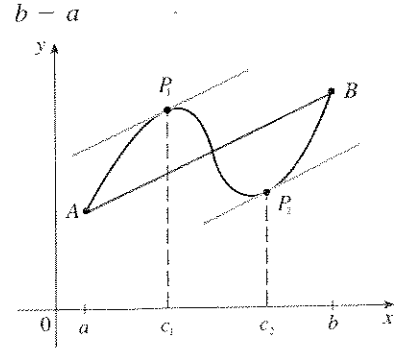


FIGURA 4

que é a mesma expressão mostrada no lado direito da Equação 1. Uma vez que $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio na forma dada pela Equação 1 diz que há no mínimo um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante AB. Em outras palavras, há um ponto P onde a reta tangente é paralela à reta secante AB.

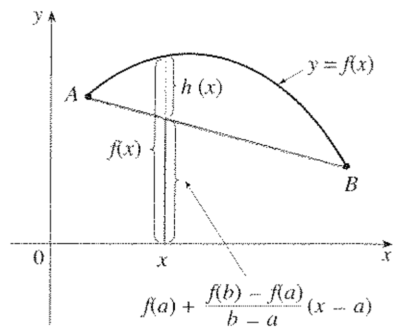


FIGURA 5

Prova Aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB. Usando a Equação 3 vemos que a equação da reta AB pode ser escrita como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Assim, conforme mostrado na Figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Precisamos verificar primeiro que h satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle.

1. A função h é contínua em $[a, b]$, pois é soma de f e um polinômio do primeiro grau, ambos contínuos.
2. A função h é diferenciável em (a, b), pois tanto f quanto o polinômio do primeiro grau são diferenciáveis. De fato, podemos calcular diretamente h' da Equação 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Note que $f(a)$ e $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ são constantes.)

3.
$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

□ O Teorema do Valor Médio foi formulado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nascido na Itália, de pai francês e mãe italiana. Criança prodígio, tornou-se professor em Turim aos 19 anos. Lagrange deu grandes contribuições à Teoria dos Números, Teoria das Funções, Teoria das Equações e mecânica analítica e celeste. Em particular, ele aplicou o cálculo na análise da estabilidade do sistema solar. A convite de Frederico, o Grande, ele sucedeu Euler na Academia de Berlim; depois da morte de Frederico, porém, Lagrange aceitou o convite do rei Luis XVI para viver em Paris, onde lhe foi dado um apartamento no Louvre. Homem bom e quieto, Lagrange vivia somente para a ciência.

Uma vez que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, esse teorema afirma que existe um número c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Portanto

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

logo

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

EXEMPLO 3 □ Para ilustrar o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez que f é um polinômio, então ela é contínua e diferenciável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

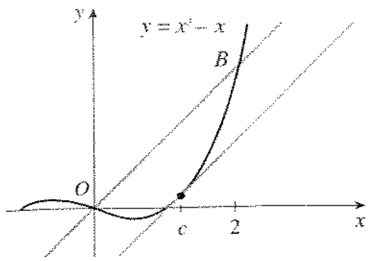


FIGURA 6

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Mas $f(2) = 6$, $f(0) = 0$, e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Porém c deve estar em $(0, 2)$; logo, $c = 2/\sqrt{3}$. A Figura 6 ilustra esse cálculo: a reta tangente nesse valor de c é paralela à reta secante OB.

EXEMPLO 4 Se um objeto move-se em uma linha reta com uma função de posição $s = f(t)$, então a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$ é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a velocidade em $t = c$ é $f'(c)$. Assim, o Teorema do Valor Médio (na forma da Equaçã 1) mostra que em algum instante em que $t = c$ entre a e b a velocidade instantânea $f'(c$ é igual à velocidade média. Por exemplo, se um carro trafegar a 180 km por duas horas então o velocímetro deve ter passado pela marca dos 90 km/h pelo menos uma vez

Em geral, o Teorema do Valor Médio pode ser interpretado como se existisse um númer no qual a taxa de troca instantânea seja igual à taxa de troca média ao longo de um intervalo

A grande importância do Teorema do Valor Médio reside no fato de ele nos possibilita obter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada. O próxim exemplo mostra esse princípio.

EXEMPLO 5 Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

SOLUÇÃO Nos foi dado que f é diferenciável (e, portanto, contínua) em toda a parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe então um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Nos foi dado que $f'(x) \leqslant 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leqslant 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

O Teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos d cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir. Os outros serão encontrados nas seçõe seguinte.

> **5 Teorema** Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

Prova Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em (a, b), sendo $x_1 < x_2$. Como f é diferenciável (a, b), ela deve ser diferenciável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$\boxed{6} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ para todo x, temos $f'(c) = 0$, e a Equação 6 fica

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Portanto, f tem o mesmo valor em *quaisquer* dois números x_1 e x_2 em (a, b). Isso significa que f é constante em (a, b).

7 Corolário Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, onde c é uma constante.

Prova Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo x em (a, b). Assim, pelo Teorema 5, F é constante; isto é, $f - g$ é constante.

NOTA □ É necessário cuidado ao aplicar o Teorema 5. Seja

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D = \{x \mid x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo x em D. Mas obviamente f não é uma função constante. Isso não contradiz o Teorema 5, pois D não é um intervalo. Observe que f é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.

EXEMPLO 6 □ Prove a identidade $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Embora não seja necessário o cálculo para provar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos os valores de x. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de C fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ precisamente). Então

$$C = f(1) = \operatorname{tg}^{-1} 1 + \operatorname{cotg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = \pi/2$.

4.2 Exercícios

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle sobre o intervalo dado. Então encontre todos os números c que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad [0, 2]$

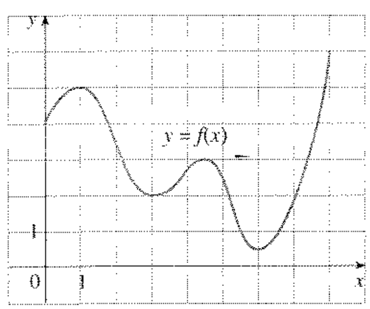
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2\pi x, \quad [-1, 1]$

4. $f(x) = x\sqrt{x+6}, \quad [-6, 0]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = (x - 1)^{-2}$. Mostre que $f(0) = f(2)$, mas não existe número c em $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela de inspeção $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela com f.
(c) Encontre o número c que satisfaça a conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e note que ela é paralela à reta secante.

10. (a) Na janela de inspeção $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e suas retas secantes que passam pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.
(b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 Verifique que a função satisfaça as hipóteses do Teorema do Valor Médio sobre o intervalo dado. Então encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

15. Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Mostre que não existe valor c ta que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5$ tem exatamente uma raiz real.

18. Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tem exatamente uma raiz real.

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
(b) Mostre que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja diferenciável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raíze Mostre que f' tem no mínimo uma raiz.
(b) Suponha que f seja duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tenh três raízes. Mostre que f'' tem no mínimo uma raiz real.
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno pod ser $f(4)$?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x$ para a $< x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$. [*Sugestão*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e diferenciável em toda a parte. Prove que para todo o número positivo b existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade

$$|\,\text{sen}\, a - \text{sen}\, b\,| \leqslant |\,a - b\,| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b$$

30. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Seja $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para provar a identidade

$$2\,\text{sen}^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Prove a identidade

$$\text{arcsen}\frac{x-1}{x+1} = 2\ \text{arctg}\,\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Às 2 horas da tarde o velocímetro de um carro mostrava 30 mi/h, e às 2h10 mostrava 50 mi/h. Mostre que em algum instante entre 2h e 2h10 a aceleração é exatamente 120 mi/h^2.

35. Dois corredores iniciaram uma corrida no mesmo instante e terminaram empatados. Prove que em algum instante durante a corrida eles têm a mesma velocidade. [*Sugestão*: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde g e h são funções posições dos dois corredores.]

36. Um número a é chamado **número fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Prove que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma do Gráfico

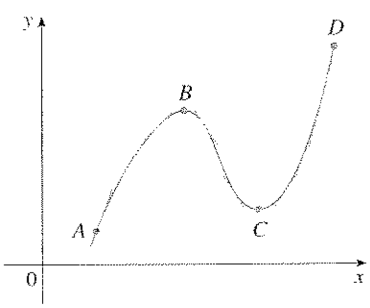


FIGURA 1

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações concernentes de suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa a direção segundo a qual a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que a informação sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

O Que f' Nos Diz sobre f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva, logo $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa, portanto $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para provar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente ou Teste C/D

(a) Se $f'(x) > 0$ sobre um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ sobre um intervalo, então f é decrescente nele.

Prova

(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente temos para mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como estamos dando que $f'(x) > 0$, sabemos que f é diferenciável em $[x_1, x_2]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da

Equação 1 é positivo, e

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Isso mostra que f é crescente.

A parte (b) é provada de maneira semelhante

EXEMPLO 1 Encontre o intervalo onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e o intervalo onde ela é decrescente.

SOLUÇÃO $$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

Para usar o Teste C/D devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, isto é, $12x$, $x - 2$ e $x + 1$. Dividimos a reta real em intervalos cujos extremos são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos o que fizemos em uma tabela. Um sinal de adição indica que a expressão dada é positiva, e um sinal de subtração indica que é negativa. A última coluna da tabela fornece a conclusão baseada no Teste C/D. Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, logo f é decrescente em $(0, 2)$. (É também verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado $[0, 2]$.)

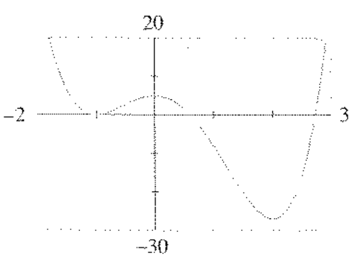


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	crescente em $(2, \infty)$

O gráfico de f mostrado na Figura 2 confirma a informação dada na tabela.

Da Seção 4.1, lembre-se de que se f tem um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f (pelo Teorema de Fermat), mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Conseqüentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.

Você pode ver a partir da Figura 2 que $f(0) = 5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1, 0)$ e decresce em $(0, 2)$. Ou, em termos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Derivada Primeira Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

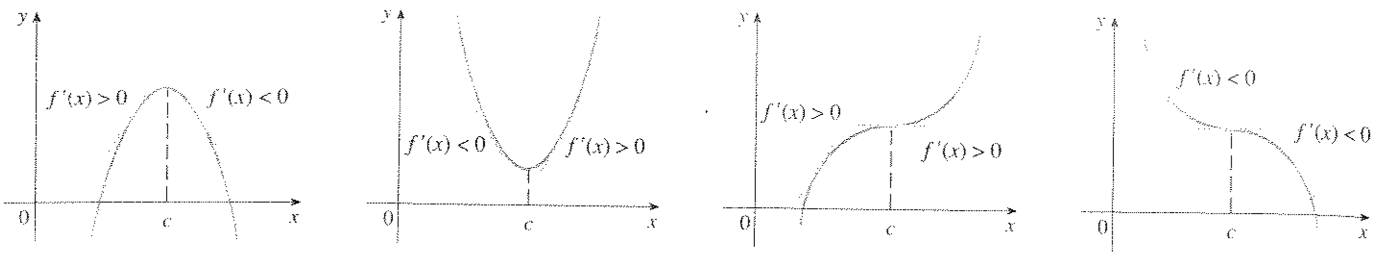
(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

O Teste da Derivada Primeira é uma conseqüência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita. Segue-se que f tem um máximo local em c.

É fácil lembrar-se o Teste da Primeira Derivada visualizando os diagramas, tais como os da Figura 3.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem máximo, nem mínimo

FIGURA 3

EXEMPLO 2 □ Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função f do Exemplo 1.

SOLUÇÃO Da tabela, na solução do Exemplo 1, vemos que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1, logo $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Derivada Primeira. Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2, portanto $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como notado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

EXEMPLO 3 □ Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Para achar os números críticos de g, diferenciamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Logo $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$. As soluções dessa equação são $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Como g é diferenciável em toda a parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$ e, portanto, analisaremos g na tabela a seguir.

□ O sinal + na tabela vem do fato que $g'(x) > 0$ quando $\cos x > -\frac{1}{2}$. No gráfico de $y = \cos x$, isto é verdade nos intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Derivada Primeira nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é de

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$ muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, logo

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local. O gráfico de g na Figura 4 confirma nossa conclusão.

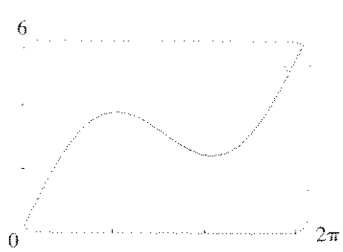
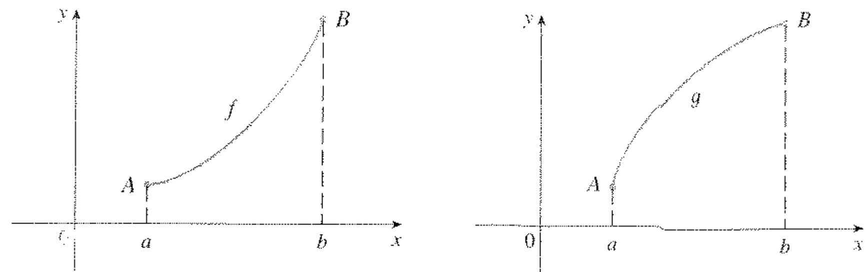


FIGURA 4
$y = x + 2 \operatorname{sen} x$

O Que f'' Nos Diz sobre f?

A Figura 5 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois inclinam-se em direções diferentes. Como distinguir entre esses dois tipos de comportamento? Na Figura 6 as tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a) a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b) a curva fica abaixo das tangentes e g é denominada *côncava para baixo* em (a, b).



(a) (b)

FIGURA 5

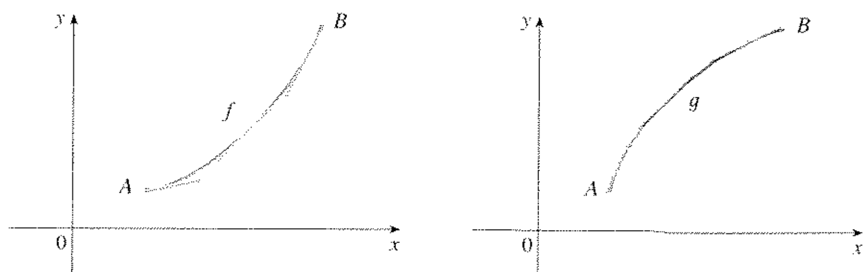


FIGURA 6

(a) Côncava para cima (b) Côncava para baixo

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, é dito **côncavo para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

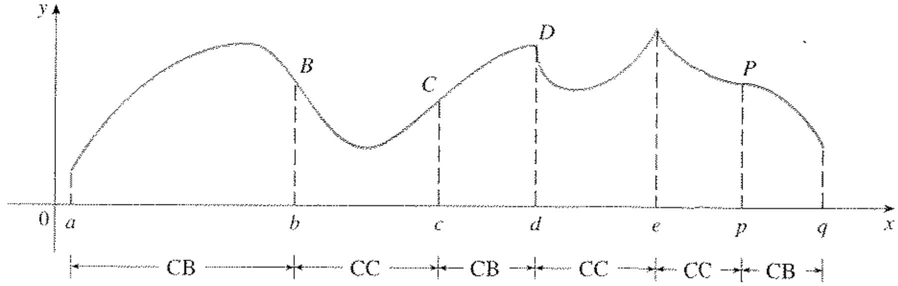


FIGURA 7

Vamos observar como a derivada segunda nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), você pode ver que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce.

Isso significa que a derivada de f' é uma função crescente e conseqüentemente sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo f' decresce e, portanto, f'' é negativa. Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro. Uma prova dele está dada no Apêndice F com o auxílio do Teorema do Valor Médio.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

EXEMPLO 4 □ A Figura 8 mostra um gráfico da população para as abelhas cipriotas criadas no apiário. Como cresce a taxa populacional? Quando essa taxa é mais alta? Sobre quais intervalos P é côncavo para cima ou côncavo para baixo?

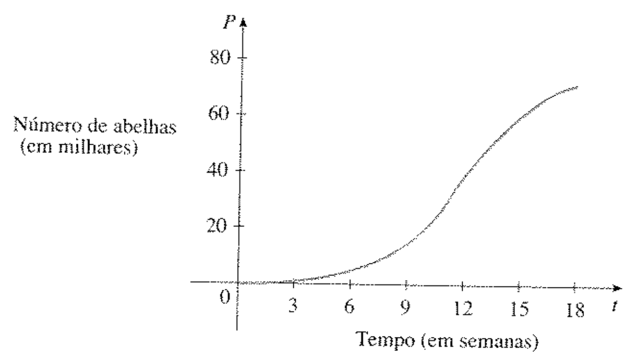


FIGURA 8

SOLUÇÃO Examinando a inclinação da curva quando t cresce, vemos que a taxa de crescimento populacional é inicialmente muito pequena, então torna-se maior até atingir o máximo em cerca de $t = 12$ semanas, e decresce até a população se estabilizar. À medida que a população tende a seu valor máximo de cerca de 75.000 (chamada *capacidade de manutenção*) a taxa de crescimento, $P'(t)$, tende a 0. A curva mostra ser côncava para cima em $(0, 12)$ e côncava para baixo em $(12, 18)$.

No Exemplo 4, a curva populacional varia de côncava para cima para côncava para baixo aproximadamente no ponto (12, 38.000), denominado *ponto de inflexão* da curva. A significância desse ponto é que a taxa de crescimento populacional tem seu valor máximo lá. Em geral, um ponto de inflexão é aquele em que uma curva muda a direção de sua concavidade.

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é conhecido como **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Por exemplo, na Figura 7, B, C, D e P são os pontos de inflexão. Note que se uma curva tiver uma tangente em um ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente aí.

Em vista do Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a derivada segunda mudar de sinal.

EXEMPLO 5 Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

(i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

SOLUÇÃO A condição (i) nos diz que f cresce em $(-\infty, 1)$ e decresce em $(1, \infty)$. A condição (ii) diz que f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-2, 2)$. Da condição (iii) sabemos que o gráfico de f tem duas assíntotas horizontais: $y = -2$ e $y = 0$.

Primeiro traçamos a assíntota horizontal $y = -2$ como uma linha tracejada (veja a Figura 9). Então fazemos o gráfico de f tendendo a essa assíntota no extremo esquerdo, crescente até seu máximo no ponto $x = 1$ e decrescente em direção ao eixo x no extremo direito. Também asseguramos que o gráfico tem pontos de inflexão quando $x = -2$ e 2. Observe que fizemos a curva encurvada para cima para $x < -2$ e $x > 2$, e para baixo quando x está entre -2 e 2. ◻

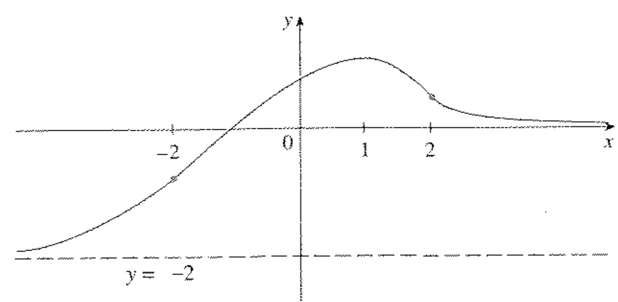


FIGURA 9

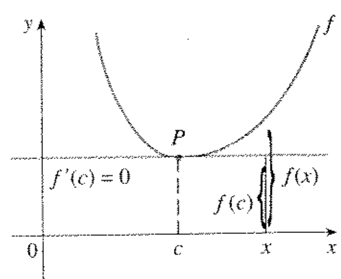


FIGURA 10

$f''(c) > 0$, côncava para cima

Outra aplicação da derivada segunda é o teste a seguir para os valores máximo e mínimo. É uma conseqüência do Teste da Concavidade.

> **Teste da Derivada Segunda** Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.
> (a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.
> (b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Por exemplo, a parte (a) é verdadeira, pois $f''(x) > 0$ nas proximidades de c, e f é côncava para cima próximo de c. Isso significa que o gráfico de f se situa *acima* de sua tangente horizontal em c e assim f tem um mínimo local em c (veja a Figura 10).

EXEMPLO 6 Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, pontos de inflexão e mínimo e máximo locais. Use essa informação para esboçar a curva.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para achar os números críticos fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o

Teste da Derivada Segunda, calculamos f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Derivada Segunda não fornece informações sobre o número crítico 0. Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Derivada Primeira nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. [De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Uma vez que $f''(x) = 0$, então $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremos e completamos a seguinte tabela.

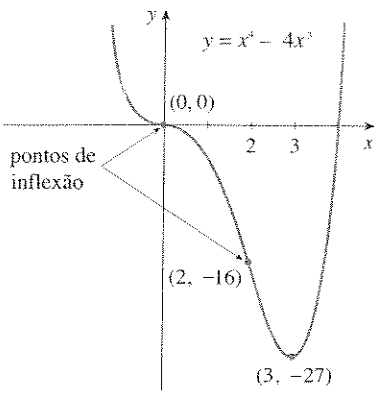


FIGURA 11

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	+	para cima
$(0, 2)$	−	para baixo
$(2, \infty)$	+	para cima

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também $(2, -16)$ é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima aí.

Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura 11.

NOTA □ O Teste da Derivada Segunda é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, nesse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum deles (como no Exemplo 6). Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da Derivada Primeira deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Derivada Primeira é freqüentemente mais fácil de ser usado.

EXEMPLO 7 □ Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

SOLUÇÃO Você pode usar as regras de diferenciação para checar que as duas primeiras derivadas são

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

□ Tente reproduzir o gráfico da Figura 12 com uma calculadora gráfica ou computador. Algumas máquinas fornecem o gráfico completo, e outras, apenas a parte à direita do eixo y, enquanto outras produzem somente a parte entre $x = 0$ e $x = 6$. Para mais explicações, veja o Exemplo 7 da Seção 1.4. Uma expressão equivalente que fornece o gráfico correto é

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6-x}{|6-x|}|6-x|^{1/3}$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decrescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	crescente em $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decrescente em $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decrescente em $(6, \infty)$

Para achar os valores de extremos locais usamos o Teste da Derivada Primeira. Uma vez que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local. Uma vez que o sinal de f' muda de positivo para negativo em 4, $f(4) = 2^{5/3}$ é um máximo local. O sinal de f' não muda em 6; logo, não há nem mínimo nem máximo aí. (O Teste de Derivada Segunda poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6, uma vez que f'' não existe aí.)

Examinando a expressão para $f''(x)$ e notando que $x^{4/3} \geqslant 0$ para todo x, temos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 6$ e $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Logo f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$ e côncava para cima em $(6, \infty)$, e o único ponto de inflexão é $(6, 0)$. O gráfico está esboçado na Figura 12. Note que a curva tem tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(6, 0)$, pois $|f'(x)| \to \infty$ quando $x \to 0$ e quando $x \to 6$.

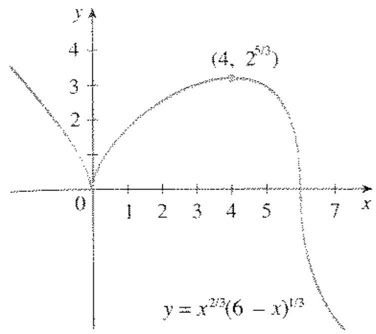


FIGURA 12

EXEMPLO 8 Use as derivadas primeira e segunda de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

SOLUÇÃO Note que o domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$; portanto, examinemos para as assíntotas verticais computando os limites esquerdo e direito quando $x \to 0$. Quando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

e isso mostra que $x = 0$ é uma assíntota vertical. Quando $x \to 0^-$, temos $t = 1/x \to -\infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Quando $x \to \pm\infty$, temos $1/x \to 0$ e, portanto,

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Isso mostra que $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Agora, vamos computar a derivada. A Regra da Cadeia dá

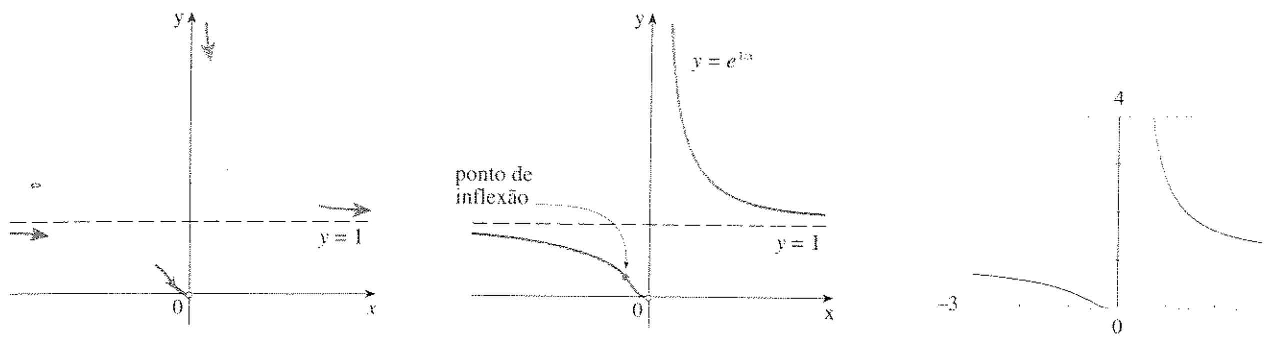
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, temos $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Assim, f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$. Não há número crítico; logo, a função não tem nem máximo nem mínimo. A derivada segunda é

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{2}$. Portanto a curva é côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e côncava para cima em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e em $(0, \infty)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esboçar o gráfico de f, primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (como uma linha tracejada), junto com as partes da curva próxima da assíntota em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação relativa a limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ como em $(0, \infty)$. Note que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$ mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação relativa à concavidade e ao ponto de inflexão. Na Figura 13(c) verificamos nosso trabalho com um recurso computacional.



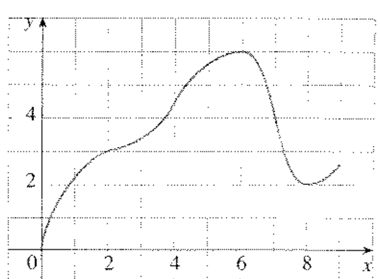
(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação computacional

FIGURA 13

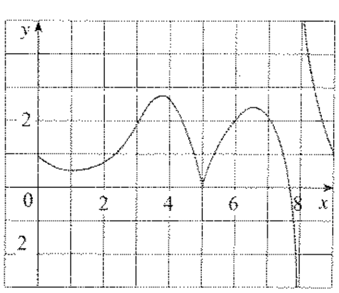
4.3 Exercícios

1–2 □ Use o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:
(a) O maior intervalo aberto no qual f é crescente.
(b) O maior intervalo aberto no qual f é decrescente.
(c) O maior intervalo aberto no qual f é côncava para cima.
(d) O maior intervalo aberto no qual f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.

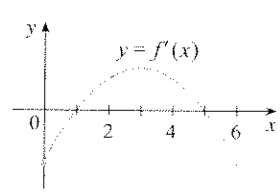


3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

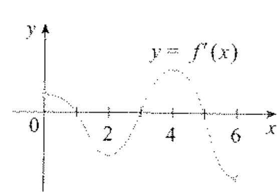
4. (a) Enuncie o Teste da Derivada Primeira.
(b) Enuncie o Teste da Derivada Segunda. Sobre que circunstância ele é inconclusivo? O que você fará se ele falhar?

5–6 □ O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

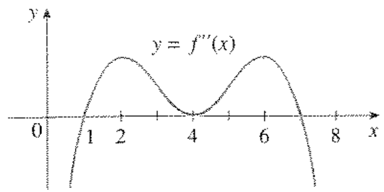
5.



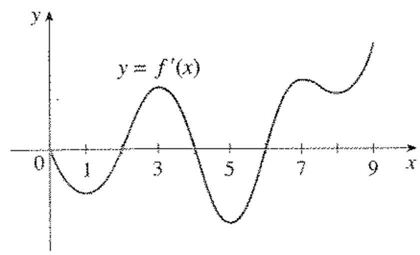
6.



7. O gráfico da derivada segunda f'' de uma função f está mostrado. Estabeleça as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.

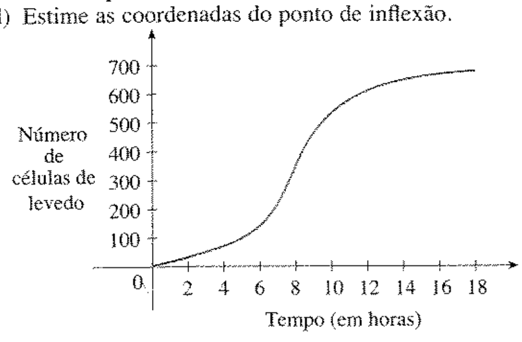


8. O gráfico da derivada primeira de f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos está f crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9. Esboce o gráfico de uma função com derivadas primeira e segunda sempre negativas.

10. É mostrado o gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório como uma função do tempo.
(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.
(b) Quando essa taxa é a maior?
(c) Em que intervalos a função populacional é côncava para cima ou para baixo?
(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.



11-20 □
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores de máximo e mínimo local de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

11. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

12. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

13. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

15. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

16. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $f(x) = xe^x$

18. $f(x) = x^2 e^x$

19. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

20. $f(x) = x \ln x$

21-23 □ Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Derivadas Primeira e Segunda. Qual método você prefere?

21. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

23. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

24. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Derivada Segunda mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Derivada Primeira?

25. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que se pode afirmar sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

26-30 □ Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.

26. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, assíntota vertical $x = 1$, $f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$, $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$

27. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

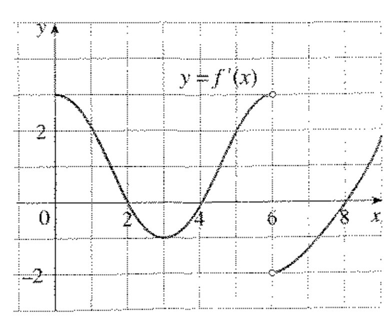
28. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e ponto de inflexão em $(0,1)$

29. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $|x| \neq 2$

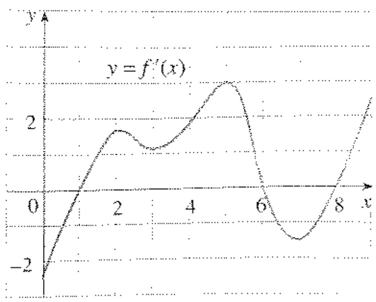
30. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x\ 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

31-32 □ O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrad
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?
(d) Estabeleça as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Assumindo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44

(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores de máximo ou mínimo locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com um recurso computacional se você tiver um.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = x^4 - 6x^2$ **36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$ **38.** $h(x) = (x^2 - 1)^3$

39. $A(x) = x\sqrt{x+3}$ **40.** $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x+4)$ **42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t$, $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52

(a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.
(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores de máximo e mínimo locais.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **50.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$ **52.** $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

53–54

(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então encontre o valor exato.

53. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **54.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

55–56

(a) Use um gráfico de f para estimar os intervalos da concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.
(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

55. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

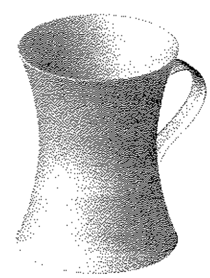
56. $f(x) = x^3(x-2)^4$

57–58 Estime os intervalos da concavidade para uma casa decimal usando um sistema algébrico computacional para computar e fazer o gráfico de f''.

57. $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ **58.** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3(x^2+5)}{(x^3+1)(x^2+4)}$

59. Seja $K(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. O que você acredita ser maior, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

60. O café está sendo despejado na caneca, mostrada na figura, a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual a significância do ponto de inflexão?



61. Para um período de 1980 a 2000, a porcentagem de famílias nos Estados Unidos com no mínimo um videocassete foi modelada pela função

$$V(t) = \frac{85}{1 + 53e^{-0.5t}}$$

onde o tempo t é medido em anos desde a metade do ano de 1980; então, $0 \leqslant t \leqslant 20$. Use um gráfico para estimar o tempo no qual o número de videocassetes estava crescendo mais rapidamente. Use então derivadas para dar uma estimativa mais precisa.

62. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante μ é denominada *média*, e a constante positiva σ é conhecida como *desvio padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.
(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?
(c) Ilustre fazendo o gráfico dos quatros membros dessa família sobre a mesma tela.

63. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em -2 e um valor mínimo local 0 em 1.

64. Para quais valores do número a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo $f(2) = 1$?

65. Suponha que f seja diferenciável em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todos os números x em I, exceto para um único número c. Prove que f é uma função crescente em todo o intervalo.

66–68 Presuma que todas as funções sejam duas vezes diferenciáveis e as derivadas segundas nunca se anulam.

66. (a) Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncava para cima em I.

(b) Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

67. (a) Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que a função produto fg é côncava para cima em I.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que f e g sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que f seja crescente e g, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que fg pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

68. Suponha que f e g são ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições de f será a função composta $h(x) = f(g(x))$ côncava para cima?

69. Mostre que $\operatorname{tg} x < x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

70. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para provar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

71. Mostre que a função cúbica (um polinômio de terceiro grau) tem sempre exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico possui três interceptos x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

72. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? Um ponto de inflexão? Nenhum? Ilustre fazendo o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico varia quando c decresce?

73. Prove que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existe em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o Teste da Derivada Primeira e o Teorema de Fermat para a função $g = f'$.]

74. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

75. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

76. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c?

4.4 Formas Indeterminadas e a Regra de L'Hôspital

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Embora F não esteja definida quando $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* de 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \tag{1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Lei nº 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em (1) exista, seu valor não é óbvio, porque tanto numerador como denominador tendem a 0, e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode ou não existir e é

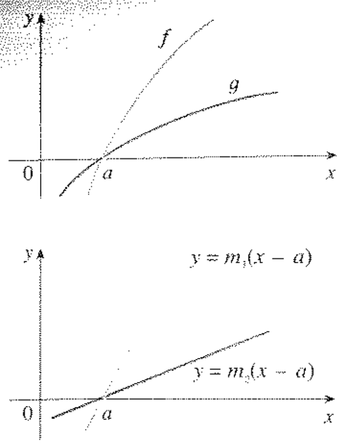


FIGURA 1

denominado **forma indeterminada do tipo** $\frac{0}{0}$. Podemos encontrar alguns limites desse tipo no Capítulo 2. Para as funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Mas esses métodos não funcionam para os limites tais como (1); logo, nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como a *Regra de L'Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de F e precisamos calcular o limite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto numerador como denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$. Há uma disputa entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta pode ser algum número positivo, finito.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde $f(x) \to \infty$ (ou $\pm\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo** ∞/∞. Vimos na Seção 2.6 que esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções, incluindo aquelas racionais, dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Esse método não funciona para o limite como (2), mas a Regra de L'Hôspital aplica-se também para esse tipo de forma indeterminada.

□ A Figura 1 sugere visualmente por que a Regra de L'Hôspital pode ser verdadeira. O primeiro gráfico mostra duas funções diferenciáveis f e g, que tendem a zero quando $x \to a$. Se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, 0)$, os gráficos começarão a parecer quase lineares. Mas se as funções forem realmente lineares como no segundo gráfico, então sua razão será

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que é a razão de suas derivadas. Isso sugere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regra de L'Hôspital Suponha que f e g sejam diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo a a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou é ∞ ou $-\infty$).

A Regra de L'Hôspital é assim chamada em homenagem ao nobre francês, o marquês de L'Hôspital (1661-1704), mas foi descoberta pelo matemático suíço John Bernoulli (1667-1748). Veja o Exercício 71 que mostra o exemplo o qual o marquês usou para ilustrar sua regra. Veja a página 315 para mais detalhes históricos.

NOTA 1 A Regra de L'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições com respeito aos limites f e g antes de usar a Regra de L'Hôspital.

NOTA 2 A Regra de L'Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, "$x \to a$" pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, ou $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas e $g'(a) \neq 0$ é fácil ver por que a Regra de L'Hôspital é verdadeira. De fato, usando-se a forma alternativa da definição de uma derivada, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

É mais difícil provar a versão geral da Regra de L'Hôspital. Veja o Apêndice F.

EXEMPLO 1 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

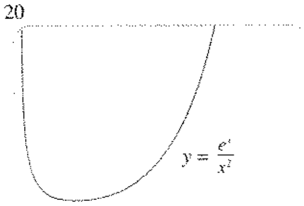


FIGURA 2

Lembre-se de que quando usamos a regra de L'Hôspital, derivamos o numerador e o denominador *separadamente*. Nós *não* usamos a Regra do Quociente.

O gráfico da função do Exemplo 2 está na Figura 2. Notamos anteriormente que a função exponencial cresce muito mais rapidamente do que a função potência; assim, o resultado do Exemplo 2 é esperado. Veja também o Exercício 67.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Temos $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite sobre o lado direito é indeterminad também, mas uma segunda aplicação da Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

EXEMPLO 3 □ Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ O gráfico da função do Exemplo 3 está na Figura 3. Já havíamos discutido anteriormente o lento crescimento dos logaritmos, então não é surpresa que essa razão tenda a zero quando $x \to \infty$. Veja também o Exercício 68.

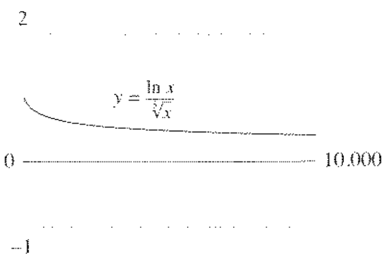


FIGURA 3

SOLUÇÃO Uma vez que $\ln x \to \infty$ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, a Regra de L'Hôspital pode ser aplicada

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Note que o limite do lado direito é agora indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$. Mas em vez de aplicar a Regra de L'Hôspital uma segunda vez, como fizemos no Exemplo 2, simplificamos a expressão e vemos que é desnecessária uma segunda aplicação da regra:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

EXEMPLO 4 □ Encontre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (Veja o Exercício 36(d) da Seção 2.2.)

SOLUÇÃO Notando que $\operatorname{tg} x - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$, usamos então a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

□ O gráfico na Figura 4 dá uma confirmação visual do resultado do Exemplo 4. Se déssemos um *zoom*, porém, obteríamos um gráfico impreciso, pois tg x está próximo de x para x pequeno. Veja o Exercício 36(d) na Seção 2.2.

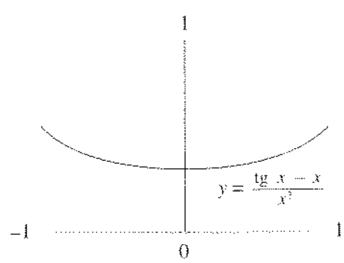


FIGURA 4

Uma vez que o limite do lado direito é ainda indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos novamente a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

Pelo fato de $\lim_{x \to 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos os cálculos anteriores da seguinte forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \sec^2 x \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

EXEMPLO 5 □ Encontre $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUÇÃO Se tentarmos usar cegamente a Regra de L'Hôspital, obteremos

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

Isso está *errado*! Embora o numerador sen $x \to 0$ quando $x \to \pi^-$, note que o denominador $(1 - \cos x)$ não tende a zero; logo, não podemos aplicar aqui a Regra de L'Hôspital.

O limite pedido é, de fato, fácil de ser encontrado, pois a função é contínua e o denominador é diferente de zero em π:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

O Exemplo 5 mostra o que poderá acontecer de errado se você usar impensadamente a Regra de L'Hôspital. Outros limites *podem* ser encontrados pela Regra de L'Hôspital, mas são calculados mais facilmente por outros métodos. (Veja os Exemplos 3 e 5 na Seção 2.3, o Exemplo 3 na Seção 2.6 e a discussão no começo desta seção.) Assim, quando do cálculo de qualquer limite, você deve considerar outros métodos antes de usar a Regra de L'Hôspital.

Produtos Indeterminados

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro qual será o valor de $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f ganhar, a resposta é 0; se g ganhar, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado **forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$**. Podemos trabalhar com ela, escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ de forma que podemos usar a Regra de L'Hôspital.

▫ A Figura 5 mostra o gráfico da função do Exemplo 6. Note que a função não está definida em $x = 0$; o gráfico tende à origem, mas nunca realmente a atinge.

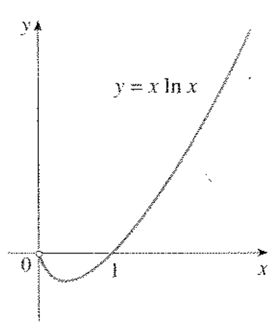


FIGURA 5

EXEMPLO 6 ▫ Calcule $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

SOLUÇÃO O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator $(\ln x)$ tende a $-\infty$. Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$; logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

NOTA ▫ Ao resolver o Exemplo 6, outra opção poderia ser escrita

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo 0/0, mas, se aplicarmos a Regra de L'Hôspital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos. Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

Diferenças Indeterminadas

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

é chamado **forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$**. Novamente há uma disputa entre f e g. Será a resposta ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio resultando um número finito? Para descobrir, tentamos converter a diferença, por exemplo, em um quociente, usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.

EXEMPLO 7 □ Calcule $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

SOLUÇÃO Note primeiro que $\sec x \to \infty$ e $\operatorname{tg} x \to \infty$ quando $x \to (\pi/2)^-$; logo, o limite é indeterminado. Aqui usamos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Note que o uso da Regra de L'Hôspital é justificado, pois $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ e $\cos x \to 0$ quando $x \to (\pi/2)^-$.

Potências Indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto por tomar o logaritmo natural

$$\text{seja} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{então} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

quanto por escrever a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Lembre-se de que esses métodos foram usados na diferenciação dessas funções.) Em ambos os métodos somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

EXEMPLO 8 □ Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$.

SOLUÇÃO Note primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ e $\operatorname{cotg} x \to \infty$, logo o limite dado é indeterminado. Seja

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$$

Então $\qquad \ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}] = \operatorname{cotg} x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$

logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

□ O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

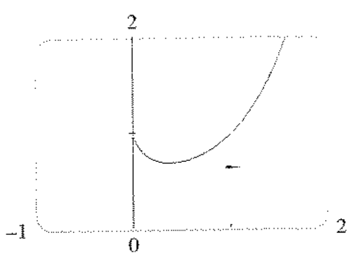


FIGURA 6

EXEMPLO 9 □ Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Note que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos seguir como no Exemplo 8 ou escrevendo a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

4.4 Exercícios

1–4 □ Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–62 □ Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital onde for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

5. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

11. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t^3}$

12. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$

14. $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cossec} \theta}$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - (x^2/2)}{x^3}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln(1 + 2e^x)}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

33. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

34. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

35. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-2x}}{\sec x}$

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

38. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$

39. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$

40. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

41. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 e^{-x^2}$

42. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec x$

43. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x \operatorname{tg} (\pi x/2)$

44. $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{tg}(1/x)$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cossec} x \right)$

46. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

47. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

49. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \ln x)$

50. $\lim\limits_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x)$

51. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^2}$

52. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$

53. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

54. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

55. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} \right)^x$

56. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

57. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

58. $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

59. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{x + 1} \right)^x$

60. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 3x)^{5/x}$

61. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

62. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x + 1}$

63–64 □ Use um gráfico para estimar o valor do limite. Então use a Regra de L'Hôspital para encontrar o valor exato.

63. $\lim\limits_{x \to \infty} x [\ln (x + 5) - \ln x]$

64. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

65–66 □ Ilustre a Regra de L'Hôspital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

65. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

66. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

67. Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

68 Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

69. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros i composta n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0 \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt}$$

Se fizermos $n \to \infty$, chamamos isso *juros compostos* continuamente. Use a Regra de L'Hôspital para mostrar que se os juros forem compostos continuamente, então o montante após n anos será

$$A = A_0 e^{it}$$

70. Se um objeto de massa m é deixado cair a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c} (1 - e^{-ct/m})$$

em que g é a aceleração devida à gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto.)

(a) Calcule $\lim_{t \to \infty} v$. Qual o significado desse limite?

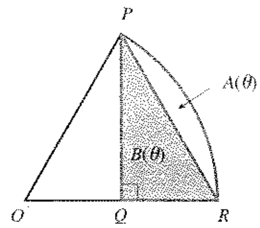
(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de L'Hôspital para calcular $\lim_{m\to\infty} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto muito pesado caindo?

71. A primeira publicação da Regra de L'Hôspital foi o livro *Analyse des Infiniment Petits*, publicado pelo marquês de L'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro texto de cálculo publicado, e o exemplo que o marquês usou nesse livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, em que $a > 0$. (Naquele tempo costumava-se escrever aa em vez de a^2.) Resolva esse problema.

72. A figura mostra um setor de círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



73. Se f' for contínua, $f(2) = 0$ e $f'(2) = 7$, avalie

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$$

74. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

75. Se f' for contínua, use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

76. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

77. Seja $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens que estão definidas em $\mathbb{R}$. [*Sugestão*: Mostre primeiro por indução que existe um polinômio $p_n(x)$ e um inteiro não negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

78. Seja $$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é diferenciável em 0 dando vários *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é diferenciável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?

Projeto Escrito — As Origens da Regra de L'Hôspital

A Regra de L'Hôspital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des Infiniment Petits*, do marquês de L'Hôspital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John (Johann) Bernoulli. A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de L'Hôspital os direitos das descobertas de Bernoulli. Os detalhes desse acordo, inclusive a tradução da carta de L'Hôspital para Bernoulli propondo o arranjo, podem ser encontrados no livro de Eves [1].

Escreva um relatório sobre as origens histórica e matemática da Regra de L'Hôspital. Comece fornecendo uma breve biografia de ambos (o dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte), e resuma o arranjo feito por eles. Então dê o enunciado da Regra de L'Hôspital, que é encontrada no livro de Struik [4] e mais resumidamente no livro de Katz [3]. Observe que L'Hôspital e Bernoulli formularam geometricamente a regra e deram a resposta em termos de diferenciais. Compare seus enunciados com a versão da regra de Bernoulli dada na Seção 4.4 e mostre que os dois enunciados são essencialmente iguais.

1. EVES, Howard. *In Mathematical Circles (Volume 2: Quadrants III and IV)*. Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969, p. 20–22.

2. GILLISPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Johann Bernoulli por E. A. Fellmann e J. O. Fleckenstein no Volume II e o artigo sobre o marquês L'Hôspital por Abraham Robinson no Volume VIII.

3. KATZ, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 484.

4. STRUIK, D. J. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969, p. 315–316.

4.5 Resumo dos Esboços de Curvas

Até agora estivemos preocupados com alguns aspectos particulares de esboços de curvas: domínio, imagem e simetria no Capítulo 1; limites, continuidade e assíntotas no Capítulo 2; derivadas e tangentes nos Capítulos 2 e 3; e valores extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e Regra de L'Hôspital neste capítulo. Chegou a hora de agruparmos todas essas informações para esboçar os gráficos que revelem os aspectos importantes das funções.

Você pode estar se perguntando: O que há de errado em simplesmente usar uma calculadora para plotar os pontos e então juntá-los com uma curva suave? Para ver as falhas dessa abordagem, suponha que você tenha usado uma calculadora para obter a tabela de valores e pontos correspondentes na Figura 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-5	22	1	7
-4	7	2	10
-3	-2	3	11
-2	-4	4	10
-1	-2	5	8
0	3	6	-8

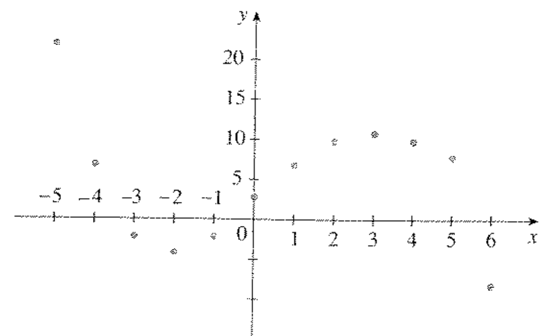


FIGURA 1

Você pode então uni-los para obter a curva na Figura 2, porém o gráfico correto pode ser o da Figura 3. Você pode ver as falhas do método de plotagem de pontos. Certos aspectos essenciais do gráfico podem ser perdidos, tais como os valores máximo e mínimo entre -2 e -1 ou entre 2 e 5. Se você simplesmente desenhar os pontos, não saberá quando parar. (Quão longe você deve desenhar à esquerda ou à direita?) Mas o uso do cálculo garante que todos os aspectos importantes da curva serão ilustrados.

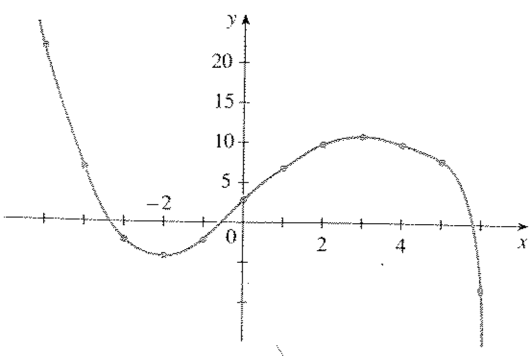


FIGURA 2

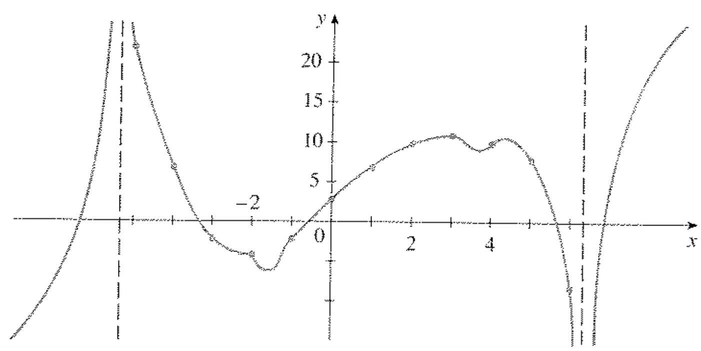


FIGURA 3

Você poderia argumentar: Está bem, mas o que dizer de calculadoras gráficas e computadores? Eles não desenham um número tão grande de pontos que torne improvável esse tipo de incerteza demonstrado pelas Figuras 2 e 3?

É verdade que essa tecnologia moderna é capaz de produzir gráficos bem precisos. Contudo, mesmo o melhor recurso computacional deve ser usado inteligentemente. Vimos na Seção 1.4 que é extremamente importante escolher uma janela de inspeção para evitar

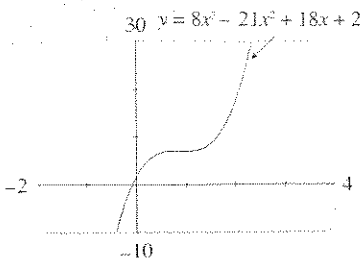


FIGURA 4

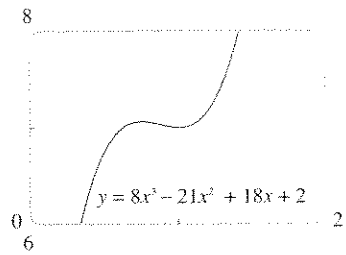
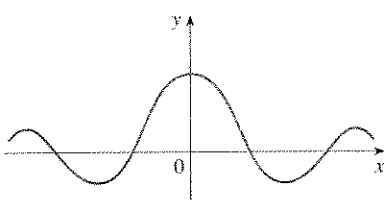
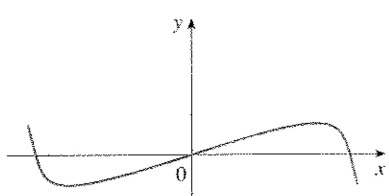


FIGURA 5



(a) Função par; simetria reflexional



(b) Função ímpar: simetria rotacional

FIGURA 6

obter um gráfico que nos leve a conclusões errôneas. (Veja, especialmente, os Exemplos 1, 3, 4 e 5 naquela seção.) O uso do cálculo possibilita-nos descobrir os aspectos mais interessantes dos gráficos e, em muitos casos, calcular com *exatidão* os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

Por exemplo, a Figura 4 mostra o gráfico de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. À primeira vista ele parece razoável; ele tem a mesma forma de curvas cúbicas como $y = x^3$, e não aparenta ter ponto de máximo ou de mínimo. Mas se você calcular a derivada, verá que existe um máximo quando $x = 0{,}75$ e um mínimo quando $x = 1$. Realmente, se dermos um *zoom* nessa parte do gráfico, veremos o comportamento exibido na Figura 5. Sem o cálculo, poderíamos facilmente não ter reparado nisso.

Na próxima seção faremos os gráficos de funções usando a interação entre o cálculo e os recursos gráficos. Nesta seção faremos gráficos considerando primeiro a informação que se segue. Não pressupomos que você tenha um recurso computacional, mas, se você tiver algum, use-o somente para verificar o resultado de seu trabalho.

Roteiro para Esboçar uma Curva

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma dada curva pode não ter assíntotas ou não possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É freqüentemente proveitoso começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

B. Interceptos O intercepto y é $f(0)$ e nos diz onde a curva intercepta o eixo y. Para achar o intercepto x, fazemos $y = 0$ e resolvemos para x. (Você pode omitir esta etapa se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geqslant 0$, então somente precisaremos refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 6(a)]. Alguns exemplos disso são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar**, e a curva é simétrica em relação à origem. Novamente podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geqslant 0$. [Girando 180° em torno da origem; veja a Figura 6(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, em que p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é denominado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ possui um período de 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico no intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro (veja a Figura 7).

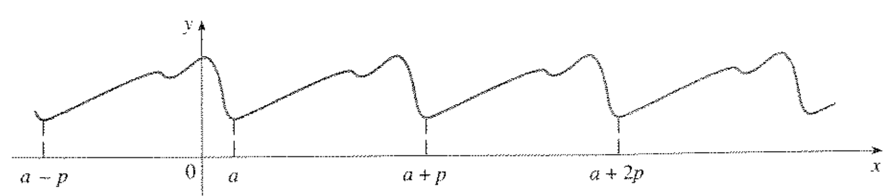


FIGURA 7

Função periódica: simetria de translação

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se da Seção 2.6 que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$.

Se resultar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, mas esta é uma informação proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se da Seção 2.2 que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para as outras funções esse método não é aplicável.) Além disso, ao esboçar a curva é muito proveitoso saber exatamente qual das afirmativas em (1) é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for um extremo do domínio de f, então você deve computar $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, se esse limite for infinito ou não.

(iii) *Assíntotas inclinadas*. Elas serão discutidas no final desta seção.

E. Intervalos de Crescimento e Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais ela é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximo e Mínimo Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Derivada Primeira. Se f' mudar de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é o máximo local. Se f' mudar de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Embora seja geralmente preferível o Teste da Derivada Primeira, você pode usar o Teste da Derivada Segunda se c for um número crítico no qual $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ seja um mínimo local, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Ponto de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque os interceptos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se uma precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá computar o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

EXEMPLO 1 Use os itens dados para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Os interceptos x e y são ambos zero.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, f é par. A curva é simétrica em relação ao eixo y.

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Uma vez que o denominador é zero quando $x = \pm 1$, computamos os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

Conseqüentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 8 mostrando as partes da curva próxima das assíntotas.

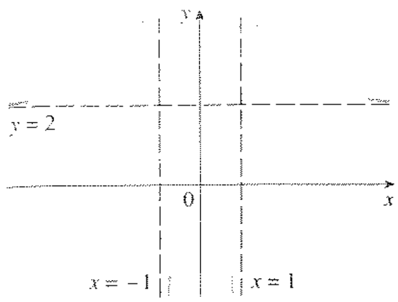


FIGURA 8
Esboço preliminar

E.
$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Como f' muda de positivo para negativo em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Derivada Primeira.

Mostramos que a curva aproxima-se de sua assíntota horizontal por cima na Figura 8; isso está confirmado pelos intervalos de crescimento e decrescimento.

G.
$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Visto que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e -1 não estão no domínio de f.

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 9.

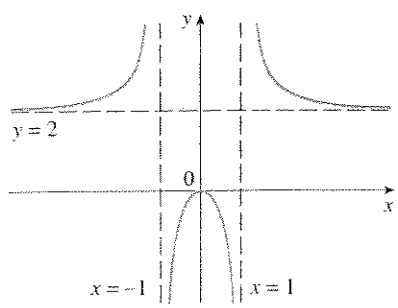


FIGURA 9
Esboço final de $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

A. Domínio $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Os interceptos x e y são ambos 0.

C. Simetria: Nenhuma.

D. Uma vez que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

não há assíntota horizontal. Como $\sqrt{x+1} \to 0$ quando $x \to -1^+$ e $f(x)$ é sempre positivo, temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

e logo a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical.

E.
$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x+1}\right)}{x+1} = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ não está no domínio de f); logo, o único número crítico é 0. Dado que $f'(x) < 0$ quando $-1 < x < 0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 0$, f é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.

F. Uma vez que $f'(0) = 0$ e f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e absoluto) pelo Teste da Primeira Derivada.

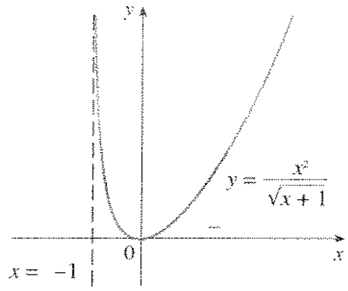


FIGURA 10

G. $$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Note que o denominador é sempre positivo. O numerador é o quadrático $3x^2 + 8x + 8$, que é sempre positivo, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32$, que é negativo, e o coeficiente de x^2 é positivo. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x no domínio de f, o que significa que f é côncava para cima em $(-1, \infty)$ e não há ponto de inflexão.

H. A curva está esboçada na Figura 10.

EXEMPLO 3 □ Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. O intercepto x e y são ambos 0.

C. Simetria: Nenhuma.

D. Como ambos x e e^x tornam-se grandes quando $x \to \infty$, temos $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Quando $x \to -\infty$, contudo, $e^x \to 0$ e temos um produto indeterminado que requer o uso da Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Uma vez que e^x é sempre positiva, vemos que $f'(x) > 0$ quando $x + 1 > 0$, e $f'(x) < 0$ quando $x + 1 < 0$. Logo, f é crescente em $(-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1)$.

F. Como $f'(-1) = 0$ e f muda de negativo para positivo em $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ é um mínimo local (e absoluto).

G. $$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Visto que $f''(x) > 0$ se $x > -2$ e $f''(x) < 0$ se $x < -2$, f é côncava para cima em $(-2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2)$. O ponto de inflexão é $(-2, -2e^{-2})$.

H. Usamos essa informação para plotar a curva da Figura 11.

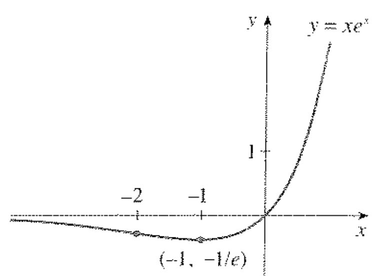


FIGURA 11

EXEMPLO 4 □ Esboce o gráfico de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. O intercepto y é $f(0) = 2$. O intercepto x ocorre quando

$$2\cos x + \operatorname{sen} 2x = 2\cos x + 2\operatorname{sen} x\cos x = 2\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x) = 0$$

isto é, quando $\cos x = 0$ ou $\operatorname{sen} x = -1$. Assim, no intervalo $[0, 2\pi]$, os interceptos x são $\pi/2$ e $3\pi/2$.

C. f não é nem par nem ímpar, mas $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo x; logo, f é periódica e tem um período 2π. Dessa forma, precisamos considerar somente $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então estender a curva por translação em H.

D. Assíntota: Nenhuma.

E. $$\begin{aligned} f'(x) &= -2\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = -2\operatorname{sen} x + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) \\ &= -2(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1) = -2(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $f'(x) = 0$ quando sen $x = \frac{1}{2}$ ou sen $x = -1$; logo, em $[0, 2\pi]$ temos $x = \pi/6, 5\pi/6$ e $3\pi/2$. Determinando o sinal de $f'(x)$ na tabela a seguir, usamos o fato de que sen $x + 1 \geqslant 0$ para todo x.

Intervalo	$f'(x)$	f
$0 < x < \pi/6$	+	crescente em $(0, \pi/6)$
$\pi/6 < x < 5\pi/6$	−	decrescente em $(\pi/6, 5\pi/6)$
$5\pi/6 < x < 3\pi/2$	+	crescente em $(5\pi/6, 3\pi/2)$
$3\pi/2 < x < 2\pi$	+	crescente em $(3\pi/2, 2\pi)$

F. Da tabela em E o Teste da Primeira Derivada diz que $f(\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$ é um máximo local e $f(5\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$ é um mínimo local, mas f não tem nem máximo nem mínimo em $3\pi/2$, somente uma tangente horizontal.

G.
$$f''(x) = -2\cos x - 4 \operatorname{sen} 2x = -2\cos x\,(1 + 4 \operatorname{sen} x)$$

Assim, $f''(x) = 0$ quando $\cos x = 0$ (logo $x = \pi/2$ ou $3\pi/2$) e quando sen $x = -\frac{1}{4}$. Da Figura 12 vemos que há dois valores de x entre 0 e 2π para os quais sen $x = -\frac{1}{4}$. Vamos chamá-los α_1 e α_2. Então $f''(x) > 0$ em $(\pi/2, \alpha_1)$ e $(3\pi/2, \alpha_2)$; portanto, aí f é côncava para cima. Também $f''(x) < 0$ em $(0, \pi/2)$, $(\alpha_1, 3\pi/2)$ e $(\alpha_2, 2\pi)$; logo, aí f é côncava para baixo. Os pontos de inflexão ocorrem quando $x = \pi/2, \alpha_1, 3\pi/2$ e α_2.

$\alpha_1 = \pi + \operatorname{arcsen} \frac{1}{4}$

$\alpha_2 = 2\pi - \operatorname{arcsen} \frac{1}{4}$

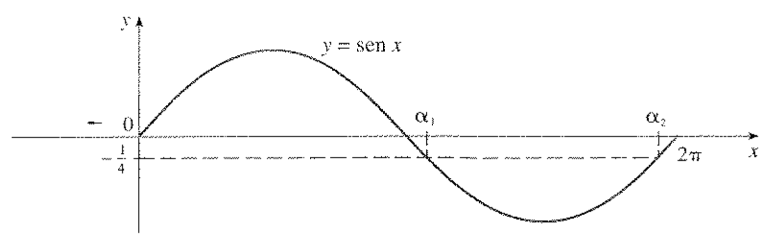


FIGURA 12

H. O gráfico da função restrita a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é mostrado na Figura 13. Então é estendido, usando a periodicidade, para completar o gráfico na Figura 14.

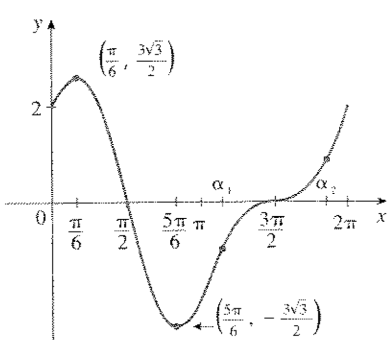


FIGURA 13

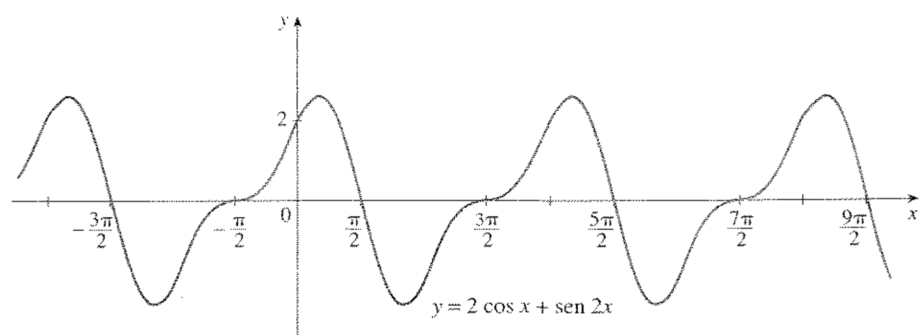


FIGURA 14

EXEMPLO 5 ▫ Esboce o gráfico de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. O domínio é

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. O intercepto y é $f(0) = \ln 4$. Para achar o intercepto x fazemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = \log_e 1 = 0$ (uma vez que $e^0 = 1$); logo, temos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ e, portanto, os interceptos x são $\pm\sqrt{3}$.

C. Visto que $f(-x) = f(x)$, f é par, e a curva é simétrica em torno do eixo y.

D. Procuramos as assíntotas verticais nos extremos do domínio. Dado que $4 - x^2 \to 0^+$ quando $x \to 2^-$ e também quando $x \to -2^+$, temos

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Assim, as retas $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $-2 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $0 < x < 2$, f é crescente em $(-2, 0)$ e decrescente em $(0, 2)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = \ln 4$ é um máximo local pelo Teste da Derivada Primeira.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Uma vez que $f''(x) < 0$ para todo x, a curva é côncava para baixo em $(-2, 2)$ e não tem ponto de inflexão.

H. Usando essa informação, esboçamos a curva na Figura 15.

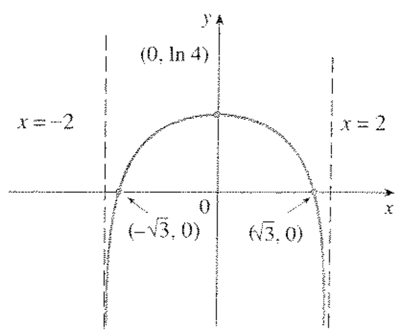


FIGURA 15
$y = \ln(4 - x^2)$

Assíntotas Inclinadas

Algumas curvas têm assíntotas que são *oblíquas*, isto é, não são horizontais nem verticais. Se

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

então a reta $y = mx + b$ é chamada **assíntota inclinada**, pois a distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a reta $y = mx + b$ tende a 0, como na Figura 16. (Uma situação análoga existe quando fazemos $x \to -\infty$.) Para as funções racionais, as assíntotas inclinadas ocorrem quando a diferença entre os graus do numerador e do denominador é 1. Nesse caso a equação da assíntota inclinada pode ser encontrada por divisão de polinômios, como no exemplo a seguir.

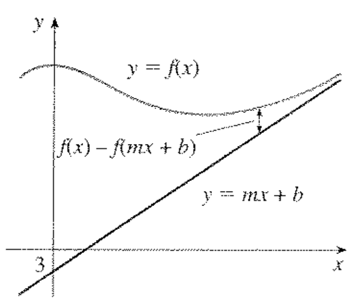


FIGURA 16

EXEMPLO 6 □ Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. O domínio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Os interceptos x e y são ambos 0.

C. Visto que $f(-x) = -f(x)$, f é ímpar, e seu gráfico, simétrico em torno da origem.

D. Como $x^2 + 1$ nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$, não há assíntotas horizontais. Mas a divisão de polinômios fornece

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \pm\infty$$

Logo a reta $y = x$ é uma assíntota inclinada.

E.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

G.
$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, estabelecemos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 17.

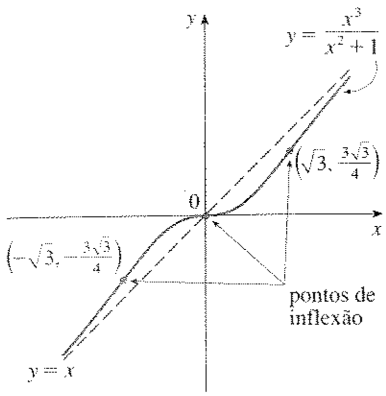


FIGURA 17

4.5 Exercícios

1–52 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x^4 + 4x^3$

6. $y = x(x+2)^3$

7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$

8. $y = 20x^3 - 3x^5$

9. $y = \dfrac{x}{x-1}$

10. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

11. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

15. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

16. $y = \dfrac{x^2-2}{x^4}$

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

18. $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

19. $y = x\sqrt{5-x}$

20. $y = 2\sqrt{x} - x$

21. $y = \sqrt{x^2+1} - x$

22. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

24. $y = x\sqrt{2-x^2}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

27. $y = x - 3x^{1/3}$

28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

29. $y = x + \sqrt{|x|}$

30. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

31. $y = 3\,\text{sen}\,x - \text{sen}^3 x$

32. $y = \text{sen}\,x - \text{tg}\,x$

33. $y = x\,\text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

34. $y = 2x - \text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

35. $y = \frac{1}{2}x - \text{sen}\,x, \quad 0 < x < 3\pi$

36. $y = \cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x$

37. $y = \text{sen}\,2x - 2\,\text{sen}\,x$

38. $y = \text{sen}\,x - x$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = e^{2x} - e^{x}$

43. $y = x \ln x$

44. $y = e^{x}/x$

45. $y = xe^{-x}$

46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

47. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

48. $y = x(\ln x)^2$

49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = e^{x} - 3e^{-x} - 4x$

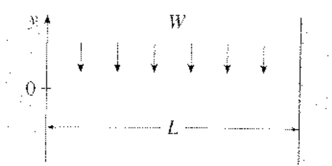
51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

52. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

53. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida em paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

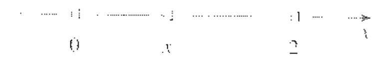
em que E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia da secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



54. A Lei de Coulomb estabelece que a força de atração entre duas partículas com carga é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra as partículas com a carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo de coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força líquida agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \quad 0 < x < 2$$

na qual k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força líquida. O que o gráfico mostra sobre a força?



55–58 Ache a equação da assíntota inclinada. Não desenhe a curva.

55. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

56. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

57. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

58. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

59–64 Use passos definidos nesta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D ache uma equação para a assíntota inclinada.

59. $y = \dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$

60. $y = \dfrac{x^2 + 12}{x - 2}$

61. $xy = x^2 + 4$

62. $y = e^{x} - x$

63. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

64. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

65. Mostre que a curva $y = x - \operatorname{tg}^{-1} x$ tem duas assíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

66. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas inclinadas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

67. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas inclinadas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

68. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0.$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é uma *assíntota* da parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

69. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 68. Use então seus resultados como ajuda no esboço do gráfico de f.

70. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem passar pelo roteiro desta seção.

4.6 Fazendo Gráficos com o Cálculo e Calculadoras

Se você ainda não leu a Seção 1.4, deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas falhas dos recursos gráficos na escolha de janelas de inspeção inapropriadas.

O método usado para esboçar as curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para assegurar que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de recursos gráficos podemos nos dedicar a curvas complicadas de se tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre o cálculo e calculadoras.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma imagem, muitos recursos gráficos deduzirão uma nova imagem razoável para os valores computados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de algum desses recursos se especificarmos que

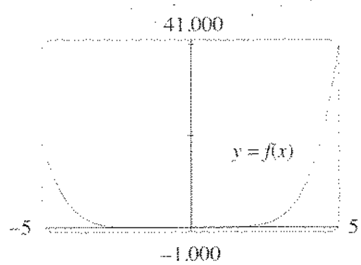


FIGURA 1

$-5 \leqslant x \leqslant 5$. Embora essa janela de inspeção seja útil para mostrar que o comportamento assintótico (o comportamento nos extremos) é o mesmo que o de $y = 2x^6$, é óbvio que estão omitidos os detalhes mais refinados. Assim, mudamos a janela de inspeção de $[-3, 2]$ para $[-50, 100]$, conforme mostrado na Figura 2.

A partir desse gráfico parece que existe um valor mínimo absoluto de cerca de $-15{,}33$ quando $x \approx -1{,}62$ (através do cursor) e f é decrescente em $(-\infty, -1{,}62)$ e crescente em $(-1{,}62, \infty)$. Aparentemente também existe uma tangente horizontal na origem e pontos de inflexão quando $x = 0$ e quando x está em algum lugar entre -2 e -1.

Vamos tentar confirmar essas impressões usando o cálculo. Diferenciando, obtemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

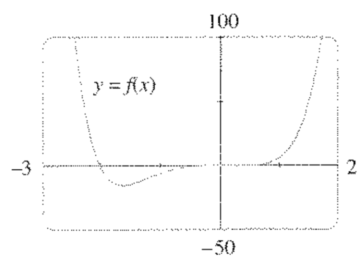


FIGURA 2

Quando fazemos o gráfico de f' na Figura 3, vemos que $f'(x)$ muda de negativo para positivo quando $x \approx -1{,}62$; isso confirma (pelo Teste da Derivada Primeira) o valor mínimo encontrado anteriormente. Mas, talvez para nossa surpresa, notamos também que $f'(x)$ muda de positivo para negativo quando $x = 0$, e de negativo para positivo quando $x \approx 0{,}35$. Isso significa que f tem um máximo local em 0 e um mínimo local quando $x \approx 0{,}35$, mas esses valores estavam escondidos na Figura 2. Realmente, se dermos um *zoom* em direção à origem, como na Figura 4, veremos o que havíamos perdido antes: o valor máximo local de 0 quando $x = 0$ e um valor mínimo local de cerca de $-0{,}1$ quando $x \approx 0{,}35$.

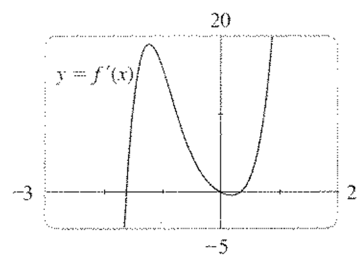


FIGURA 3

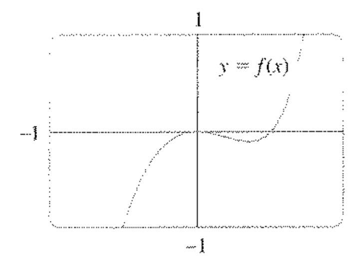


FIGURA 4

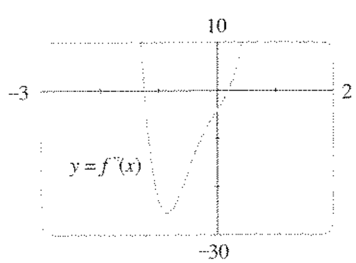


FIGURA 5

E o que dizer sobre a concavidade e os pontos de inflexão? Das Figuras 2 e 4 parece haver pontos de inflexão quando x está um pouco à esquerda de -1 e quando x está um pouco à direita de 0. Mas é difícil determinar os pontos de inflexão a partir do gráfico de f; assim, fazemos o gráfico da derivada segunda f'' na Figura 5. Vemos que f'' muda de positivo para negativo quando $x \approx -1{,}23$, e de negativo para positivo quando $x \approx 0{,}19$. Logo, correta até a segunda casa decimal, f é côncava para cima em $(-\infty, -1{,}23)$ e $(0{,}19, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1{,}23, 0{,}19)$. Os pontos de inflexão são $(-1{,}23; -10{,}18)$ e $(0{,}19, -0{,}05)$.

Descobrimos que um único gráfico não revela todos os aspectos importantes desse polinômio. Porém, as Figuras 2 e 4, quando feitas juntas, fornecem um traçado preciso.

EXEMPLO 2 □ Faça o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

em uma janela de inspeção que contenha todos os aspectos importantes da função. Estime os valores máximo e mínimo e os intervalos de concavidade. Então use o cálculo para verificar o valor exato dessas quantidades.

SOLUÇÃO A Figura 6, feita por um computador com escalonamento automático, é um desastre. Algumas calculadoras gráficas usam como janela de inspeção $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$; assim, vamos tentar fazer isso. Obtemos o gráfico mostrado na Figura 7, e ele é uma grande melhoria.

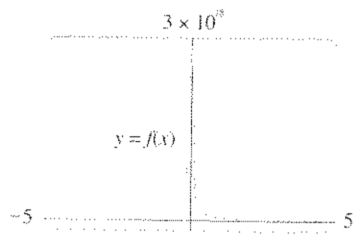


FIGURA 6

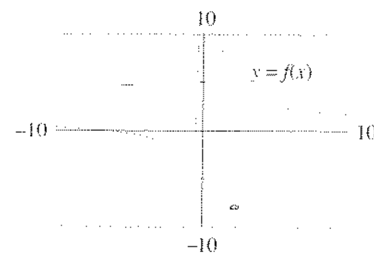


FIGURA 7

O eixo y aparenta ser uma assíntota vertical e realmente o é, pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

A Figura 7 também nos permite estimar os interceptos x: cerca de $-0{,}5$ e $-6{,}5$. Os valores exatos são obtidos usando-se a fórmula quadrática para resolver a equação $x^2 + 7x + 3 = 0$. Obtemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

Para obter uma visão melhor das assíntotas horizontais mudamos para a janela de inspeção $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ na Figura 8. Aparentemente $y = 1$ é a assíntota horizontal, e isso é facilmente confirmado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

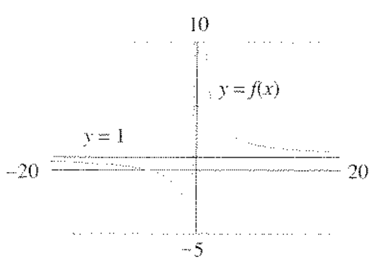


FIGURA 8

Para estimar o valor mínimo damos um *zoom* na janela de inspeção $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ da Figura 9. O cursor indica que o valor mínimo absoluto é de cerca de $-3{,}1$ quando $x \approx -0{,}9$, e vemos que a função decresce em $(-\infty, -0{,}9)$ e $(0, \infty)$ e cresce em $(-0{,}9, 0)$. Os valores exatos são obtidos por diferenciação:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Isso mostra que $f'(x) > 0$ quando $-\frac{6}{7} < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $x < -\frac{6}{7}$ e quando $x > 0$. O valor mínimo exato é $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3{,}08$.

A Figura 9 também mostra que ocorre um ponto de inflexão em algum lugar entre $x = -1$ e $x = -2$. Podemos estimá-lo mais precisamente usando o gráfico da derivada segunda, o que nesse caso é tão fácil quanto achar os valores exatos. Uma vez que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = 2\,\frac{7x + 9}{x^4}$$

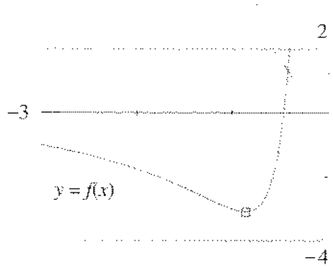


FIGURA 9

vemos que $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Logo f é côncava para cima em $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ e $(0, \infty)$ e côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

A análise usando as duas primeiras derivadas mostradas nas Figuras 7 e 8 mostram todos os aspectos mais importantes da curva.

EXEMPLO 3 □ Faça o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

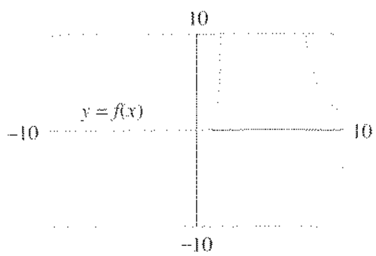


FIGURA 10

SOLUÇÃO Com base em nossa experiência com a função racional no Exemplo 2, vamos começar fazendo o gráfico de f na janela de inspeção $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Da Figura 10 temos a sensação de que vamos precisar dar um *zoom* para ver mais detalhadamente, e também nos afastar para ver ou para ter uma visão melhor do traçado Mas, como regra para dar um *zoom* inteligente, vamos primeiro analisar bem de perto a expressão de $f(x)$. Em razão dos fatores $(x-2)^2$ e $(x-4)^4$ no denominador, esperamos que $x = 2$ e $x = 4$ sejam assíntotas verticais. Realmente

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para encontrar as assíntotas horizontais dividimos numerador e denominador por x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4} \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \pm\infty$$

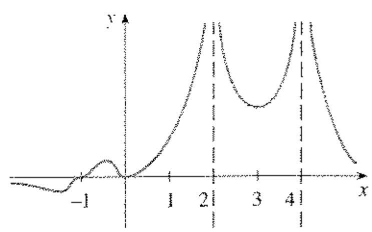


FIGURA 11

logo o eixo x é a assíntota horizontal.

É também muito proveitoso considerar o comportamento do gráfico nas proximidade do intercepto x usando uma análise igual à do Exemplo 11 na Seção 2.6. Uma vez que x é positivo, $f(x)$ não muda de sinal em 0 e, portanto, seu gráfico não cruza o eixo x em (No entanto, devido ao fator $(x+1)^3$, o gráfico cruza o eixo x em -1 e tem uma tangent horizontal aí. Juntando todas essas informações, mas sem usar as derivadas, vemos que curva deve se parecer com algo semelhante ao mostrado na Figura 11.

Agora que sabemos o que procurar, damos vários *zooms* para obter os gráficos nas Figuras 12 e 13 e afastamos várias vezes para obter a Figura 14.

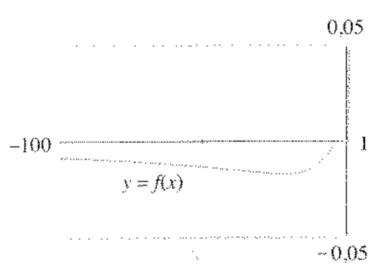


FIGURA 12

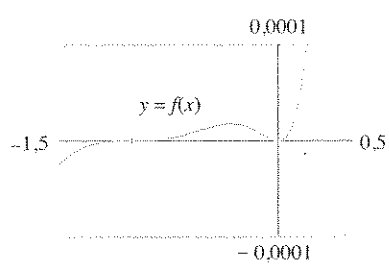


FIGURA 13

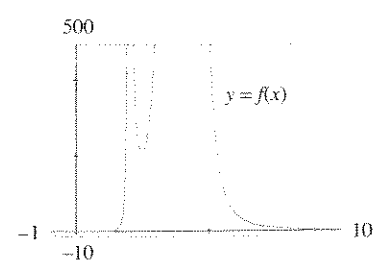


FIGURA 14

Podemos ver desses gráficos que o mínimo absoluto está em torno de $-0{,}02$ e ocorre quar do $x \approx -20$. Há também um máximo local $\approx 0{,}00002$ quando $x \approx -0{,}3$, e um mínimo local 211 quando $x \approx 2{,}5$. Esses gráficos também mostram três pontos de inflexão próximos a -3 -5 e -1, e dois entre -1 e 0. Para estimar os pontos de inflexão mais precisamente necessitar mos do gráfico de f'', mas calcular à mão f'' é uma tarefa não razoável. Se você tiver um si tema algébrico computacional, então não encontrará maiores problemas (veja o Exercício 17)

Vimos que para essa particular função são necessários *três* gráficos (Figuras 12, 13 e 14) para juntar todas as informações úteis. A única maneira de dispor todos esses aspectos da função em um único gráfico é fazê-lo à mão. A despeito dos exageros e distorções, a Figura 11 consegue resumir a natureza essencial da função.

□ A família de funções

$$f(x) = \text{sen}(x + \text{sen } cx)$$

onde c é uma constante, ocorre em aplicações para a síntese de freqüência modulada (FM). Uma onda senoidal é modulada por uma onda com uma freqüência diferente ($\text{sen } cx$). O caso em que $c = 2$ é analisado no Exemplo 4. O Exercício 25 explora outro caso especial.

EXEMPLO 4 □ Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen } 2x)$. Para $0 \leq x \leq \pi$, localize todos os valores máximo e mínimo, intervalos de crescimento e de decrescimento, e pontos de inflexão corretos até a primeira casa decimal.

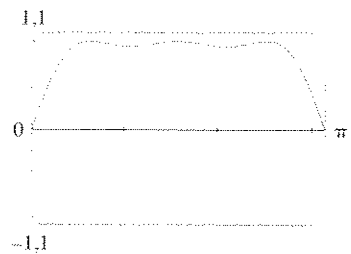


FIGURA 15

SOLUÇÃO Notamos primeiro que f é periódica com período de 2π. A função f é também ímpar e $|f(x)| \leq 1$ para todo x. Logo a escolha de uma janela de inspeção não é um problema para essa função: começamos com $[0, \pi]$ por $[-1{,}1, 1{,}1]$ (veja a Figura 15). Parece que existem três valores máximos locais e dois mínimos locais nessa janela. Para confirmar isso e localizá-los mais precisamente, calculamos que

$$f'(x) = \cos(x + \text{sen } 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

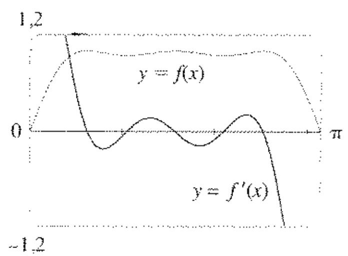


FIGURA 16

e fazemos os gráficos de f e f' na Figura 16. Dando um *zoom* e usando o Teste da Derivada Primeira encontramos os seguintes valores para uma casa decimal.

Intervalos de crescimento:	$(0, 0{,}6)$, $(1{,}0, 1{,}6)$, $(2{,}1, 2{,}5)$
Intervalos de decrescimento:	$(0{,}6, 1{,}0)$, $(1{,}6, 2{,}1)$, $(2{,}5, \pi)$
Valores máximos locais:	$f(0{,}6) \approx 1$, $f(1{,}6) \approx 1$, $f(2{,}5) \approx 1$
Valores mínimos locais:	$f(1{,}0) \approx 0{,}94$, $f(2{,}1) \approx 0{,}94$

A derivada segunda é

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \,\text{sen}(x + \text{sen } 2x) - 4\,\text{sen } 2x \cos(x + \text{sen } 2x)$$

Fazendo o gráfico de f e f'' na Figura 17, obtemos os seguintes valores aproximados:

Côncava para cima:	$(0{,}8, 1{,}3)$, $(1{,}8, 2{,}3)$
Côncava para baixo:	$(0, 0{,}8)$, $(1{,}3, 1{,}8)$, $(2{,}3, \pi)$
Pontos de inflexão:	$(0, 0)$, $(0{,}8, 0{,}97)$, $(1{,}3, 0{,}97)$, $(1{,}8, 0{,}97)$, $(2{,}3, 0{,}97)$

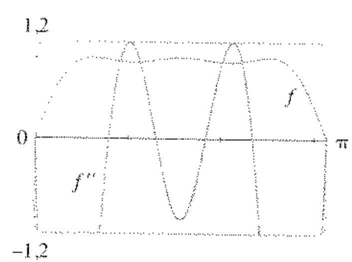


FIGURA 17

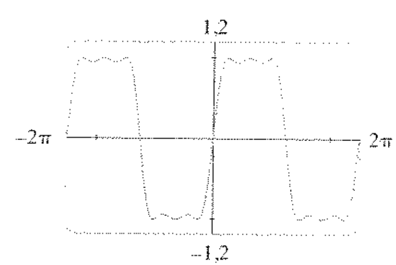


FIGURA 18

A Figura 15 realmente representa precisamente f para $0 \leq x \leq \pi$, e assim podemos estabelecer que o gráfico na Figura 18 representa f precisamente para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Nosso último exemplo trata de *famílias* de funções, conforme discutido na Seção 1.4. Isso significa que as funções na família estão relacionadas umas às outras por uma fórmula que contém uma ou mais constantes arbitrárias. Cada um dos valores da constante dá origem a um membro da família, e a idéia é ver como varia o gráfico da função à medida que mudamos a constante.

EXEMPLO 5 □ Quando c varia, como varia o gráfico de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$?

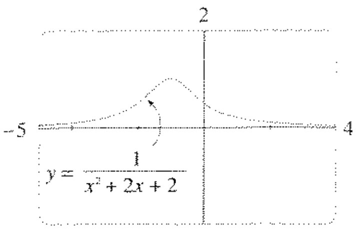


FIGURA 19
$c = 2$

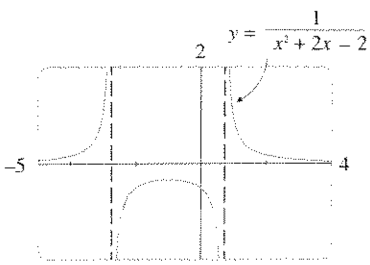


FIGURA 20
$c = -2$

SOLUÇÃO Os gráficos nas Figuras 19 e 20 (os casos especiais $c = 2$ e $c = -2$) mostram duas curvas com aspectos diferentes. Antes de fazer qualquer outro gráfico, vamos ver o que os membros dessa família têm em comum. Uma vez que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para todo valor de c, todos têm como assíntota horizontal o eixo x. Uma assíntota vertical ocorrerá quando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Quando $c > 1$, não há assíntotas verticais (como na Figura 19). Quando $c = 1$ o gráfico tem uma única assíntota vertical $x = -1$, pois

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

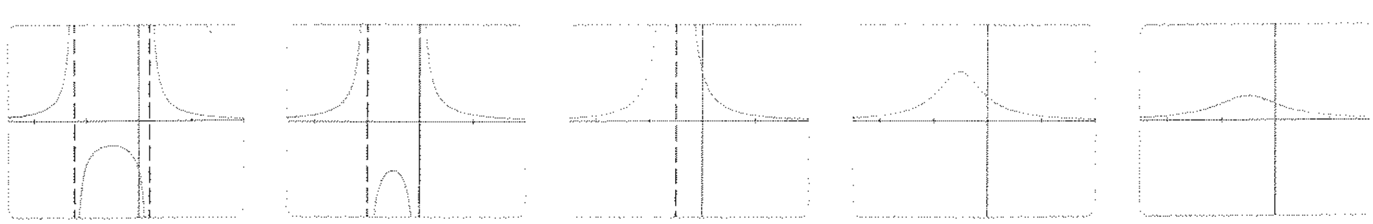
Quando $c < 1$, há duas assíntotas verticais: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como na Figura 20).

Computamos agora a derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Isso mostra que $f'(x) = 0$ quando $x = -1$ (se $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ quando $x < -1$ e $f'(x) < 0$ quando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$ isso significa que f é crescente em $(-\infty, -1)$ e decrescente em $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, existe um valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ é um valor máximo local, e os intervalos de crescimento e decrescimento são interrompidos nas assíntotas verticais.

A Figura 21 mostra cinco membros da família, feitos na janela de inspeção $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Conforme previsto, $c = 1$ é o valor no qual uma transição ocorre de duas assíntotas verticais para uma e depois para nenhuma. À medida que aumentamos c a partir de 1, vemos que o ponto de máximo fica cada vez mais baixo; isso é explicado pelo fato de que $1/(c - 1) \to 0$ quando $c \to \infty$. À medida que c decresce a partir de 1, as assíntotas verticais ficam cada vez mais separadas, pois a distância entre elas é



$c = -1$ $c = 0$ $c = 1$ $c = 2$ $c = 3$

FIGURA 21 A família de funções $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

$2\sqrt{1-c}$, que fica maior à medida que $c \to -\infty$. Novamente, o ponto de máximo tende ao eixo x, pois $1/(c-1) \to 0$ quando $c \to -\infty$.

Claramente não há pontos de inflexão quando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calculamos que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

e deduzimos que os pontos de inflexão ocorrem quando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. Portanto, os pontos de inflexão tornam-se mais espalhados à medida que c cresce, e isso parece plausível das duas últimas partes da Figura 21.

4.6 Exercícios

1–8 □ Obtenha os gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Em particular, você deve usar os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 5}$

4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + x - 2}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x + 5\cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7\cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{(x^2 - 9)}$

9–12 □ Obtenha os gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Estime os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão, e use o cálculo para achar essas quantidades exatamente.

9. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 10$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 11x - 20}{x^2}$

11. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

12. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

13–14 □

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Use a Regra de L'Hôspital para explicar o comportamento quando $x \to 0$.

(c) Estime o valor mínimo e intervalos de concavidade. Então use o cálculo para achar os valores exatos.

13. $f(x) = x^2 \ln x$ **14.** $f(x) = xe^{1/x}$

15–16 □ Esboce o gráfico à mão usando as assíntotas e interceptos, mas não as derivadas. Então use seu esboço como um roteiro na obtenção de gráficos (com um recurso computacional) que mostrem os aspectos mais importantes da curva. Use esses gráficos para estimar os valores máximo e mínimo.

15. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$ **16.** $f(x) = \dfrac{10x(x-1)^4}{(x-2)^3(x+1)^2}$

17. Se f for a função considerada no Exemplo 3, use um sistema algébrico computacional para calcular f' e então faça seu gráfico para confirmar que todos os valores máximo e mínimo são como dados no exemplo. Calcule f'' e use-o para estimar os intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

18. Se f for a função do Exercício 16, encontre f' e f'' e use seus gráficos para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento e concavidade de f.

19–22 □ Use um sistema algébrico computacional para fazer o gráfico de f e encontre f' e f''. Utilize os gráficos dessas derivadas para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão de f.

19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ **20.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}$

23–24 □

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Explique a forma do gráfico computando o limite quando $x \to 0^+$ ou quando $x \to \infty$.

(c) Estime os valores máximo e mínimo e então use o cálculo para achar os valores exatos.

(d) Use um gráfico de f'' para estimar a coordenada x dos pontos de inflexão.

23. $f(x) = x^{1/x}$ **24.** $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

25. No Exemplo 4 consideramos um membro da família de funções $f(x) = \text{sen}\,(x + \text{sen}\,cx)$ que ocorre na síntese FM. Aqui investigamos a função com $c = 3$. Comece fazendo o gráfico de f na janela de inspeção $[0, \pi]$ por $[-1{,}2, 1{,}2]$. Quantos pontos de máximo locais você pode ver? O gráfico tem mais coisas do que podemos ver a olho nu. Para descobrir os pontos de máximo e mínimo escondidos será necessário examinar muito cuidadosamente o gráfico de f'. De fato, ajuda a examinar ao mesmo tempo o gráfico de f''. Encontre todos os valores máximos e mínimos e os pontos de inflexão. Então faça o gráfico de f na janela de inspeção $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1{,}2, 1{,}2]$ e faça comentários sobre a simetria.

26–33 □ Descreva a mudança no gráfico de f à medida que c varia. Faça o gráfico de vários membros da família para ilustrar as tendências que você descobriu. Em particular, você deve investigar como os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão movem-se quando c varia. Você deve também identificar qualquer valor intermediário de c em que o aspecto básico da curva muda.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \text{sen}\,x$

34. A família de funções $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e C são números positivos e $b > a$, tem sido usada para modelar a concentração de uma droga injetada no sangue no instante $t = 0$. Faça o gráfico de vários membros dessa família. O que eles têm em comum? Para os valores fixos de C e a, descubra graficamente o que acontece à medida que b cresce. Use então o cálculo para provar o que você descobriu.

35. Investigue a família de curvas dadas por $f(x) = xe^{-cx}$, onde c é um número real. Comece computando os limites quando $x \to \pm\infty$. Identifique qualquer valor intermediário de c onde muda a forma básica. O que acontece aos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão quando c varia? Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família.

36. Investigue a família de curvas dadas pela equação $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comece determinando o valor de transição de c em que o número de pontos de inflexão muda. Faça então o gráfico de vários membros da família para ver quais formas são possíveis. Existe outro valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos muda. Tente descobrir isso graficamente. Prove então o que você descobriu.

37. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. Para quais valores de c a curva tem pontos de mínimo?
(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo para cada curva da família estão sobre a parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre fazendo o gráfico dessa parábola e de vários membros da família.

38. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. Para que valores de c a curva tem pontos de máximo e de mínimo?
(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo de cada curva da família estão sobre a curva $y = x - x^3$. Ilustre fazendo o gráfico dessa curva e de vários membros da família.

4.7 Problemas de Otimização

Os métodos estudados neste capítulo para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas áreas do dia-a-dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção e na próxima vamos resolver os problemas tais como maximizar as áreas, os volumes e os lucros e minimizar as distâncias, o tempo e os custos.

Na solução desses problemas práticos, o maior desafio está freqüentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, estabelecendo a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios do problema-solução discutidos na página 80 e adaptá-los para esta situação:

Passos na Solução dos Problemas de Otimização

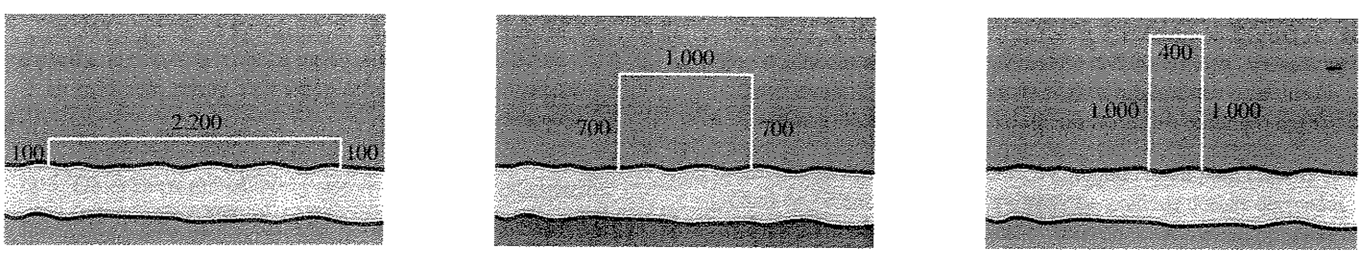
1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja claramente entendido. Pergunte a si mesmo: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas é proveitoso fazer um diagrama e identificar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.

3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-lo Q). Selecione também símbolos (a, b, c, ..., x, y) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo — por exemplo, A para área h e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.
5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis para a expressão Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f for um intervalo fechado, então poderá ser empregado o Método do Intervalo Fechado da Seção 4.1.

EXEMPLO 1 □ Um fazendeiro tem 2.400 pés de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Entendendo o problema
Analogia: Tente casos especiais
Fazendo diagramas

SOLUÇÃO A fim de examinar o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três caminhos possíveis de estender os 2.400 pés de cerca. Vemos que ao tentar os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos as áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.



Área = $100 \cdot 2.200 = 220.000$ pés²
Área = $700 \cdot 1.000 = 700.000$ pés²
Área = $1.000 \cdot 400 = 4000.000$ pés²

FIGURA 1

Introduzindo a notação

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área A do retângulo. Seja x e y a profundidade e a largura do retângulo (em pés). Então expressamos A em termos de x e y:

$$A = xy$$

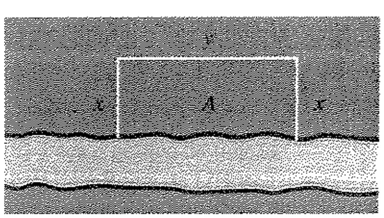


FIGURA 2

Queremos expressar A como uma função de uma única variável; assim, eliminamos y expressando em termos de x. Para fazer isso usamos a informação dada de que o comprimento total de cerca é de 2.400 pés. Dessa forma,

$$2x + y = 2.400$$

Dessa equação, temos $y = 2.400 - 2x$, resultando assim

$$A = x(2.400 - 2x) = 2.400x - 2x^2$$

Note que $x \geqslant 0$ e $x \leqslant 1.200$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 2.400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.200$$

A derivada é $A'(x) = 2.400 - 4x$; logo, para achar os números críticos resolvemos a equação

$$2.400 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 600$. O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em um extremo do intervalo. Uma vez que $A(0) = 0$, $A(600) = 720.000$ e $A(1.200) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(600) = 720.000$.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x; logo, A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 600$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ser de 600 pés de profundidade e 1.200 pés de extensão.

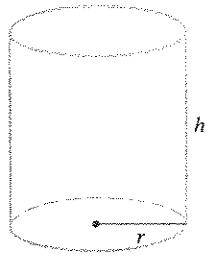


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

SOLUÇÃO Fazemos o diagrama como na Figura 3, onde r é o raio e h, a altura (ambos em centímetros). A fim de minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lados). Da Figura 4 vemos que os lados são feitos de uma folha retangular com dimensões $2\pi r$ e h. Logo a área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

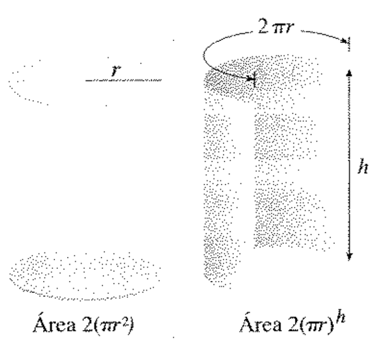


FIGURA 4

Para eliminar h usamos o fato de que o volume é dado como 1 l, que é igual a 1.000 cm^3. Assim

que nos fornece $h = 1.000/(\pi r^2)$. Substituindo para A temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1.000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r} \qquad r > 0$$

Para achar os números críticos, diferenciamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2.000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

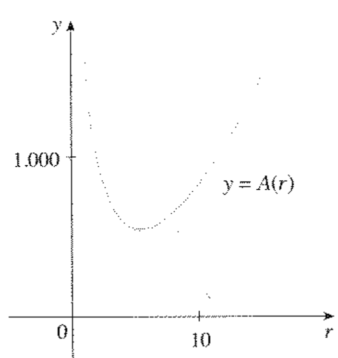


FIGURA 5

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Uma vez que o domínio de A é $(0, \infty)$, não podemos usar o argumento do Exemplo 1 relativo aos extremos. Mas podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, portanto, A está decrescendo para *todo* r à esquerda do número crítico e crescendo para *todo* r à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve originar um mínimo *absoluto*.

[Alternativamente poderíamos argumentar que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$; portanto, deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no número crítico. Veja a Figura 5.]

O valor h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2} = \frac{1.000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e a altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro.

Ainda neste capítulo, no Projeto Aplicado da página 341, examinaremos a forma mais econômica para uma lata levando em conta os outros custos de fabricação.

NOTA 1 O argumento usado no Exemplo 2 para justificar o mínimo absoluto é uma variação do Teste da Derivada Primeira (que se aplica tão-somente para os valores máximo e mínimo *locais*) e será enunciado aqui para as futuras referências.

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é um valor máximo absoluto de f.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é um valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Um método alternativo para resolver os problemas de otimização é usar a diferenciação implícita. Para ilustrar esse método vamos examinar novamente o Exemplo 2. Vamos nos utilizar das mesmas equações

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

mas, em vez de eliminarmos h, diferenciaremos implicitamente ambos os membros em relação a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

O mínimo ocorre em um número crítico; assim, fazemos $A' = 0$, simplificamos e chegamos até as equações

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

e uma subtração nos fornece $2r - h = 0$ ou $h = 2r$.

EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

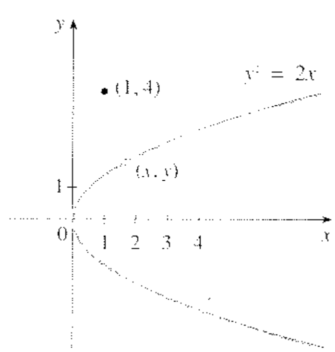


FIGURA 6

SOLUÇÃO A distância entre os pontos $(1, 4)$ e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

(veja a Figura 6). Mas como o ponto (x, y) está sobre a parábola, então $x = y^2/2$; logo, a expressão para d fica

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2}$$

(Uma forma alternativa seria substituir $y = \sqrt{2x}$ para obter d em termos só de x.) Em vez de d minimizamos seu quadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2$$

(Você deve se convencer de que os mínimos de d e d^2 ocorrem no mesmo ponto mínimo de d^2, porém este último é mais fácil de ser trabalhado.) Diferenciando obtemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

portanto, $f'(y) = 0$ quando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ quando $y < 2$ e $f'(y) > 0$ quando $y > 2$; logo, pelo Teste da Derivada Primeira para os Valores Extremos Absolutos, o mínimo absoluto ocorre quando $y = 2$. (Ou ainda poderíamos simplesmente dizer que, dada a natureza geométrica do problema, é óbvio que existe um ponto mais próximo, mas não existe um ponto mais distante.) O valor correspondente de x é $x = y^2/2 = 2$. Assim, o ponto sobre $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$ é $(2, 2)$.

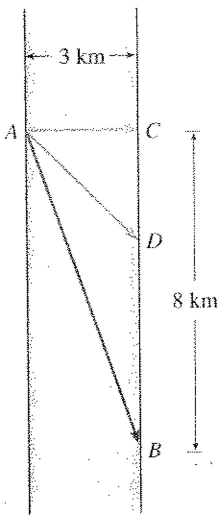


FIGURA 7

EXEMPLO 4 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura 7). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar por algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)

SOLUÇÃO Se chamarmos de x a distância de C a D, então a distância a ser percorrida será $|DB| = 8 - x$, e o Teorema de Pitágoras dará a distância remada como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Usamos a equação

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$$

Então o tempo gasto remando é $\sqrt{x^2 + 9}/6$ enquanto o tempo gasto andando é $(8 - x)/8$. Assim, o tempo total T como uma função de x é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

O domínio dessa função T é $[0, 8]$. Note que, se $x = 0$, ele rema para C, e se $x = 8$, ele rema diretamente para B. A derivada de T é

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Assim, usando o fato de que $x \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \quad \iff \quad 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\iff \quad 16x^2 = 9(x^2 + 9) \quad \iff \quad 7x^2 = 81 \\ &\iff \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

O único número crítico é $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver se o mínimo ocorre nesse número crítico ou nos extremos do domínio $[0, 8]$, calculamos T em todos os três pontos:

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42$$

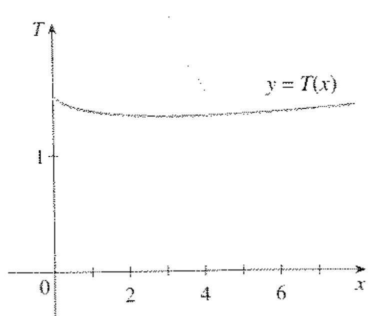


FIGURA 8

Uma vez que o menor desses valores T ocorre quando $x = 9/\sqrt{7}$, o valor mínimo absoluto de T deve ocorrer lá. A Figura 8 ilustra esse cálculo mostrando o gráfico de T.

Dessa forma, um homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3,4 km) rio abaixo a partir do início.

EXEMPLO 5 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

SOLUÇÃO 1 Vamos considerar o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Então a palavra *inscrito* significa que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois vértices sobre o eixo x, conforme mostra a Figura 9.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. E então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

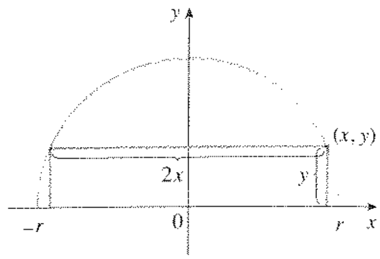


FIGURA 9

Para eliminar y usamos o fato de que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leqslant x \leqslant r$. Sua derivada é

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que é zero quando $2x^2 = r^2$, isto é, $x = r/\sqrt{2}$ (uma vez que $x \geqslant 0$). Esse valor de x dá um valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

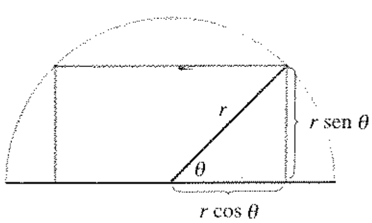


FIGURA 10

SOLUÇÃO 2 Uma solução mais simples é possível quando usamos um ângulo como uma variável. Seja θ o ângulo mostrado na Figura 10. Então a área do retângulo é

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) = r^2\mathrm{sen}\,2\theta$$

Sabemos que $\mathrm{sen}\,2\theta$ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Note que essa solução trigonométrica não envolve diferenciação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui.

4.7 Exercícios

1. Encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja um máximo.

(a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro Número	Segundo Número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

(b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja o menor possível.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja a menor possível.

4. Encontre um número positivo tal que a soma do número e seu recíproco sejam tão pequenos quanto possível.

5. Encontre as dimensões de um retângulo com um perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

6. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

7. Um fazendeiro com 750 pés de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?
   (a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.
   (b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
   (c) Escreva uma expressão para a área total.
   (d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
   (e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.
   (f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

8. Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 pés de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.
   (a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas pequenas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.
   (b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza a notação e marque no diagrama seus símbolos.
   (c) Escreva uma expressão para o volume.
   (d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
   (e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.
   (f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

9. Um fazendeiro quer cercar uma área de 1,5 milhão de pés quadrados em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

10. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem um volume de 32.000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

11. Se 1.200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

12. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa \$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

13. Faça o Exercício 12 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

14. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma área dada, aquele com um menor perímetro é um quadrado.
   (b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

15. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

16. Encontre o ponto sobre a reta $6x + y = 9$ que está mais próximo do ponto $(-3, 1)$.

17. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distante do ponto $(1, 0)$.

18. Encontre, correta até a segunda casa decimal, as coodernadas do ponto na curva $y = \operatorname{tg} x$ que está mais próximo do ponto $(1, 1)$.

19. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

20. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

21. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo eqüilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

22. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 8 - x^2$.

23. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

24. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

25. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior valor possível desse cilindro.

26. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

27. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área superficial possível para esse cilindro.

28. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. (Veja o Exercício 52 na página 24.) Se o perímetro da janela for 30 pés, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

29. As bordas de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as bordas laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

30. Um pôster deve ter uma área de 180 pol^2 com uma borda de 1 polegada na base e nos lados, e uma borda de 2 polegadas em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

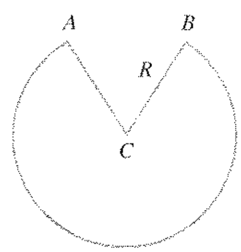
31. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo eqüilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada: (a) um máximo? (b) um mínimo?

32. Responda o Exercício 31 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

33. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm³ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

34. Uma cerca de 8 pés de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 4 pés do edifício. Qual o comprimento da menor escada que vai atingir do chão, por cima da cerca, à parede do prédio?

35. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



36. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm³ de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

37. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

38. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u $(u < v)$, então o tempo requerido para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a uma distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Nota: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

39. Em uma colméia, cada célula é um prisma hexagonal regular, aberto no extremo com um ângulo triédrico no outro extremo. Acredita-se que as abelhas formam essas células de forma a minimizar a área superficial para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame dessas células mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria da célula, pode ser mostrado que a área superficial S é dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg} \theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right) \operatorname{cossec} \theta$$

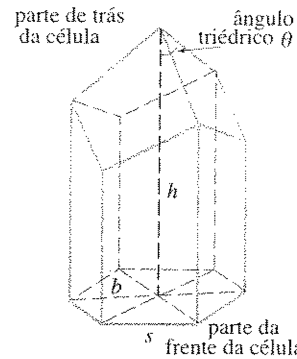
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo deveriam preferir as abelhas?

(c) Determine a área superficial mínima da célula (em termos de s e h).

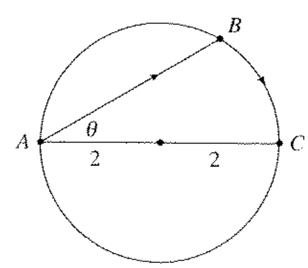
Nota: Medidas reais do ângulo θ em colméias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais do que 2°.



40. Um bote deixa uma doca às 2 horas da tarde e viaja na direção sul a uma velocidade de 20 km/h. Outro bote largou na frente em direção a leste a 15 km/h e atingiu a mesma doca às 3 horas da tarde. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

41. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

42. Uma mulher em um ponto A na praia de lago circular com raio 2 mi quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 4 mi/h e remar um bote a 2 mi/h. Como ela deve proceder?



43. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 10 pés de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

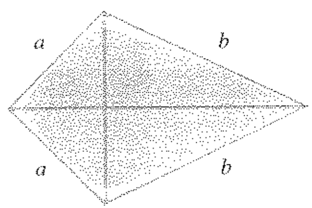
44. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e que corta fora a menor área do primeiro quadrante.

45. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento da reta que pertence ao primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

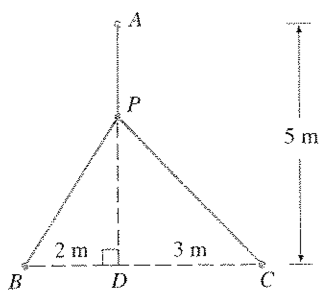
46. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

47. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é eqüilátero.

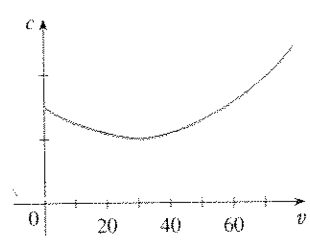
48. A moldura para uma pipa é feita de seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



49. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo.



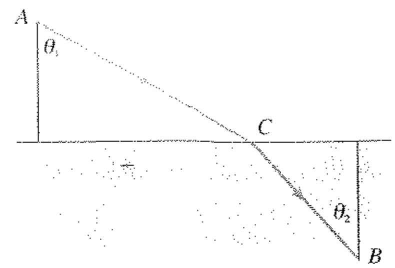
50. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido por galões/hora) como uma função da velocidade v do carro. A baixa velocidade o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas a uma alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 30$ mi/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em galões/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em galões *por milha*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando um gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



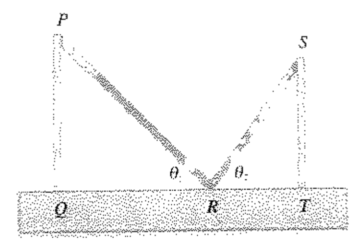
51. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

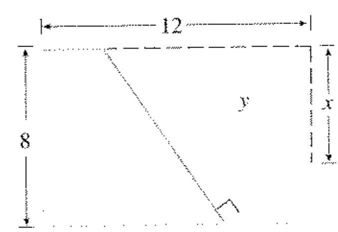
onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.



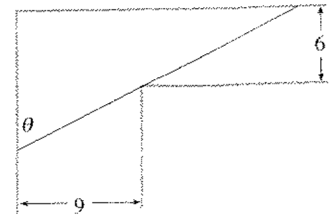
52. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



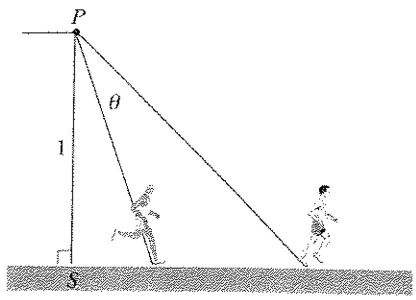
53. O canto superior direito de um pedaço de papel com 8 polegadas de largura por 12 polegadas de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



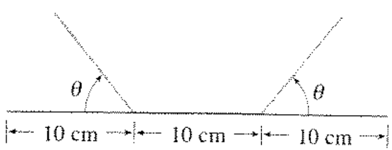
54. Um cano de metal está sendo carregado através de uma passagem com 9 pés de largura. No fim da parede há uma curva em ângulo reto, passando-se para uma passagem com 6 pés de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



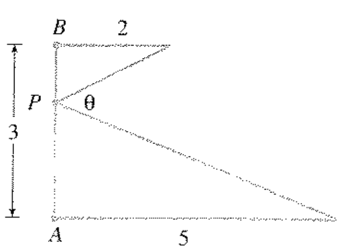
55. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Sugestão*: Maximize tg θ.]



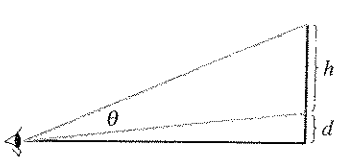
56. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



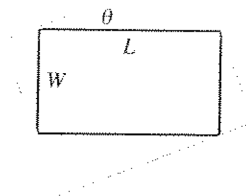
57. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?



58. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)



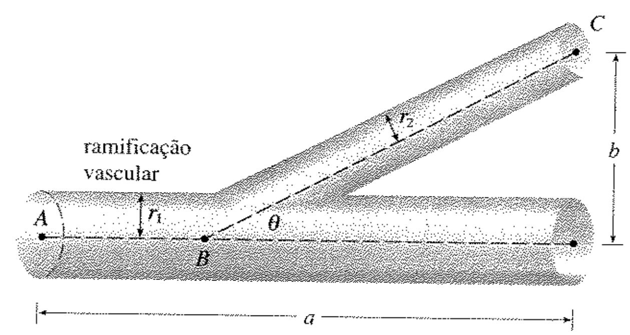
59. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W.



60. O sistema vascular sangüíneo consiste em vasos sangüíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sangüíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei, mas ela também segue da Equação 8.4.2.) A figura mostra o vaso sangüíneo principal com raio r_1 ramificando a um ângulo θ em um vaso menor com raio r_2.



(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é

$$R = C\left(\frac{a - b\operatorname{cotg}\theta}{r_1^4} + \frac{b\operatorname{cossec}\theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

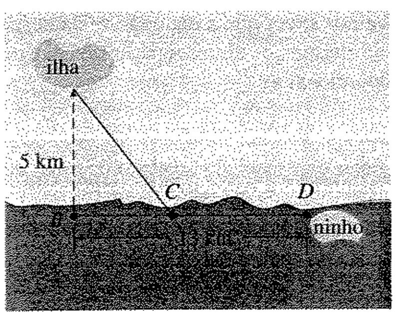
(b) Prove que essa resistência é minimizada quando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (correto até o grau mais próximo) quando o raio do vaso sangüíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.

61. Os ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar vôos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é requerida mais energia para voar sobre a água que sobre a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e cai sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está 5 km do ponto mais próximo B sobre uma praia reta, voa para um ponto C na praia e então voa ao longo da praia para a área D, seu ninho. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos B e D distanciam 13 km um do outro.

(a) Em geral, é necessário 1,4 vez mais energia para voar sobre a água que sobre a terra. Para que ponto C o pássaro deve voar a fim de minimizar a energia total despendida ao retornar para seu ninho?



(b) Seja W e L a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado em termos do vôo do pássaro de grandes valores da razão W/L? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão W/L correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

(c) Qual deveria ser o valor de W/L a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho D? Qual deveria ser o valor de W/L para o pássaro voar para B e então seguir ao longo da praia para D?

(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de uma certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de B, quantas vezes mais energia será despendida pelo pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?

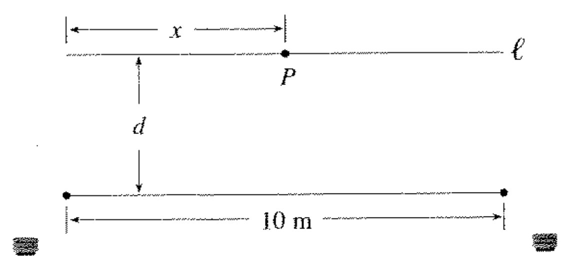
62. Duas fontes de luz de igual potência estão colocadas 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto P sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz a uma distância d metros dela (veja a figura). Queremos localizar P em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto P.

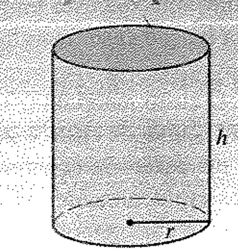
(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando P está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

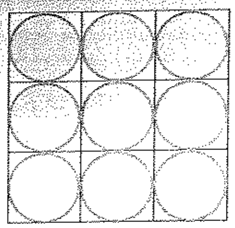
(d) Em algum ponto entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de d no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de d por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de d.



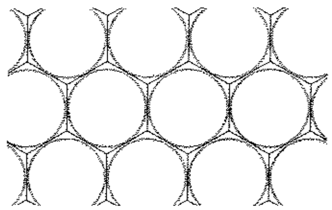
Projeto Aplicado — A Forma da Lata



Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como significando de que o volume V de uma lata cilíndrica é dado e precisamos achar a altura h e o raio r que minimize o custo do metal para fazer a lata (veja a figura). Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema será minimizar a área superficial do cilindro. Resolvemos esse problema no Exemplo 2 da Seção 4.7 e descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você for para seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se você pode explicar esse fenômeno.



Discos cortados a partir de quadrados



Discos cortados a partir de hexágonos

1. O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados dobrando-se os retângulos; esses retângulos são cortados da folha com uma pequena ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (como na figura), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, porém tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$$

2. Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura). Mostre que se for adotada essa estratégia, então

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2{,}21$$

3. Os valores de h/r que encontramos nos Problemas 1 e 2 estão muito perto daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que r, que são dobrados sobre as laterais da lata. Se levarmos em conta isso, deveremos aumentar h/r. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em juntar os lados para formar as latas. Se cortarmos os discos a partir de hexágonos, como no Problema 2, então o custo total será proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

onde k é o recíproco do comprimento que pode ser associado ao custo de uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Desenhe $\sqrt[3]{V}/k$ como uma função de $x = h/r$ e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, podemos fazer h/r aproximadamente 2,21 (como no Problema 2). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara, h/r deve ser substancialmente maior.

5. Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é geralmente verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?

4.8 Aplicações em Economia

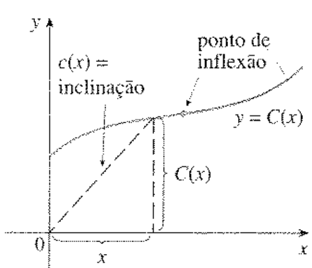


FIGURA 1 Função custo

Na Seção 3.3 introduzimos a idéia de custo marginal. Lembre-se de que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de um certo produto, então o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função custo.

O gráfico da função custo típico está mostrado na Figura 1. O custo marginal $C'(x)$ é a inclinação da tangente à curva de custo em $(x, C(x))$. Note que a curva de custo é inicialmente côncava para baixo (o custo marginal é decrescente) em razão da economia de escala (o uso mais eficiente de custos fixos de produção). Mas eventualmente existe um ponto de inflexão, e a curva de custo torna-se côncava para cima (o custo marginal é crescente), talvez em virtude dos custos de horas extras ou das ineficiências de uma operação de larga escala.

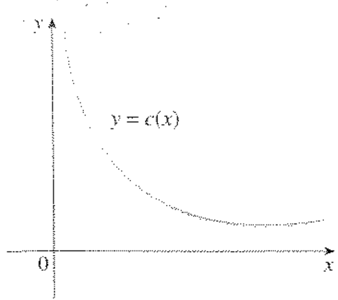


FIGURA 2
Função custo médio

A função custo médio

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} \tag{1}$$

representa o custo por unidade quando x unidades são produzidas. Esboçamos uma função custo médio típica na Figura 2, notando que $C(x)/x$ é a inclinação da reta que liga a origem ao ponto $(x, C(x))$ na Figura 1. É aparente que deve existir um mínimo absoluto. Para encontrá-lo localizamos o ponto crítico de c usando a Regra do Quociente para diferenciar a Equação 1:

$$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Como $c'(x) = 0$, então $xC'(x) - C(x) = 0$, e temos

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$$

Portanto:

> Se o custo médio for mínimo, então
> custo marginal = custo médio

Esse princípio é plausível, pois se o nosso custo marginal for menor que o nosso custo médio, então deveremos produzir mais e abaixando assim o nosso custo médio. Da mesma forma, se nosso custo marginal for maior que nosso custo médio, então deveremos produzir menos, a fim de abaixar o nosso custo médio.

□ Veja o Exemplo 8 na Seção 3.3 para uma explicação de por que é razoável modelar a função custo por um polinômio.

EXEMPLO 1 □ Uma companhia estima que o custo (em dólares) na produção de x itens é $C(x) = 2.600 + 2x + 0{,}001x^2$.
(a) Encontre o custo, o custo médio e o custo marginal da produção de 1.000, 2.000 e 3.000 itens.
(b) A que nível de produção será mais baixo o custo médio? Qual o custo médio mínimo?

SOLUÇÃO
(a) A função custo médio é

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2.600}{x} + 2 + 0{,}001x$$

A função custo marginal é

$$C'(x) = 2 + 0{,}002x$$

Usamos essas expressões para fazer a tabela a seguir, dando o custo, o custo médio e o custo marginal (em dólares ou dólares por item, arredondados até o centavo mais próximo).

x	$C(x)$	$c(x)$	$C'(x)$
1.000	5.600,00	5,60	4,00
2.000	10.600,00	5,30	6,00
3.000	17.600,00	5,87	8,00

(b) Para minimizar o custo médio devemos ter

$$\text{custo marginal} = \text{custo médio}$$

$$C'(x) = c(x)$$

$$2 + 0{,}002x = \frac{2.600}{x} + 2 + 0{,}001x$$

Essa equação simplifica-se para

$$0{,}001x = \frac{2.600}{x}$$

logo $$x^2 = \frac{2.600}{0{,}001} = 2.600.000$$

e $$x = \sqrt{2.600.000} \approx 1.612$$

Para ver que esse nível de produção realmente dá o mínimo, notamos que $c''(x) = 5.200/x^3 > 0$, portanto c é côncava para cima em todo seu domínio. O custo médio mínimo é

$$c(1.612) = \frac{2.600}{1.612} + 2 + 0{,}001(1.612) = \$\ 5{,}22/\text{item}$$

▭ A Figura 3 mostra os gráficos da função custo marginal C' e da função custo médio c do Exemplo 1. Observe que c tem seu valor mínimo quando os dois gráficos se interceptam.

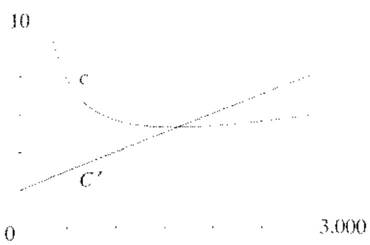


FIGURA 3

Vamos considerar agora o mercado. Seja $p(x)$ o preço por unidade que uma companhia pode cobrar se ela vende x unidades. Então p é chamado **função demanda** (ou **função preço**), e esperamos que ela seja uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então o rendimento total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é denominada **função rendimento** (ou **função venda**). A derivada R' da função rendimento é conhecida como **função rendimento marginal**, e é a taxa de variação do rendimento em relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é dita **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro. Para maximizar o lucro procuramos por números críticos de P, isto é, os números onde o lucro marginal é zero. Mas se

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

então $$R'(x) = C'(x)$$

Portanto:

Se o lucro for máximo, então rendimento marginal = custo marginal

Para garantir que essa condição fornece o máximo, podemos usar o Teste da Derivada Segunda. Note que

$$P''(x) = R''(x) - C''(x) < 0$$

quando $$R''(x) < C''(x)$$

e essa condição afirma que a taxa de crescimento do rendimento marginal é menor que a taxa de crescimento do custo marginal. Assim, o lucro será o máximo quando

$$R'(x) = C'(x) \qquad \text{e} \qquad R''(x) < C''(x)$$

EXEMPLO 2 Determine o nível de produção que maximizará o lucro para uma companhia com funções custo e demanda:

$$C(x) = 84 + 1{,}26x - 0{,}01x^2 + 0{,}00007x^3 \qquad \text{e} \qquad p(x) = 3{,}5 - 0{,}01x$$

SOLUÇÃO A função rendimento é

$$R(x) = xp(x) = 3{,}5x - 0{,}01x^2$$

logo, a função rendimento marginal é

$$R'(x) = 3{,}5 - 0{,}02x$$

e a função custo marginal é

$$C'(x) = 1{,}26 - 0{,}02x + 0{,}00021x^2$$

Dessa forma, o rendimento marginal é igual ao custo marginal quando

$$3{,}5 - 0{,}02x = 1{,}26 - 0{,}02x + 0{,}00021x^2$$

Resolvendo, obtemos

$$x = \sqrt{\frac{2{,}24}{0{,}00021}} \approx 103$$

Para verificar que isso fornece um máximo, computamos as derivadas segundas:

$$R''(x) = -0{,}02 \qquad C''(x) = -0{,}02 + 0{,}00042x$$

Assim, $R''(x) < C''(x)$ para todo $x > 0$. Portanto o nível de produção de 103 unidades maximizará o lucro.

A Figura 4 mostra os gráficos das funções rendimento e custo do Exemplo 2. A companhia lucra quando $R > C$ e o lucro é o máximo quando $x \approx 103$. Note que as curvas têm tangentes paralelas nesse nível de produção, pois o rendimento marginal é igual ao custo marginal.

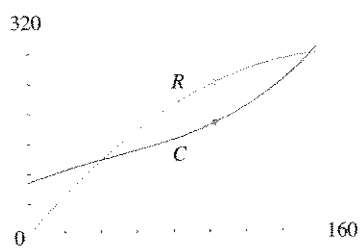


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Uma loja vende 200 aparelhos de DVD por semana, a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada abatimento de \$ 10 oferecido aos compradores, o número de aparelhos vendidos aumenta em 20 por semana. Encontre as funções de demanda e de rendimento. Qual deve ser o abatimento oferecido pela loja para maximizar seu rendimento?

SOLUÇÃO Seja x o número de aparelhos de DVD vendidos por semana. Então o crescimento semanal em vendas é $x - 200$. Para cada aumento de 20 aparelhos vendidos, o preço decresce em \$ 10. Logo, para cada aparelho adicional vendido o decréscimo no preço será de $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda é

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função rendimento é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Uma vez que $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Esse valor de x dá o máximo absoluto pelo Teste da Derivada Primeira (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que se abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o abatimento é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar o rendimento, a loja deve oferecer um abatimento de \$ 125.

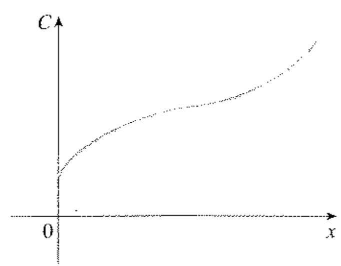
4.8 Exercícios

1. Um fabricante mantém registros precisos do custo $C(x)$ da produção de x itens e obtém o gráfico da função custo mostrado na figura.

(a) Explique por que $C(0) > 0$.

(b) Qual a significância do ponto de inflexão?

(c) Use o gráfico de C para esboçar o gráfico da função custo marginal.

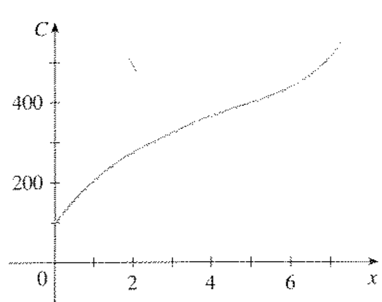


2. É dado o gráfico da função C custo.

(a) Faça um esboço cuidadoso da função custo marginal.

(b) Use a interpretação geométrica de custo médio $c(x)$ como uma inclinação (veja a Figura 1) para fazer um esboço cuidadoso da função custo médio.

(c) Estime o valor de x para o qual $c(x)$ é um mínimo. Como estão relacionados os custos médio e marginal naquele valor de x?



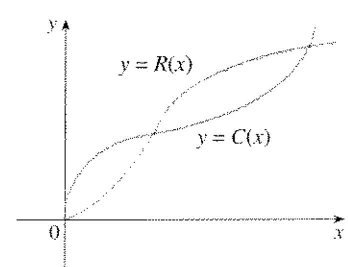
3. O custo médio da produção de x unidades de uma mercadoria $c(x) = 21{,}4 - 0{,}002x$. Encontre o custo marginal em um nível de produção de 1.000 unidades. Em termos práticos, qual o significado de sua resposta?

4. A figura mostra os gráficos das funções custo e rendimento registrados por um fabricante.

(a) Identifique sobre o gráfico o valor de x para o qual o lucro é maximizado.

(b) Esboce o gráfico da função lucro.

(c) Esboce o gráfico da função lucro marginal.



5–8 Para cada função custo (dada em dólares), encontre (a) o custo, o custo médio e o custo marginal a um nível de produção de 1.000 unidades; (b) o nível de produção que vai minimizar o custo médio; e (c) o custo médio mínimo.

5. $C(x) = 40.000 + 300x + x^2$

6. $C(x) = 25.000 + 120x + 0{,}1x^2$

7. $C(x) = 16.000 + 200x + 4x^{3/2}$

8. $C(x) = 10.000 + 340x - 0{,}3x^2 + 0{,}0001x^3$

9–10 Uma função custo é dada.

(a) Encontre as funções custo médio e custo marginal.

(b) Use os gráficos das funções na parte (a) para estimar o nível de produção que minimize o custo médio.

(c) Use o cálculo para encontrar o custo médio mínimo.

(d) Encontre o valor mínimo do custo marginal.

9. $C(x) = 3.700 + 5x - 0{,}04x^2 + 0{,}0003x^3$

10. $C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$

11–14 Para as funções custo e demanda dadas, encontre o nível de produção que maximizará o lucro.

11. $C(x) = 680 + 4x + 0{,}01x^2$, $p(x) = 12$

12. $C(x) = 680 + 4x + 0{,}01x^2$, $p(x) = 12 - x/500$

13. $C(x) = 1.450 + 36x - x^2 + 0{,}001x^3$, $p(x) = 60 - 0{,}01x$

14. $C(x) = 16.000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$, $p(x) = 1.700 - 7x$

15–16 Encontre o nível de produção no qual a função custo marginal começa a crescer.

15. $C(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 6x + 900$

16. $C(x) = 0{,}0002x^3 - 0{,}25x^2 + 4x + 1.500$

17. O custo, em dólares, da produção de x jardas de um certo tecido é $C(x) = 1.200 + 12x - 0{,}1x^2 + 0{,}0005x^3$ e a companhia descobre que se vender as x jardas ela poderá cobrar $p(x) = 29 - 0{,}00021x$ dólares por jarda do tecido.

(a) Faça o gráfico das'funções custo e rendimento e use-os para estimar o nível de produção para o lucro máximo.

(b) Use o cálculo para encontrar o nível de produção para o lucro máximo.

18. Um fabricante de aviões quer determinar o melhor preço de venda para um novo produto. A companhia estima que o custo inicial de planejamento do avião e montagem das fábricas nas quais ele será produzido será de 500 milhões de dólares. O custo adicional de fabricação de cada avião pode ser modelado pela função $m(x) = 20x - 5x^{3/4} + 0{,}01x^2$, onde x é o número de aparelhos produzidos e m, o custo de fabricação em milhões de dólares. A companhia estima que se cobrar um preço p em milhões de dólares para cada avião, ela será capaz de vender $x(p) = 320 - 7{,}7p$ aviões.

(a) Encontre as funções custo, demanda e rendimento.

(b) Encontre o nível de produção e o preço de venda associado do avião que maximiza o lucro.

19. Um time de beisebol joga em um estádio com uma capacidade para 55 mil espectadores. Cobrando \$ 10 a entrada, a freqüência média era de 27 mil espectadores. Quando o preço das entradas foi reduzido para \$ 8, a freqüência média subiu para 33 mil.

(a) Encontre a função de demanda supondo que ela é linear.

(b) Qual deve ser o preço da entrada para maximizar o rendimento?

20. Durante os meses de verão Ana faz e vende colares na praia. No último verão ela vendeu colares a \$ 10 cada, e sua venda média foi de 20 colares por dia. Quando subiu o preço em \$ 1, Ana passou a perder duas vendas por dia.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela é linear.

(b) Se o material para cada colar custa \$ 6, qual deve ser o preço de venda para maximizar o lucro?

21. Um fabricante vende 1.000 aparelhos de televisão por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada abatimento de \$ 10 oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta em 100 por semana.

(a) Encontre a função demanda.

(b) Qual deve ser o abatimento oferecido a fim de maximizar o rendimento?

(c) Se a função custo semanal for de $C(x) = 68.000 + 150x$, como deve ser estabelecido o montante do abatimento a fim de maximizar o lucro?

22. Um administrador de um complexo de 100 apartamentos sabe por experiência que todas as unidades serão ocupadas se ele cobrar \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional ficará desocupada para cada aumento de \$ 10 no aluguel. Que aluguel deve cobrar o administrador para maximizar o rendimento?

23. Gerentes de lojas querem uma política de estoque ótima. Excesso de estoque resulta em armazenagem excessiva e custos de estoque, enquanto que um estoque pequeno significa adicionar custo à reorganização e entrega. Um gerente de um supermercado estima que um total de 800 pacotes de sopa serão vendidos a uma taxa constante durante o próximo ano e o custo de estoque será de \$ 4 para armazenar um pacote por ano. Se o gerente fizer vários pedidos por ano, cada um consistindo de x pacotes, então ele terá uma média de $1/2x$ pacotes em estoque no ano e assim os custos de armazenagem para o ano são $(1/2x) \cdot 4 = 2x$ dólares. Ele também estima que o custo de manuseio para cada entrega é de \$100,00. Qual é a quantidade ótima a ser feita em cada pedido de tal forma a minimizar o custo total?

24. Suponha que uma pessoa tem uma quantidade A de dinheiro depositada todo mês em sua poupança, que rende juros a uma taxa mensal R. Assuma que ela gaste o dinheiro todo ao longo do mês a uma taxa constante. Quando ela retira dinheiro da poupança, ela tem um custo de transação T (uma combinação de taxas bancárias e custo de seu tempo). Ela nunca economiza dinheiro fazendo poucas retiradas, mas, quanto mais dinheiro ela deixa na conta mais juros ela ganha. Suponha que ela faça n retiradas de uma mesma quantia durante o mês. Então seu saldo médio é $A/(2n)$. (Por quê?) Ache o valor de n que minimiza o custo total (custo da transação bancária e juros perdidos), e então mostre que o saldo médio ótimo será de AT/(2R).

4.9 Método de Newton

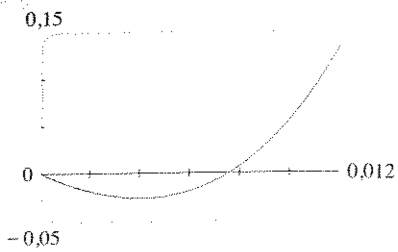


FIGURA 1

▭ Tentamos resolver a Equação 1 usando o Método Numérico de encontrar raízes de sua calculadora ou computador. Algumas máquinas não são capazes de resolvê-la. Outras têm sucesso, mas requerem que você especifique um ponto inicial para a pesquisa.

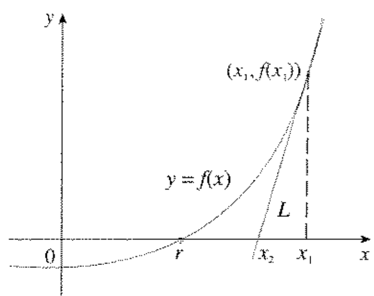


FIGURA 2

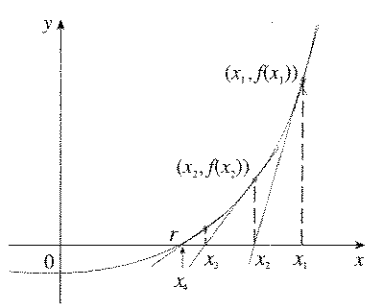


FIGURA 3

Suponha que um vendedor de carro ponha um carro à venda por \$ 18.000, ou em pagamentos de \$ 375 por mês durante cinco anos. Você gostaria de saber qual a taxa de juros mensal que o vendedor de fato está obrando. Para encontrar a resposta você deve resolver a equação

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0 \tag{1}$$

(Os detalhes são fornecidos no Exercício 41.) Como você resolveria essa equação?

Para uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ existe uma fórmula bem conhecida para as raízes. Para as equações de terceiro e quarto grau também existem fórmulas para as raízes, mas elas são extremamente complicadas. Se f for um polinômio de grau 5 ou maior, não existe nenhuma fórmula (veja nota na página 230). Da mesma forma, não existe uma fórmula que nos possibilite encontrar as raízes exatas de uma equação transcendental como $\cos x = x$.

Podemos encontrar uma solução *aproximada* para a Equação 1 desenhando o lado esquerdo da equação. Usando um recurso computacional, e após experimentar com janela de inspeção, obtemos o gráfico na Figura 1.

Vemos que, além da solução $x = 0$ (que não nos interessa), existe uma solução entre 0,007 e 0,008. Dando um *zoom* obtemos que a raiz é aproximadamente 0,0076. Se precisarmos de maior precisão, poderemos dar repetidos *zooms*, mas isso se torna entediante. Uma alternativa mais rápida é usar um método numérico de encontrar raízes em uma calculadora ou um CAS. Se fizermos isso, encontraremos que a raiz correta, até a nona casa decimal, é 0,007628603.

Como funcionam esses métodos numéricos de encontrar raízes? É usada uma variedade de métodos, mas a maior parte das calculadoras ou CAS usa o **método de Newton**, também denominado **método de Newton–Raphson**. Vamos explicar agora como funciona esse método, parcialmente para mostrar o que acontece dentro de uma calculadora ou computador, e parcialmente como uma aplicação da idéia de aproximação linear.

A geometria por trás do método de Newton está mostrada na Figura 2, onde a raiz que tentamos encontrar é chamada r. Começamos com uma primeira aproximação x_1, que é obtida por conjectura, ou de um esboço do gráfico de f, ou de um gráfico gerado no computador de f. Considere a reta tangente L à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Olhando o intercepto x de L, vamos denominá-lo x_2. A idéia por trás do método de Newton é que a reta tangente fica próxima da curva; assim, o intercepto x, x_2, está próximo do intercepto x da curva (isto é, a raiz r que estamos procurando). Como a tangente é uma reta, podemos facilmente encontrar seu intercepto x.

Para encontrar uma fórmula para x_2 em termos de x_1 usamos o fato de que a inclinação de L é $f'(x_1)$; assim, sua equação é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Uma vez que o intercepto x de L é x_2, fazemos $y = 0$ e obtemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, podemos resolver essa equação para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Usamos x_2 como a segunda aproximação de r.

A seguir repetimos o procedimento com x_1 substituído por x_2, usando a reta tangente em $(x_2, f(x_2))$. Isso dá uma terceira aproximação:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

□ Veremos mais sobre seqüências na Seção 11.1 do Volume II.

Se ficarmos repetindo esse processo, obteremos uma seqüência de aproximações $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ conforme mostra a Figura 3. Em geral, se x_n for a n-ésima aproximação e x_n e $f'(x_n) \neq 0$, então a aproximação seguinte é dada por

$$\boxed{2} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Se os números x_n ficam cada vez mais próximos de r à medida que n cresce, dizemos que a seqüência *converge* para r e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

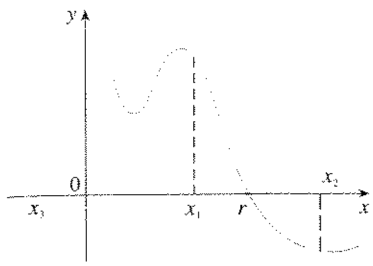


FIGURA 4

Embora a seqüência de aproximações sucessivas convirja para a raiz desejada no caso das funções do tipo ilustrado na Figura 3, em certas circunstâncias a seqüência pode não convergir. Por exemplo, considere a situação mostrada na Figura 4. Você pode ver que x_2 é uma aproximação pior que x_1. Esse é provavelmente o caso quando $f'(x_1)$ está próximo de 0. Pode até acontecer de uma aproximação (tal como x_3 na Figura 4) cair fora do domínio de f. Então o Método de Newton falha e uma melhor aproximação inicial x_1 deve ser escolhida. Veja os Exercícios 31–34 para os exemplos específicos nos quais o método de Newton funciona muito lentamente ou não funciona.

EXEMPLO 1 □ Começando com $x_1 = 2$, encontre a terceira aproximação x_3 para a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUÇÃO Vamos aplicar o método de Newton com

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

O próprio Newton usou essa equação para ilustrar seu método, e escolheu $x_1 = 2$ após alguns experimentos, pois $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ e $f(3) = 16$. A Equação 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

□ A Figura 5 mostra a geometria atrás do primeiro passo do Método de Newton para o Exemplo 1. Como $f'(2) = 10$, a reta tangente a $y = x^3 - 2x - 5$ em $(2, -1)$ tem equação igual a $y = 10x - 21$ cujo zero está em $x_2 = 2{,}1$.

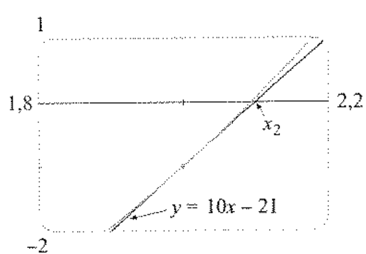


FIGURA 5

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2{,}1$$

Então com $n = 2$, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2{,}1 - \frac{(2{,}1)^3 - 2(2{,}1) - 5}{3(2{,}1)^2 - 2} \approx 2{,}0946$$

Resulta que essa terceira aproximação $x_3 \approx 2{,}0946$ é precisa até quatro casas decimais.

Suponha que iremos obter uma dada precisão, digamos de oito casas decimais, empregando o método de Newton. Como saber quando devemos parar? O procedimento experimental geralmente usado é que devemos parar quando duas aproximações sucessivas x_n e x_{n+1} são iguais até a oitava casa decimal. (Um enunciado preciso a respeito da exatidão do método de Newton será dado no Exercício 11.12.)

Observe que o procedimento para ir de n para $n + 1$ é o mesmo para todos os valores de n. (Isso é chamado um processo *iterativo*.) Isso significa que o método de Newton é particularmente adequado ao uso de calculadoras programáveis ou de um computador.

EXEMPLO 2 Use o método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ correta até a oitava casa decimal.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a determinar a raiz positiva da equação

$$x^6 - 2 = 0$$

dessa forma, tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Então $f'(x) = 6x^5$, e a Fórmula 2 (método de Newton) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Se escolhermos $x_1 = 1$ como a aproximação inicial, então obtemos

$$x_2 \approx 1{,}16666667$$
$$x_3 \approx 1{,}12644368$$
$$x_4 \approx 1{,}12249707$$
$$x_5 \approx 1{,}12246205$$
$$x_6 \approx 1{,}12246205$$

Uma vez que x_5 e x_6 são iguais até a oitava casa decimal, concluímos

$$\sqrt[6]{2} \approx 1{,}12246205$$

até a oitava casa decimal.

EXEMPLO 3 Encontre a raiz da equação $\cos x = x$, correta até a sexta casa decimal.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação na fórmula-padrão:

$$\cos x - x = 0$$

Portanto, fazemos $f(x) = \cos x - x$. Então $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, e assim a Fórmula 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

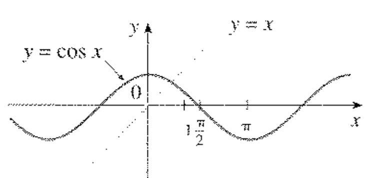


FIGURA 6

A fim de determinar um valor adequado para x_1 esboçamos o gráfico de $y = \cos x$ e $y = x$ na Figura 6. É evidente que elas se interceptam em um ponto cuja coordenada x é um pouco menor que 1; dessa forma, vamos tomar $x_1 = 1$ como uma primeira aproximação conveniente. Então, lembrando de colocar nossa calculadora no modo radiano, obtemos

$$x_2 \approx 0{,}75036387$$
$$x_3 \approx 0{,}73911289$$
$$x_4 \approx 0{,}73908513$$
$$x_5 \approx 0{,}73908513$$

Como x_4 e x_5 são iguais até a sexta casa decimal (na realidade, oitava), concluímos que a raiz da equação, correta até a sexta casa decimal, é 0,739085.

Em vez de usar o esboço da Figura 6 para obter a aproximação inicial para o método de Newton no Exemplo 3, poderíamos ter usado um gráfico mais apurado fornecido por calculadora ou computador. A Figura 7 sugere o uso de $x_1 = 0{,}75$ como a aproximação inicial.

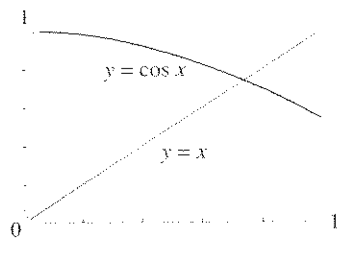


FIGURA 7

Então o método de Newton dá

$$x_2 \approx 0{,}73911114$$
$$x_3 \approx 0{,}73908513$$
$$x_4 \approx 0{,}73908513$$

e assim obtemos a mesma resposta anterior, mas com um número menor de passagens.

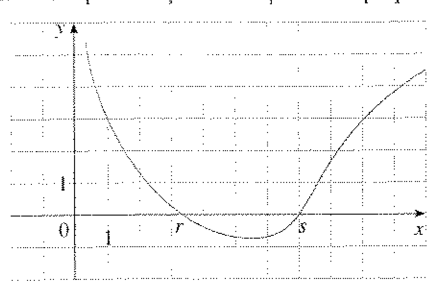
Você deve estar se perguntando por que estamos preocupados se o método de Newton está disponível como recurso computacional. Não é mais fácil dar repetidos *zooms* para encontrar as raízes como fizemos na Seção 1.4? Se somente for pedida uma precisão de uma ou duas casas decimais, então realmente o método de Newton é inadequado, e basta um recurso computacional. Mas se forem exigidas seis ou oito casas decimais, então repetidos *zooms* tornam-se entediantes. Em geral é mais rápido usar o recurso computacional para começar e o método de Newton para acabar.

4.9 Exercícios

1. A figura mostra o gráfico da função f. Suponha que seja usado o método de Newton para aproximar a raiz r da equação $f(x) = 0$ com $x_1 = 1$ como aproximação inicial.

(a) Trace as retas tangentes que foram usadas para encontrar x_2 e x_3 e estime os valores numéricos de x_2 e x_3.

(b) Uma melhor aproximação seria $x_1 = 5$? Explique.

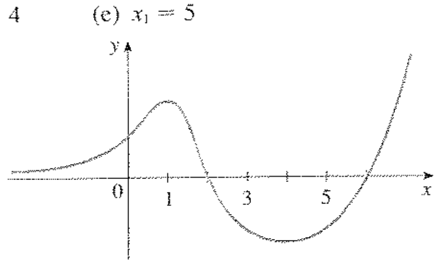


2. Siga as instruções do Exercício 1(a), mas use $x_1 = 9$ como a aproximação inicial para encontrar a raiz s.

3. Suponha que a reta $y = 5x - 4$ é tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = 3$. Se for usado o método de Newton para localizar uma raiz da equação $f(x) = 0$ com a aproximação inicial $x_1 = 3$, encontre a segunda aproximação x_2.

4. Para cada aproximação inicial, determine graficamente o que acontecerá se for usado o método de Newton para a função cujo gráfico é dado.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5–8 Use o método de Newton com o valor inicial especificado x_1 para encontrar x_3, a terceira aproximação da raiz da equação dada. (Dê sua resposta com quatro casas decimais.)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0$, $x_1 = 1$ **6.** $x^3 - x^2 - 1 = 0$, $x_1 = 1$

7. $x^4 - 20 = 0$, $x_1 = 2$ **8.** $x^5 + 2 = 0$, $x_1 = -1$

9. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = -1$ para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^3 + x + 3 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente ao ponto $(-1, 1)$. Usando este gráfico explique como o método funciona neste caso.

10. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = 1$para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^4 - x - 1 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente ao ponto $(1, -1)$. Usando este gráfico explique como o método funciona neste caso.

11–12 Use o método de Newton para aproximar o número dado correto até a oitava casa decimal.

11. $\sqrt[3]{30}$ **12.** $\sqrt[7]{1000}$

13–16 Use o método de Newton para aproximar a raiz indicada da equação correta até a sexta casa decimal.

13. A raiz de $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ no intervalo $[2, 3]$

14. A raiz de $x^4 + x - 4 = 0$ no intervalo $[1, 2]$

15. A raiz positiva de sen $x = x^2$

16. A raiz positiva de $2 \cos x = x^4$

17–22 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação corretas até a sexta casa decimal.

17. $x^4 = 1 + x$ **18.** $e^x = 3 - 2x$

19. $\text{tg}^{-1} x = 1 - x$ **20.** $\sqrt{x + 3} = x^2$

21. $\cos x = \sqrt{x}$ **22.** $\text{tg}\, x = \sqrt{1 - x^2}$

23–28 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação corretas até a oitava casa decimal. Comece fazendo um gráfico para encontrar a aproximação inicial.

23. $x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 3 = 0$

24. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

25. $x^2\sqrt{2 - x - x^2} = 1$

26. $3 \operatorname{sen}(x^2) = 2x$

27. $e^{-x^2} = x^2 - x$

28. $\ln(4 - x^2) = x$

29. (a) Aplique o método de Newton à equação $x^2 - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para a raiz quadrada (usado pelos antigos babilônios para computar $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Use a parte (a) para computar $\sqrt{1.000}$ correta até a sexta casa decimal.

30. (a) Aplique o método de Newton à equação $1/x - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para os recíprocos:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Esse algoritmo possibilita a um computador achar os recíprocos sem realmente dividir.)

(b) Use a parte (a) para computar $1/1{,}6984$ correta até a sexta casa decimal.

31. Explique por que o método de Newton não funciona para encontrar as raízes da equação $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_1 = 1$.

32. (a) Use o método de Newton com $x_1 = 1$ para encontrar a raiz da equação $x^3 - x = 1$ correta até a sexta casa decimal.

(b) Resolva a equação da parte (a) usando como a aproximação inicial $x_1 = 0{,}6$.

(c) Resolva a equação da parte (a) utilizando $x_1 = 0{,}57$. (Você definitivamente precisa de uma calculadora programável para esta parte.)

(d) Faça o gráfico de $f(x) = x^3 - x - 1$ e suas retas tangentes em $x_1 = 1, 0{,}6$; e $0{,}57$ para explicar por que o método de Newton é tão sensível ao valor da aproximação inicial.

33. Explique por que o método de Newton falha quando aplicado à equação $\sqrt[3]{x} = 0$ com qualquer valor inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre sua explicação com um esboço.

34. Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

então a raiz da equação $f(x) = 0$ é $x = 0$. Explique por que o método de Newton falha para encontrar a raiz não importando que aproximação inicial $x_1 \neq 0$ é usada. Ilustre sua explicação com um esboço.

35. (a) Use o método de Newton para encontrar os números críticos da função $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x$ corretos até a terceira casa decimal.

(b) Encontre o valor mínimo absoluto da função

$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x \qquad -1 \leq x \leq 7$

correto até duas casas decimais.

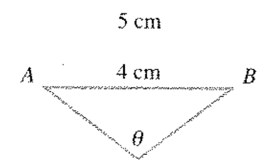
36. Use o método de Newton para encontrar o valor mínimo absoluto da função $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$ correto até a quarta casa decimal.

37. Use o método de Newton para encontrar as coordenadas do ponto de inflexão da curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi$, corretas até a sexta casa decimal.

38. Dentre as infinitas retas tangentes à curva $y = -\operatorname{sen} x$ que passam pela origem existe uma que tem a maior inclinação. Use o método de Newton para encontrar a inclinação daquela reta correta até a sexta casa decimal.

39. Um silo de grãos consiste em um cilindro com 30 pés de altura e telhado hemisférico. A fim de obter um volume total de 15.000 pés³ (inclusive a parte hemisférica), qual deveria ser o raio do silo?

40. Na figura, o comprimento da corda AB é 4 cm, e o comprimento do arco AB é 5 cm. Encontre o ângulo central θ, em radianos, correto até a quarta casa decimal. Dê então a resposta até o grau mais próximo.



41. Um vendedor vende um carro novo por \$ 18.000. Ele também oferece para vender o mesmo carro em pagamentos de \$ 375 por mês durante 5 anos. Qual a taxa de juro mensal cobrada pelo vendedor?

Para resolver esse problema você necessitará da fórmula para o valor presente A de uma anuidade que consiste em n pagamentos iguais de tamanho R com uma taxa de juros i por período de tempo:

$$A = \frac{R}{i}\left[1 - (1 + i)^{-n}\right]$$

Substituindo i por x, mostre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Use o método de Newton para resolver essa equação.

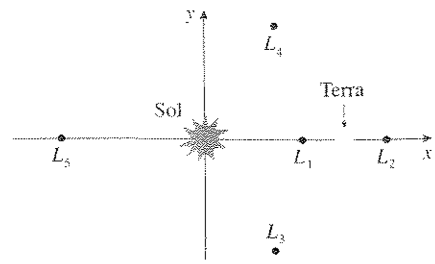
42. A figura mostra o Sol na origem e a Terra no ponto $(1, 0)$. (A unidade aqui é a distância entre o centro da Terra e o Sol, chamada *unidade astronômica*: 1 AU $\approx 1{,}496 \times 10^8$ km.) As cinco localizações L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 nesse plano de rotação da Terra em torno do Sol onde um satélite permanece imóvel em relação à Terra em razão das forças que agem no satélite (inclusive a atração gravitacional da Terra e do Sol) se contrabalançam. Essas localizações são denominadas *pontos de libração*. (Um satélite de pesquisa solar foi colocado em um desses pontos.) Se m_1 for a massa do Sol, m_2 for a massa da Terra e $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que a coordenada x de L_1 é a única raiz da equação de quinto grau

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

e a coordenada x de L_2 é a raiz da equação

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Usando o valor $r \approx 3{,}04042 \times 10^{-6}$, encontre a localização dos pontos de libração (a) L_1 e (b) L_2.



4.10 Antiderivadas

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento do futuro. Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada *antiderivada* de f.

Definição Uma função F é denominada uma **antiderivada** de f sobre um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$. Não é difícil descobrir uma antiderivada de f se mantivermos a Regra da Potência em mente. De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, então $F'(x) = x^2 = f(x)$. Mas a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$. Conseqüentemente, F e G são antiderivadas de f. Na verdade, qualquer função da forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, onde C é uma constante, é uma antiderivada de f. A questão que se levanta é: há outras?

Para responder a essa questão, lembre-se de que na Seção 4.2 usamos o Teorema do Valor Médio para provar que se duas funções têm derivadas idênticas em um intervalo então elas devem ser diferentes por uma constante (Corolário 4.2.7). Assim, se F e G são duas antiderivadas quaisquer de f, então

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

logo $G(x) - F(x) = C$, onde C é uma constante. Podemos escrever isso como $G(x) = F(x) + C$. Temos então o seguinte resultado.

1 Teorema Se F for uma antiderivada de f em um intervalo I, então a antiderivada mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

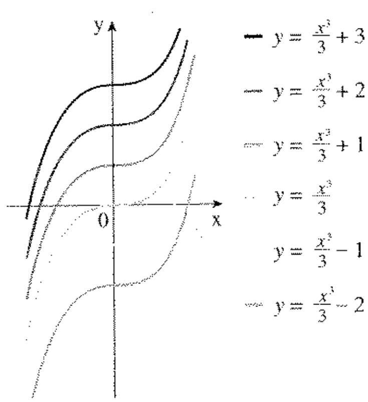


FIGURA 1
Membros da família de antiderivadas de $f(x) = x^2$

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que a antiderivada geral de f é $x^3/3 + C$. Atribuindo os valores específicos para a constante C obtemos uma família de funções cujos gráficos são verticais transladados de outro (veja a Figura 1).

EXEMPLO 1 Encontre uma antiderivada mais geral de cada uma das seguintes funções.
(a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

SOLUÇÃO
(a) Se $F(x) = -\cos x$, então $F'(x) = \text{sen}\, x$, logo uma antiderivada de $\text{sen}\, x$ é $-\cos x$. Pelo Teorema 1, a antiderivada mais geral é $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Lembre-se da Seção 3.8 que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Logo, em um intervalo $(0, \infty)$, a antiderivada geral de $1/x$ é $\ln x + C$. Também sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. O Teorema 1 então nos diz que a antiderivada geral de $f(x) = 1/x$ é $\ln|x| + C$ em qualquer intervalo que não contém 0. Em particular, isso é verdadeiro em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Logo a antiderivada geral de f é

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usamos a Regra da Potência para descobrir uma antiderivada de x^n. De fato, se $n \neq -1$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Assim, a antiderivada geral de $f(x) = x^n$ é

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Isso é válido para todo $n \geqslant 0$, uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em um intervalo. Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha 0.

Como no Exemplo 1, toda fórmula de diferenciação, quando lida da direita para a esquerda, dá origem a uma fórmula de antidiferenciação. Na Tabela 2 listamos algumas antiderivadas particulares. Cada fórmula na tabela é verdadeira, pois a derivada da função na coluna direita aparece na coluna esquerda. Em particular, a primeira fórmula diz que a antiderivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a antiderivada da função. A segunda fórmula estabelece que a antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas. (Usamos a notação $F' = f$, $G' = g$.)

□ Para obter a antiderivada mais geral (em um intervalo) daquelas da Tabela 2, devemos adicionar uma constante (ou constantes), como no Exemplo 1.

2 Tabela de Fórmulas de Antidiferenciação

Função	Antiderivada particular	Função	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\text{tg}\, x$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x\, \text{tg}\, x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{tg}^{-1} x$
$\cos x$	$\text{sen}\, x$		

EXEMPLO 2 Encontre todas as funções de g tal que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUÇÃO Queremos achar uma antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, queremos descobrir a antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Usando a fórmula da Tabela 2 junto com o Teorema 1 obtemos

$$g(x) = 4(-\cos x) - 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

Nas aplicações do cálculo é muito comum situações como a do Exemplo 2, em que é requerido achar uma função sendo fornecidos os dados sobre suas derivadas. Uma equação que envolva as derivadas de uma função é chamada **equação diferencial**. As equações diferenciais serão estudadas com algum detalhe no Capítulo 9, mas no momento podemos resolver algumas equações diferenciais elementares. A solução geral de uma equação diferencial envolve uma constante arbitrária (ou constantes), como no Exemplo 2. Contudo, podem ser dadas as condições extras que vão determinar as constantes e assim especificar univocamente a solução.

A Figura 2 mostra os gráficos da solução da função f' do Exemplo 3 e de sua antiderivada f. Note que $f'(x) > 0$, logo f é sempre crescente. Note também que quando f' tem um máximo ou mínimo, f aparenta ter um ponto de inflexão. Logo o gráfico serve como verificação de nossos cálculos.

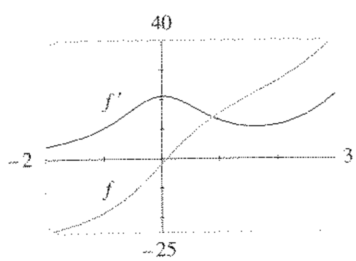


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Encontre f se $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ e $f(0) = -2$.

SOLUÇÃO A antiderivada geral de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

Para determinar C usamos o fato de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \operatorname{tg}^{-1} 0 + C = -2$$

Assim, temos $C = -2 - 1 = -3$; logo, a solução particular é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x - 3$$

EXEMPLO 4 Encontre f se $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$.

SOLUÇÃO A antiderivada geral de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ é

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Usando as regras de antidiferenciação mais uma vez, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C e D usamos as condições dadas que $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$. Visto que $f(0) = 0 + D = 4$, temos $D = 4$. Uma vez que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

temos $C = -3$. Conseqüentemente, a função requerida é

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

A Geometria das Antiderivadas

Se for dado o gráfico de uma função f, parece razoável que possamos ser capazes de esboçar o gráfico de uma antiderivada F. Suponha, por exemplo, que estamos dando $F(0) = 1$. Então temos um ponto de partida $(0, 1)$, e a direção segundo a qual movemos nosso lápis é dada em cada estágio pela derivada $F'(x) = f(x)$. No próximo exemplo usamos o princípio deste capítulo para mostrar como fazer o gráfico de F mesmo quando não temos uma fórmula para f. Esse é o caso, por exemplo, quando $f(x)$ é determinada por dados experimentais.

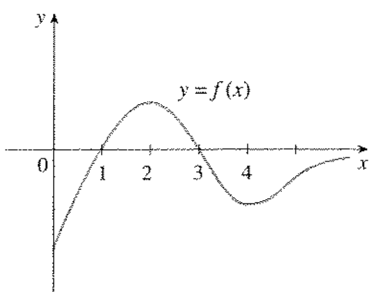


FIGURA 3

EXEMPLO 5 □ O gráfico de uma função f é dado na Figura 3. Fazemos um esboço de uma antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUÇÃO Estamos orientados pelo fato de que a inclinação de $y = F(x)$ é $f(x)$. Vamos começar no ponto $(0, 2)$ e traçamos F como uma função inicialmente decrescente, uma vez que $f(x)$ é negativa quando $0 < x < 1$. Note que $f(1) = f(3) = 0$, logo F tem tangentes horizontais quando $x = 1$ e $x = 3$. Para $1 < x < 3$, $f(x)$ é positiva e F é crescente. Vemos que F tem mínimo local quando $x = 1$ e máximo local quando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ é negativa e F é decrescente em $(3, \infty)$. Uma vez que $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, o gráfico de F torna-se mais achatado quando $x \to \infty$. Note também que $F''(x) = f'(x)$ muda de positivo para negativo em $x = 2$ e de negativo para positivo em $x = 4$, logo F tem pontos de inflexão quando $x = 2$ e $x = 4$. Usamos essa informação para esboçar o gráfico para a antiderivada na Figura 4.

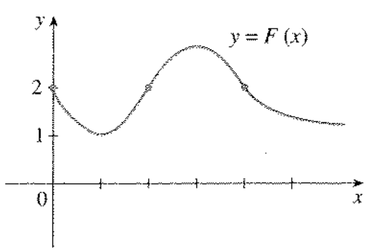


FIGURA 4

EXEMPLO 6 □ Se $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$, esboce o gráfico da antiderivada F que satisfaz a condição inicial $F(-1) = 0$.

SOLUÇÃO Podemos pensar durante um dia em uma fórmula para uma antiderivada de f sem contudo lograr êxito. Uma segunda possibilidade poderia ser traçar o gráfico de f primeiro e então usá-lo para fazer o gráfico de F, como no Exemplo 5. Poderia funcionar, mas em vez disso vamos criar um gráfico mais preciso, usando o que chamamos **campo de direção**.

Uma vez que $f(0) = 1$, o gráfico de F tem inclinação 1 quando $x = 0$. Logo, traçaremos vários segmentos curtos da tangente com inclinação 1, todos centrados em $x = 0$. Fazemos o mesmo para vários outros valores de x, e o resultado está mostrado na Figura 5. O nome campo de direção vem do fato de que cada segmento indica a direção na qual a curva $y = F(x)$ segue naquele ponto.

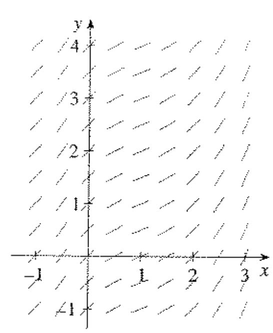


FIGURA 5

O campo de direção para $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$.
A inclinação do segmento de reta acima de $x = a$ é $f(a)$

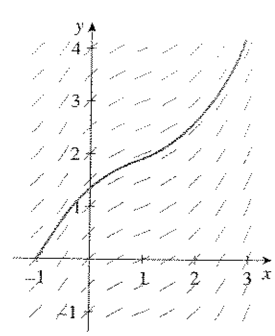


FIGURA 6

O gráfico de uma antiderivada segue o campo de direção

Agora usamos o campo de direção para esboçar o gráfico de F. Devido à condição inicial $F(-1) = 0$, começamos no ponto $(-1, 0)$ e traçamos o gráfico para que ele siga a direção dos segmentos tangentes. O resultado está desenhado na Figura 6. Qualquer outra antiderivada seria obtida deslocando-se o gráfico de F para cima ou para baixo.

Movimento Retilíneo

Antidiferenciação é particularmente útil na análise do movimento de um objeto que se move em uma reta. Lembre-se de que se o objeto tem função posição $s = f(t)$, então a função velocidade é $v(t) = s'(t)$. Isso significa que a função posição é uma antiderivada da função velocidade. Da mesma maneira, a função aceleração é $a(t) = v'(t)$; logo, a função velocidade é uma antiderivada da aceleração. Se a aceleração e os valores iniciai $s(0)$ e $v(0)$ são conhecidos, então a função posição pode ser encontrada antidiferenciando se duas vezes.

EXEMPLO 7 Uma partícula move-se em uma reta e tem aceleração dada por $a(t) = 6t + 4$. Sua velocidade inicial é $v(0) = -6$ cm/s, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9$ cm. Encontre sua função posição $s(t)$.

SOLUÇÃO Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, a antidiferenciação dá

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Note que $v(0) = C$. Mas temos $v(0) = -6$, logo $C = -6$ e

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Uma vez que $v(t) = s'(t)$, s é a antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Isso dá $s(0) = D$. Temos $s(0) = 9$, logo $D = 9$ e a função posição requerida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

Um objeto próximo da superfície da Terra está sujeito a uma força gravitacional qu produz uma aceleração para baixo denotada por g. Para um movimento próximo à Terr devemos pressupor que g é constante, sendo seu valor em torno de 9,8 m/s^2 (ou 32 pés/s^2

EXEMPLO 8 Uma bola é arremessada para cima com uma velocidade de 48 pés/s da margem de um penhasco 432 pés acima do solo. Encontre sua altura acima do solo t segundos mais tarde. Quando ela atinge sua altura máxima? Quando atinge o solo?

SOLUÇÃO O movimento é vertical, e escolhemos o sentido positivo para ser para cima. No instante t a distância acima do solo é $s(t)$ e a velocidade $v(t)$ está decrescendo. Portanto, a aceleração deve ser negativa, e temos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Fazendo antiderivada, temos

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C usamos a informação dada que $v(0) = 48$. Isso dá $48 = 0 + C$; logo

$$v(t) = -32t + 48$$

A altura máxima é atingida quando $v(t) = 0$, isto é, depois de 1,5 s. Uma vez que $s'(t) = v(t)$, antidiferenciamos outra vez e obtemos

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Usando o fato de que $s(0) = 432$, temos $432 = 0 + D$ e então

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

A expressão para $s(t)$ é válida até que a bola atinja o solo. Isso acontece quando $s(t) = 0$, isto é, quando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

ou, de maneira equivalente, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Usando a fórmula quadrática para resolver essa equação obtemos

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Rejeitamos a solução com o sinal de menos, uma vez que ela fornece um valor negativo para t. Portanto, a bola atinge o solo após $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6{,}9$ s.

□ A Figura 7 mostra a função posição da bola no Exemplo 8. O gráfico confirma nossas conclusões. A bola atinge sua altura máxima após de 1,5 s e atinge o solo após 6,9 s.

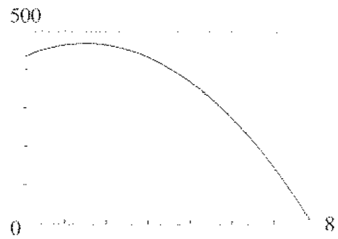


FIGURA 7

4.10 Exercícios

1–16 □ Encontre a antiderivada mais geral da função. (Verifique sua resposta diferenciando.)

1. $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

2. $f(x) = 4 + x^2 - 5x^3$

3. $f(x) = 1 - x^3 + 5x^5 - 3x^7$

4. $f(x) = x^{20} + 4x^{10} + 8$

5. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

6. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$

7. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

8. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

9. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$

10. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

11. $f(u) = \dfrac{u^2 + 3\sqrt{u}}{u^2}$

12. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

13. $g(\theta) = \cos\theta - 5\,\mathrm{sen}\,\theta$

14. $h(\theta) = \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2(\theta)}$

15. $f(x) = 2x + 5(1 - x^2)^{-1/2}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

17–18 □ Encontre a antiderivada F de f que satisfaça a condição dada. Verifique sua resposta comparando os gráficos de f e F.

17. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

18. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

19–42 □ Encontre f.

19. $f''(x) = 6x + 12x^2$

20. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

21. $f''(x) = 1 + x^{4/5}$

22. $f''(x) = \cos x$

23. $f'''(t) = e^t$

24. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

25. $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$

26. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3$, $f(1) = 6$

27. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x)$, $f(1) = 10$

28. $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$

29. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, $f(\pi/3) = 4$

30. $f'(x) = 3x^{-2}$, $f(1) = f(-1) = 0$

31. $f'(x) = 2/x$, $x < 0$, $f(-1) = 7$

32. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$

33. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10$, $f(1) = 5$, $f'(1) = 3$

34. $f''(x) = 4 - 6x - 40x^3$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

35. $f''(\theta) = \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$

36. $f''(t) = 3/\sqrt{t}$, $f(4) = 20$, $f'(4) = 7$

37. $f''(x) = 2 - 12x, \quad f(0) = 9, \quad f(2) = 15$

38. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4, \quad f(0) = 8, \quad f(1) = 5$

39. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

40. $f''(t) = 2e^t + 3\,\text{sen}\,t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

41. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

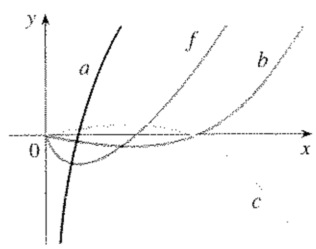
42. $f'''(x) = \text{sen}\,x \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1$

43. Dado que o gráfico de f passa pelo ponto $(1, 6)$ e que a inclinação de sua reta tangente em $(x, f(x))$ é $2x + 1$, encontre $f(2)$.

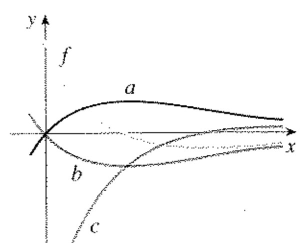
44. Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e a reta $x + y = 0$ é tangente ao gráfico de f.

45–46 O gráfico de uma função f está mostrado. Qual gráfico é uma antiderivada de f e por quê?

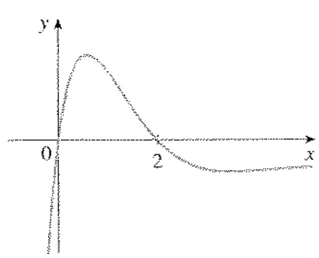
45.



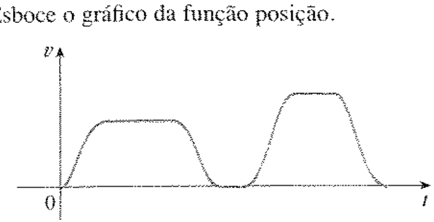
46.



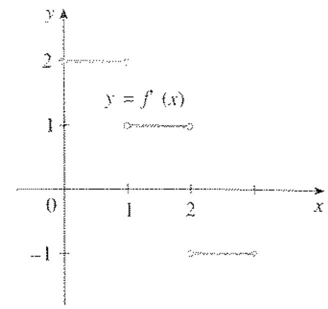
47. O gráfico de uma função está mostrado na figura. Faça um esboço de uma antiderivada de F, dado que $F(0) = 0$.



48. O gráfico da função velocidade de um carro está mostrado na figura. Esboce o gráfico da função posição.



49. O gráfico de f' está mostrado na figura. Esboce o gráfico de f se f for contínua e $f(0) = -1$.



50. (a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico de $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

(b) Começando com o gráfico da parte (a), esboce um gráfico da antiderivada F que satisfaça $F(0) = 1$.

(c) Use as regras desta seção para achar uma expressão para $F(x)$.

(d) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (c). Compare com seu esboço da parte (b).

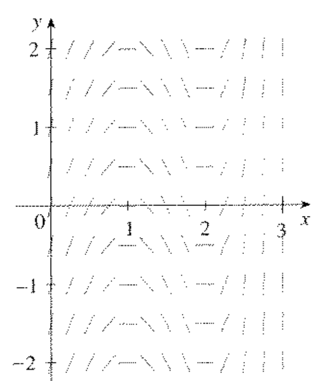
51–52 Trace um gráfico de f e use-o para fazer um esboço da antiderivada que passe pela origem.

51. $f(x) = \text{sen}(x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$

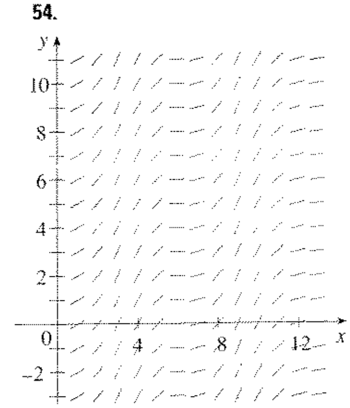
52. $f(x) = 1/(x^4 + 1)$

53–54 Um campo de direção é dado por uma função. Use-o para traçar a antiderivada F que satisfaça $F(0) = -2$.

53.



54.



55–56 Use um campo de direção para fazer o gráfico da antiderivada que satisfaça $F(0) = 0$.

55. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{x}, \quad 0 < x < 2\pi$

56. $f(x) = x\,\text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

57. Uma função é definida pelo seguinte dado experimental. Use um campo de direção para esboçar o gráfico de sua antiderivada se a condição inicial é $F(0) = 0$.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

58. (a) Trace um campo de direção para a função $f(x) = 1/x^2$ e use-o para esboçar os vários membros da família de antiderivadas.

(b) Compute a antiderivada geral explicitamente e esboce as várias antiderivadas particulares. Compare com a resposta da parte (a).

59–64 Uma partícula move-se de acordo com os dados que se seguem. Encontre a posição da partícula.

59. $v(t) = \text{sen}\, t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = 1{,}5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

61. $a(t) = t - 2, \quad s(0) = 1, \quad v(0) = 3$

62. $a(t) = \cos t + \text{sen}\, t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$

63. $a(t) = 10\,\text{sen}\, t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = 10 + 3t - 3t^2, \quad s(0) = 0, \quad s(2) = 10$

65. Uma pedra é lançada de um posto de observação da Torre CN, 450 m acima do solo.

(a) Determine a distância da pedra acima do nível do solo no instante t.

(b) Quanto leva para a pedra atingir o solo?

(c) Com que velocidade ela atinge o solo?

(d) Se a pedra for atirada para baixo com uma velocidade de 5 m/s, quanto tempo levará para ela atingir o solo?

66. Mostre que, para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento depois do instante t é

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

67. Um objeto é lançado para cima com velocidade inicial v_0 metros por segundo a partir de um ponto s_0 metros acima do solo. Mostre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0]$$

68. Duas bolas são arremessadas para cima à margem de um penhasco no Exemplo 8. A primeira é arremessada com uma velocidade de 48 pés/s, e a outra é arremessada 1 segundo depois, com uma velocidade de 24 pés/s. As bolas passam uma pela outra alguma vez?

69. Uma pedra é largada de um penhasco e atinge o solo com uma velocidade de 120 pés/s. Qual a altura do penhasco?

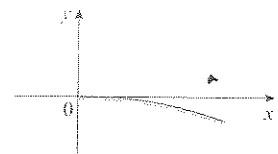
70. Se um nadador de massa m permanece na ponta de um trampolim de comprimento L e densidade linear ρ, o trampolim fica com a forma da curva $y = f(x)$, em que

$$EIy'' = mg(L - x) + 1\,\rho g(L - x)^2$$

e E e I são constantes positivas que dependem do material do trampolim e $g(< 0)$ é a aceleração da gravidade.

(a) Ache uma expressão para a forma da curva.

(b) Use $f(L)$ para estimar a distância da horizontal à ponta do trampolim.



71. Uma companhia estima que o custo marginal (em dólares por item) de produzir x itens é $1{,}92 - 0{,}002\,x$. Se o custo de produzir um item for \$ 562, encontre o custo de produzir 100 itens.

72. A densidade linear de um cabo de comprimento 1 m é dado por $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, em gramas por centímetro, onde x é medido em centímetros a partir do extremo do cabo. Encontre a massa do cabo.

73. Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a = \begin{cases} 9 - 0{,}9t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair?

74. Um carro está viajando a 50 mi/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 22 pés/s^2. Qual a distância percorrida antes de o carro parar?

75. Qual a aceleração necessária para aumentar a velocidade de um carro a 30 mi/h para 50 mi/h em 5 s?

76. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 16 pés/s^2, produzindo marcas de derrapagem medindo 200 pés antes de parar completamente. Quão rápido estava o carro viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

77. Um carro está viajando a 100 km/h quando o motorista vê um acidente 80 m adiante e pisa no freio. Qual desaceleração constante é necessária para parar o carro em tempo de evitar a batida?

78. Um modelo de foguete é lançado para cima a partir do repouso. Sua aceleração para os três primeiros segundos é $a(t) = 60t$, e nesse ínterim o combustível acaba, e ele se transforma em um corpo em queda livre. Após 17 s o pára-quedas do foguete se abre, e a velocidade (para baixo) diminui linearmente para -18 pés/s em 5 segundos. O foguete então cai até o solo naquela taxa.

(a) Determine a função posição s e a função velocidade v (para todo instante t). Esboce os gráficos de s e v.

(b) Em que instante o foguete atingiu sua altura máxima e qual é essa altura?

(c) Em que instante o foguete atinge a terra?

79. A alta velocidade do trem-bala acelera e desacelera a uma taxa de 4 pés/s^2. Sua velocidade máxima de cruzeiro é 90 mi/h.

(a) Qual será a distância máxima percorrida pelo trem se ele acelerar a partir do repouso até atingir a velocidade do cruzeiro e permanecer nessa velocidade por 15 minutos?

(b) Suponha que o trem comece a partir do repouso e então pare completamente em 15 minutos. Que distância máxima ele poderá percorrer nessas condições?

(c) Encontre o tempo mínimo para o trem percorrer duas estações consecutivas, distantes 45 mi uma da outra.

(d) A viagem de uma estação para outra leva 37,5 minutos. Qual a distância entre as estações?

4 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique a diferença entre um máximo absoluto e um máximo local. Ilustre com um esboço.
2. (a) O que nos diz o Teorema do Valor Extremo?
   (b) Explique o funcionamento do Método do Intervalo Fechado.
3. (a) Enuncie o Teorema de Fermat.
   (b) Defina um número crítico de f.
4. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.
   (b) Enuncie o Teorema do Valor Médio e dê uma interpretação geométrica.
5. (a) Enuncie o Teste Crescente/Decrescente.
   (b) Enuncie o Teste da Concavidade.
6. (a) Enuncie o Teste da Derivada Primeira.
   (b) Enuncie o Teste da Derivada Segunda.
   (c) Quais as vantagens e desvantagens relativas desses testes?
7. (a) O que nos diz a Regra de L'Hôspital?
   (b) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver um produto $f(x)g(x)$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (c) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma diferença $f(x) - g(x)$ onde $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (d) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma potência $[f(x)]^{g(x)}$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$?
8. Se você tem uma calculadora gráfica ou computador, por que precisa do cálculo para fazer o gráfico da função?
9. (a) Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação $f(x) = 0$, explique geometricamente, com um diagrama, como a segunda aproximação x_2 no método de Newton é obtida.
   (b) Escreva uma expressão para x_2 em termos de x_1, $f(x_1)$ e $f'(x_1)$.
   (c) Escreva uma expressão para x_{n+1} em termos de x_n, $f(x_n)$ e $f'(x_n)$.
   (d) Sob quais circunstâncias o método de Newton provavelmente falhará ou funcionará muito vagarosamente?
10. (a) O que é a antiderivada de uma função f?
    (b) Suponha que F_1 e F_2 seja ambas antiderivadas de f em um intervalo I. Como estão relacionadas F_1 e F_2?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se o enunciado é verdadeiro ou falso. Se for verdadeiro, explique por quê. Se for falso, explique por que ou dê um exemplo que não confirme o enunciado.

1. Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo local em c.
2. Se f tiver um valor mínimo absoluto em c, então $f'(c) = 0$.
3. Se f for contínua em (a, b), então f atinge um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em (a, b).
4. Se f for diferenciável e $f(-1) = f(1)$, então há um número c tal que $|c| < 1$ e $f'(c) = 0$.
5. Se $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, então f é crescente em $(1, 6)$.
6. Se $f''(2) = 0$, então $(2, f(2))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$.
7. Se $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.
8. Há uma função f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e $f'(x) > 1$ para todo x.
9. Há uma função f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.
10. Há uma função f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.
11. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f + g$ é crescente em I.
12. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f - g$ é crescente em I.
13. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então fg é crescente em I.
14. Se f e g forem funções crescentes positivas em um intervalo I, então fg é crescente em I.
15. Se f for crescente e $f(x) > 0$ em I, então $g(x) = 1/f(x)$ é decrescente em I.
16. A antiderivada mais geral de $f(x) = x^{-2}$ é
$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$
17. Se $f'(x)$ existe e é não nula para todo x, então $f(1) \neq f(0)$.
18. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x} = 1$

EXERCÍCIOS

1–6 □ Encontre os valores extremos absolutos e locais da função em um intervalo dado.

1. $f(x) = 10 + 27x - x^3, \quad [0, 4]$
2. $f(x) = x - \sqrt{x}, \quad [0, 4]$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}, \quad [-2, 0]$
4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad [-2, 1]$
5. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$
6. $f(x) = (\ln x)/x^2, \quad [1, 3]$

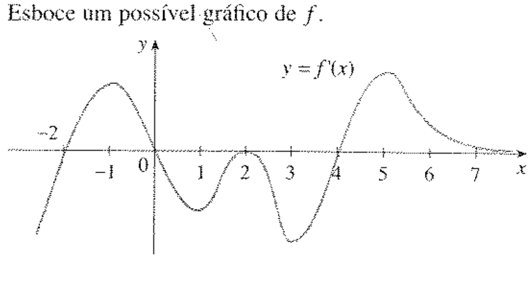
7–14 □ Calcule o limite.

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{\ln(1 + x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$
9. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$
11. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$
12. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$
13. $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
14. $\displaystyle\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

15–17 □ Esboce o gráfico de uma função que satisfaça as condições dadas.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty, \quad f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2), (1, 6)$, e $(9, \infty)$, $f'(x) > 0$ em $(-2, 1)$ e $(6, 9)$, $f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(12, \infty)$, $f''(x) < 0$ em $(0, 6)$ e $(6, 12)$
16. $f(0) = 0, \quad f$ é contínua e par, $f'(x) = 2x$ se $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ se $1 < x < 3, \quad f'(x) = 1$ se $x > 3$
17. f é ímpar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2, \quad f'(x) > 0$ para $x > 2$, $f''(x) > 0$ para $0 < x < 3, \quad f''(x) < 0$ para $x > 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

18. A figura mostra o gráfico da *derivada* f' de uma função f.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Esboce o gráfico de f''.
(d) Esboce um possível gráfico de f.



19–34 □ Use o roteiro da Seção 4.5 para esboçar a curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$
20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$
21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
22. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$
23. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)^2}$
24. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}$
25. $y = x^2/(x + 8)$
26. $y = x + \sqrt{1 - x}$
27. $y = x\sqrt{2 + x}$
28. $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
29. $y = \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos x$
30. $y = 4x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$
32. $y = e^{2x - x^2}$
33. $y = e^x + e^{-3x}$
34. $y = \ln(x^2 - 1)$

35–38 □ Faça o gráfico de f que revele todos os aspectos da curva. Use os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos crescente, decrescente, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão. No Exercício 35, use o cálculo para achar exatamente essas quantidades.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$
36. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 - x}$
37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$
38. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

39. Faça o gráfico de $f(x) = e^{-1/x^2}$ em uma janela de inspeção que mostre todos os principais aspectos dessa função. Estime os pontos de inflexão. Então use o cálculo para achá-los exatamente.
40. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique a forma do gráfico computando os limites de $f(x)$ quando x tende a $\infty, -\infty, 0^+$ e 0^-.
(c) Use o gráfico de f para estimar as coordenadas dos pontos de inflexão.
(d) Use seu CAS para computar e fazer o gráfico de f''.
(e) Use o gráfico da parte (d) para estimar mais precisamente o ponto de inflexão.
41. Se $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos(3 \operatorname{arcsen} x))$, use os gráficos de f, f' e f'' para estimar as coordenadas x dos pontos de máximo, mínimo e pontos de inflexão de f.
42. Se $f(x) = \ln(2x + x \operatorname{sen} x)$, use os gráficos de f, f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e os pontos de inflexão de f em um intervalo $(0, 15)$.
43. Investigue a família de funções $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. Que aspectos os membros dessa família têm em comum? Como eles diferem? Para quais valores de C a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$? Para quais valores de C a função f não tem gráfico? O que acontece quando $C \to \infty$?

44. Investigue a família de funções $f(x) = cxe^{-cx^2}$. O que acontece com os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão quando c varia? Ilustre suas conclusões fazendo o gráfico de vários membros da família.

45. Mostre que a equação $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

46. Suponha que f seja contínua em $[0, 4]$, $f(0) = 1$ e $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x em $(0, 4)$. Mostre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^{1/5}$ em um intervalo $[32, 33]$, mostre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2{,}0125$$

48. Para que valores das constantes a e b $(1, 6)$ é um ponto de inflexão da curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

49. Seja $g(x) = f(x^2)$, onde f é duas vezes diferenciável para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.
(a) Em que números g tem um valor extremo?
(b) Discuta a concavidade de g.

50. Encontre dois inteiros positivos tal que a soma do primeiro número com quatro vezes o segundo número é 1.000, e o produto dos números é o maior possível.

51. Mostre que a menor distância do ponto (x_1, y_1) a uma reta $Ax + By + C = 0$ é

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encontre o ponto sobre a hipérbole $xy = 8$ que está mais próximo ao ponto $(3, 0)$.

53. Encontre a menor área possível de um triângulo isósceles que está circunscrito em um círculo de raio r.

54. Encontre o volume do maior cone circular que pode ser inscrito em uma esfera de raio r.

55. Em $\triangle ABC$, D está em AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm e $|CD| = 5$ cm. Onde estaria o ponto P escolhido em CD para a soma $|PA| + |PB| + |PC|$ ser mínima?

56. Faça o Exercício 55 quando $|CD| = 2$ cm.

57. A velocidade de uma onda de comprimento L em água profunda é

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

onde K e C são constantes positivas conhecidas. Qual é o comprimento da onda que dá a velocidade mínima?

58. Um tanque de armazenamento de metal com volume V deve ser construído com a forma de um cilindro circular reto com um hemisfério em cima. Quais as dimensões que vão exigir a menor quantidade de metal?

59. Uma quadra de esportes tem capacidade para 15 mil espectadores sentados. Com o preço do bilhete a \$ 12, a freqüência média em um jogo é de 11 mil espectadores. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada dólar com redução no preço do bilhete, a média da freqüência aumenta em 1.000. Como deve ser estabelecido o preço do bilhete para maximizar o rendimento da venda de entradas?

60. Um fabricante determinou que o custo de fazer x unidades de uma mercadoria é $C(x) = 1.800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$ e a função demanda é $p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x$
(a) Faça o gráfico das funções custo e rendimento e use os gráficos para estimar o nível de produção para o lucro máximo.
(b) Use o cálculo para achar o nível de produção para o lucro máximo.
(c) Estime o nível de produção que minimize o custo médio.

61. Use o método de Newton para achar a raiz da equação $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ correta até a sexta casa decimal.

62. Use o método de Newton para achar todas as raízes da equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ corretas até a sexta casa decimal

63. Use o método de Newton para achar o máximo absoluto da função $f(t) = \cos t + t - t^2$ com precisão até a oitava casa decimal.

64. Use os passos descritos na Seção 4.5 para esboçar o gráfico da curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Use o método de Newton quando for necessário.

65–72 Encontre $f(x)$.

65. $f'(x) = \sqrt{x^5} - \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

66. $f'(x) = 8x - 3\sec^2 x$

67. $f'(x) = e^2 - (2/\sqrt{x})$

68. $f'(x) = 2/(1 + x^2)$, $f(0) = -1$

69. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t$, $f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}$, $f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$

73. (a) Se $f(x) = 0{,}1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, use um gráfico de f para esboçar um gráfico da antiderivada F de f que satisfaça $F(0) = 0$.
(b) Encontre uma expressão para $F(x)$.
(c) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (b). Compare com seu esboço da parte (a).

74. Investigue a família de curvas dada por $f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$. Em particular você deve determinar o valor transicional de c segundo o qual a quantidade de números críticos varia e o valor transicional em que o número de pontos de inflexão varia. Ilustre as várias possíveis formas com os gráficos.

75. Uma caixa de metralhadora é lançada de um helicóptero a 500 m acima do chão. Seu pára-quedas não abre, mas ela foi planejada para suportar uma velocidade de impacto de 100 m/s. Ela suportará o impacto ou não?

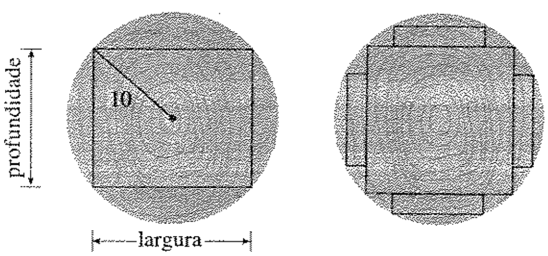
76. Em uma corrida automobilística ao longo de uma estrada reta, o carro A passou o carro B duas vezes. Prove que em algum instante durante a corrida suas acelerações eram iguais. Estabeleça suas hipóteses.

77. Uma viga retangular será cortada de uma tora de madeira com raio de 10 polegadas.

(a) Mostre que a viga de área seccional transversal máxima é um quadrado.

(b) Quatro pranchas retangulares serão cortadas de cada uma das quatro seções da tora que restarão após o corte da viga quadrada. Determine as dimensões das pranchas que terão área transversal máxima.

(c) Suponha que a resistência de uma viga retangular seja proporcional ao produto de seu comprimento e o quadrado de sua profundidade.
Encontre as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de uma tora cilíndrica.



78. Se um projétil for disparado com uma velocidade inicial v em um ângulo de inclinação θ a partir da horizontal, então sua trajetória, desprezando a resistência do ar, é uma parábola

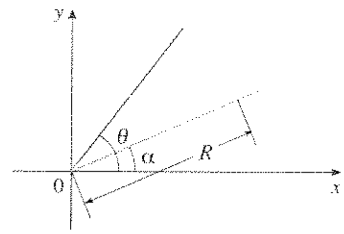
$$y = (\text{tg}\ \theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponha que o projétil seja disparado da base de um plano que está inclinado em um ângulo α, $\alpha > 0$, a partir da horizontal, como mostrado na figura. Mostre que o alcance do projétil, medido a partir de sua inclinação, é dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos\theta \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ tal que R seja um máximo.

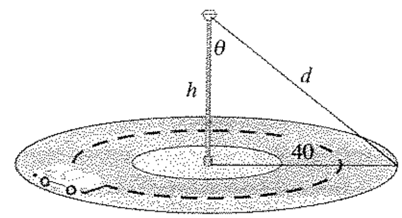
(c) Suponha que o plano esteja em um ângulo α *abaixo* da horizontal. Determine o alcance R e o ângulo segundo o qual o projétil deve ser disparado para maximizar R.



79. Uma luz deve ser colocada no topo de um poste com h pés de altura para iluminar um círculo de tráfego intenso com raio de 40 pés. A intensidade de iluminação I em qualquer ponto P sobre o círculo é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo θ (veja a figura) e inversamente proporcional ao quadrado da distância d da fonte de luz.

(a) Que altura deve ter o poste para maximizar I?

(b) Suponha que o poste tenha h pés de altura e que uma mulher afasta-se da base do poste a uma taxa de 4 pés/s. Com que taxa a intensidade da luz em um ponto sobre suas costas 4 pés acima do chão decresce quando ela atinge a borda do círculo do tráfego?



80. A água flui a uma taxa constante dentro de um tanque esférico. Denote por $V(t)$ o volume de água no tanque no instante de tempo t.

(a) Quais são os significados de $V'(t)$ e $H'(t)$? Estas derivadas são positivas, negativas ou iguais a zero?

(b) $V''(t)$ é positiva, negativa ou zero? Explique.

(c) Sejam t_1, t_2, e t_3 os tempos nos quais o tanque está um quarto cheio, metade cheio e três quartos cheio, respectivamente. Os valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ e $H''(t_3)$ são positivos, negativos ou iguais a zero? Por quê?

81. Mostre que para $x > 0$, temos

$$\frac{x}{1 + x^2} < \text{tg}^{-1}x < x$$

82. Esboce o gráfico da função f tal que $f'(x) < 0$ para todo x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

Problemas Quentes

Um dos mais importantes princípios do problema-solução é a *analogia*. Se você está tendo dificuldades em começar a tratar um problema, é algumas vezes proveitoso dar início resolvendo um similar, porém mais simples. O problema a seguir ilustra o princípio. Cubra completamente a solução e tente resolvê-lo primeiro, você mesmo.

Exemplo Se x, y e z forem números positivos, prove que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

Solução Pode ser difícil tratar esse problema. (Muitos estudantes o atacaram multiplicando o numerador, mas isso somente cria uma confusão.) Vamos tentar pensar em um problema mais simples e similar. Quando diversas variáveis estão envolvidas, é freqüentemente proveitoso pensar em um problema análogo com menos variáveis. No caso presente podemos reduzir o número de variáveis de três para um e provar a desigualdade análoga.

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De fato, se formos capazes de provar (1), então segue a desigualdade desejada, pois

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

A chave para provar (1) está em reconhecer que é uma versão disfarçada de um problema de mínimo. Se fizermos

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

então $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, logo $f'(x) = 0$ quando $x = 1$. Também, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Conseqüentemente, o valor mínimo absoluto de f é $f(1) = 2$. Isso significa que

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos os valores de } x$$

e, como anteriormente mencionado, a desigualdade dada segue pela multiplicação.

A desigualdade em (1) pode também ser provada sem cálculo. De fato, se $x > 0$, temos

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

Como a última desigualdade é obviamente verdadeira, a primeira também o é. □

Relembre

O que você aprendeu da solução para esse exemplo?

- Para resolver um problema envolvendo diversas variáveis, pode ser proveitoso resolver um problema análogo com somente uma variável.
- Quando tentar provar uma desigualdade, pode ser de ajuda pensá-la como um problema de máximo ou de mínimo.

Problemas

1. Se um retângulo tiver sua base em um eixo x e duas vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$, mostre que o retângulo tem a maior área possível quando os dois vértices estão nos pontos de inflexão da curva.

2. Mostre que $|\text{sen}\, x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.

3. Mostre que, para todos os valores positivos de x e y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Mostre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos os números x e y tal que $|x| \leqslant 2$ e $|y| \leqslant 2$.

5. Se a e b são números positivos, mostre que nenhum dos números $a(1 - b)$ e $b(1 - a)$ pode ser maior do que $\frac{1}{4}$.

6. Encontre o ponto sobre a parábola $y = 1 - x^2$ no qual a reta tangente corta do primeiro quadrante o triângulo com a menor área.

7. Encontre o ponto mais alto e o mais baixo sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. Esboce o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $|x + y| \leqslant e^x$.

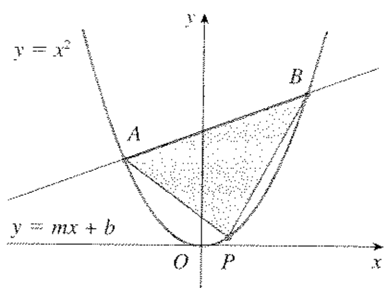


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

9. A reta $y = mx + b$ intersecta a parábola $y = x^2$ nos pontos A e B (veja a figura). Encontre o ponto P sobre o arco AOB da parábola que maximize a área do triângulo PAB.

10. Encontre uma função f tal que $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$, e $f''(x) > 0$ para todo x, ou prove que essa função não pode existir.

11. Determine os valores do número a para os quais a função f não tenha ponto crítico:

$$f(x) = (a^2 + a - 6)\cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos de (x, y) tal que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

13. Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 120°$ e $|AB| \cdot |AC| = 1$.

    (a) Expresse o comprimento do ângulo bissector AD em termos de $x = |AB|$.

    (b) Encontre o maior valor possível de $|AD|$.

14. $ABCD$ é um pedaço do quadrado de papel com lados de comprimento 1 m. Um quarto do círculo é traçado de B a D com centro em A. O pedaço de papel é dobrado ao longo de EF, com E em AB e F em AD, de tal forma que A caia sobre o quarto de círculo. Determine a área máxima e a mínima que o triângulo AEF pode ter.

15. Para quais números positivos a a curva $y = a^x$ intersecta a reta $y = x$?

16. Para que valores de a é verdade que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

17. Seja $f(x) = a_1 \,\text{sen}\, x + a_2 \,\text{sen}\, 2x + \cdots + a_n \,\text{sen}\, nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Se for dado que $|f(x)| \leqslant |\text{sen}\, x|$ para todo x, mostre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

18. Um arco de círculo PQ subtende um ângulo central como na figura. Seja $A(\theta)$ a área entre a corda PQ e o arco PQ. Seja $B(\theta)$ a área entre as retas tangentes PR, QR e o arco. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

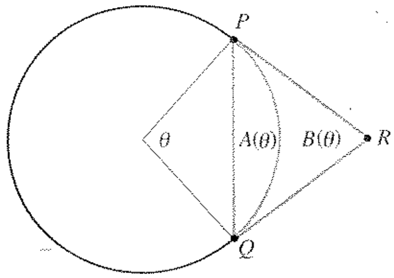


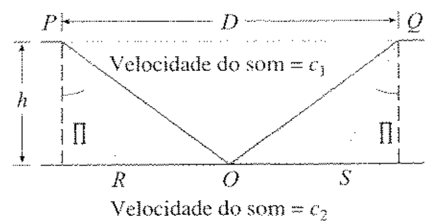
FIGURA PARA O PROBLEMA 18

19. As velocidades do som c_1 em uma camada superior e c_2 em uma camada inferior e a espessura h da camada superior pode ser determinada pela exploração sísmica se a velocidade do som na camada inferior for maior que a velocidade do som na camada superior. Uma carga de dinamite é detonada em um ponto P e os sinais transmitidos são registrados em um ponto Q, o qua está distante de P por uma distância D. O primeiro sinal leva T_1 segundos para chegar ao ponto Q pela superfície. O próximo sinal viaja do ponto P ao ponto R, do ponto R para o ponto S na camad inferior e daí para o ponto Q e leva T_2 segundos para fazer este percurso todo. O terceiro sinal é refletido na camada inferior no ponto médio de RS e leva T_3 segundos para chegar em Q.

(a) Escreva T_1, T_2 e T_3 em termos de D, h, c_1, c_2 e θ.

(b) Mostre que T_2 assume o seu valor mínimo em sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponha que $D = 1$ km, $T_1 = 0{,}26$ s, $T_2 = 0{,}32$ s, $T_3 = 0{,}34$ s. Ache c_1, c_2 e h.



NOTA □ A geofísica usa essa técnica para estudar a estrutura da camada da Terra, quando está à procura de óleo ou examinando falhas estruturas do terreno.

20. Para quais valores de c existe uma reta que intercepta a curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

em quatro pontos distintos?

21. Um dos problemas propostos pelo marquês de L'Hôspital em seu livro *Analyse des Infinimen Petits* diz respeito a uma polia que está presa ao teto de um cômodo em um ponto C por uma corda de comprimento r. Em outro ponto B do teto, a uma distância d de C (onde $d > r$), um corda de comprimento ℓ é amarrada e essa corda passa pela polia em um ponto F e temos conectada a ela um peso W. O peso é liberado e chega ao seu ponto de equilíbrio na posição D. L'Hôspital argumentou que esse equilíbrio ocorre quando $|ED|$ é maximizado. Mostre que quando o sistema alcança o equilíbrio, o valor de x é

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que essa expressão independe de W e ℓ.

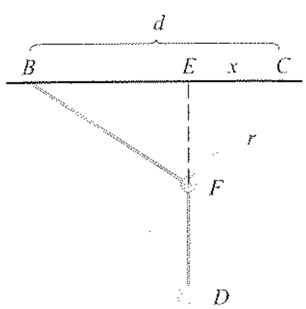


FIGURA PARA O PROBLEMA 21

22. Dada a uma esfera de raio r, ache a altura da pirâmide de menor volume cuja base é um quadrado e cujas bases e faces triangulares são todas tangentes à esfera. E, se a base da pirâmide fosse um polígono com n lados e ângulos iguais? (Use o fato de que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}Ah$, onde A é a área da base.)

23. Suponha que uma bola de neve de maneira que seu volume decresça a uma taxa proporciona a área de sua superfície. Se leva três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume original, quando demorará para a bola de neve derreter completamente?

24. Uma bolha hemisférica é colocada em uma bolha esférica de raio 1. Um bolha hemisférica menor é então colocada dentro da primeira bolha. O processo continua até que sejam formados n compartimentos, incluindo a esfera. (A figura mostra o caso para $n = 4$.) Use a induçã matemática para provar que a altura máxima de qualquer torre de bolhas com n compartimen tos é dada pela expressão $1 + \sqrt{n}$.

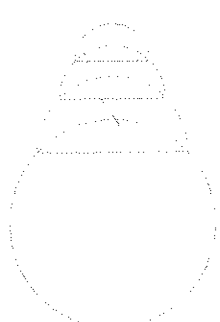
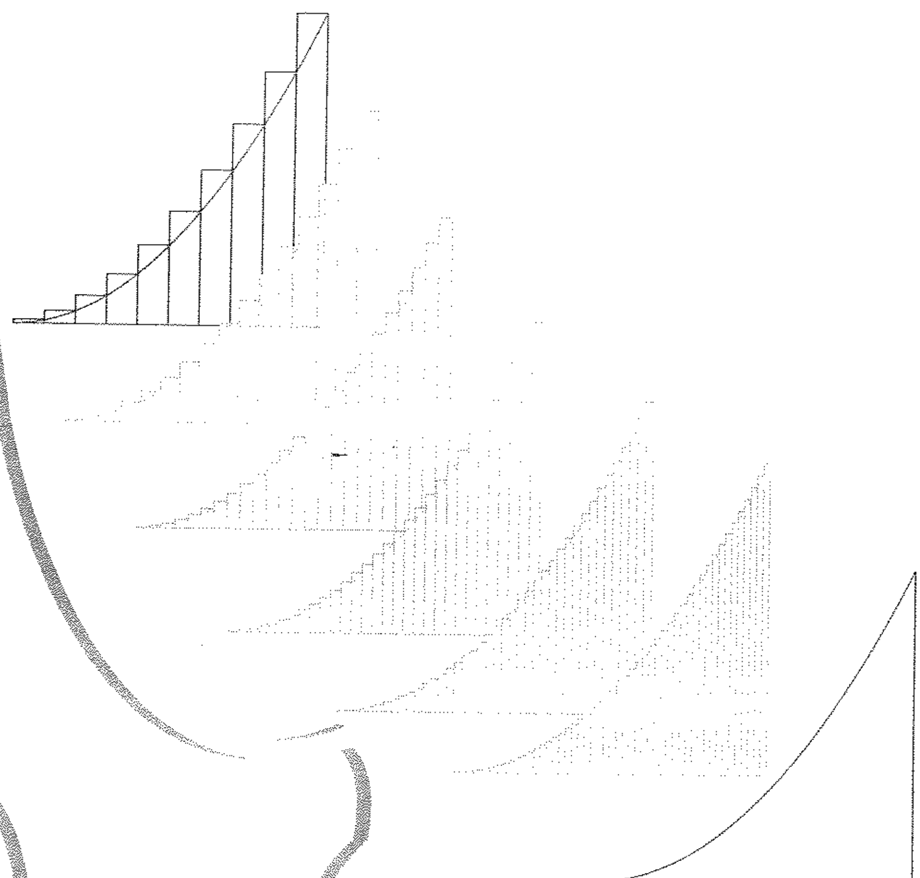


FIGURA PARA O PROBLEMA 24

5

Integrais



Para Calcular uma área, aproximamos a região por retângulos e fazemos com que o número de retângulos se torne cada vez maior. A área exata será o limite das somas das áreas dos retângulos.

Agora é um bom momento de ler (ou reler) a seção *Uma Apresentação do Cálculo* (página 2). Ela discute a unificação das idéias do Cálculo e ajuda a nos por em perspectiva de onde estamos e para onde vamos.

No Capítulo 2 usamos os problemas da tangente e da velocidade para introduzir a derivada, que é a idéia central do cálculo diferencial. Neste capítulo começamos com os problemas da área e da distância e vamos usá-los para formular a idéia de uma integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral. Veremos nos Capítulos 6 e 8 como usar a integral para resolver os problemas concernentes a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre um dique, trabalho, excedente de consumo e beisebol, entre muitos outros.

Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos, neste capítulo, que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas.

5.1 Áreas e Distâncias

Nesta seção vamos descobrir que na tentativa de achar a área sob uma curva ou a distância percorrida por um carro, vamos acabar tendo o mesmo tipo especial de limite.

O Problema da Área

Começamos por tentar resolver o *problema da área*: achar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geqslant 0$], as retas verticais $x = a$ e $x = b$, e o eixo x.

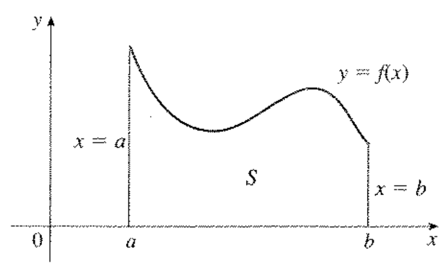


FIGURA 1

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Ao tentar resolver o problema da área devemos nos perguntar: qual o significado da palavra *área*? Essa questão é fácil de ser respondida para as regiões com lados retos. Para um retângulo a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

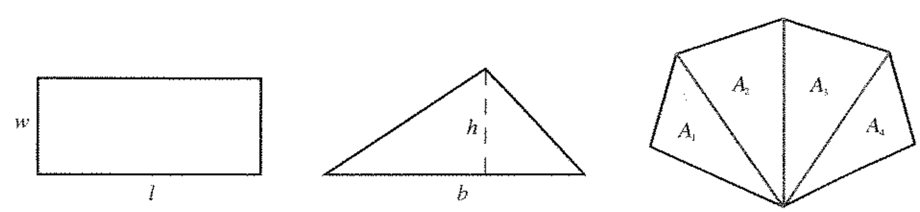


FIGURA 2

$A = lw$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\qquad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Todos nós temos uma idéia intuitiva do que é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa idéia intuitiva dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações. Uma idéia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar aproximamos a região S por retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

EXEMPLO 1 Use os retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

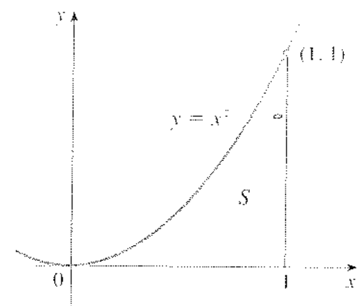


FIGURA 3

SOLUÇÃO Notamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com comprimento de lado 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$ como na Figura 4(a).

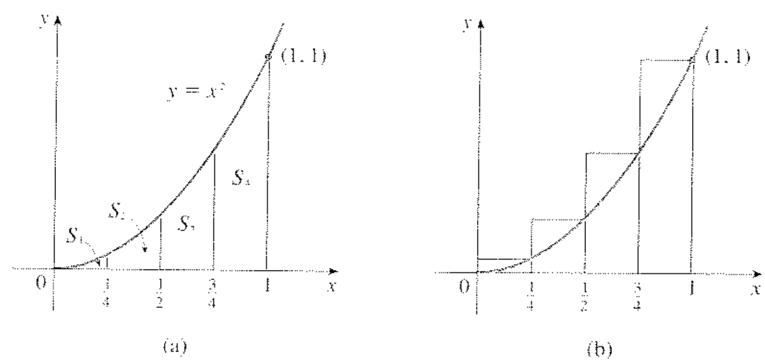


FIGURA 4

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nos extremos direitos dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada um dos retângulos tem largura $\frac{1}{4}$ e as alturas são $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e 1^2. Se chamarmos R_4 a soma das áreas desses retângulos aproximantes, obteremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor do que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

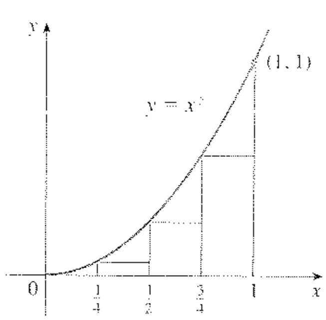


FIGURA 5

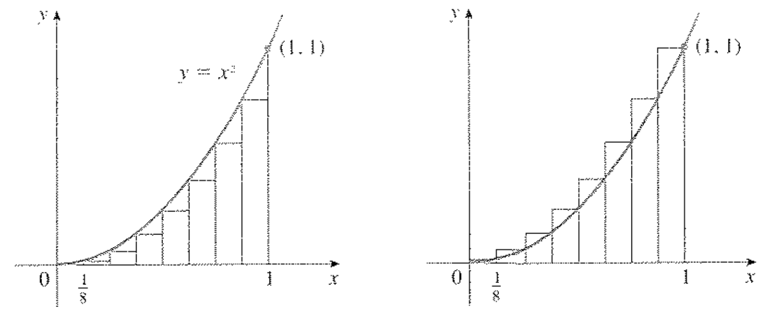
Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b) podemos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas são os valores de f nos extremos esquerdos dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0{,}21875$$

Vimos que a área de S é maior que L_4; assim, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando os extremos esquerdos (b) Usando os extremos direitos

FIGURA 6

Aproximando S com oito retângulos

Computando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375$$

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1.000	0,3328335	0,3338335

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com os extremos esquerdos (L_n) ou com os extremos direitos (R_n). Em particular vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

Dos valores na tabela parece que R_n aproxima-se de $\frac{1}{3}$ à medida que aumentamos n. Vamos confirmar isso no próximo exemplo.

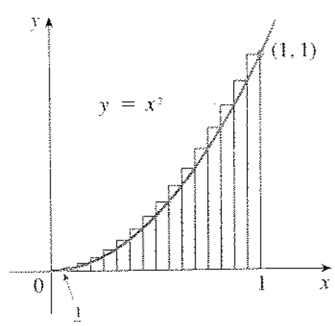


FIGURA 7

EXEMPLO 2 □ Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$.

Assim

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Necessitamos aqui da fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Talvez você já tenha visto essa fórmula antes. Ela está provada no Exemplo 5 do Apêndice E.

Substituindo a Fórmula 1 em nossa expressão para R_n, obtemos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Assim temos

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{1}{3}$$

Estamos computando aqui o limite da seqüência $\{R_n\}$. As seqüências foram discutidas anteriormente e serão estudadas em detalhes no Capítulo 11 do Volume II. Seus limites são calculados da mesma forma que os limites no infinito (Seção 2.6). Em particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Pode ser mostrado que as somas aproximantes e inferiores também tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Das Figuras 8 e 9 vemos que, à medida que aumentamos n, tanto L_n como R_n tornam-se aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto *definimos* a área A como o limite

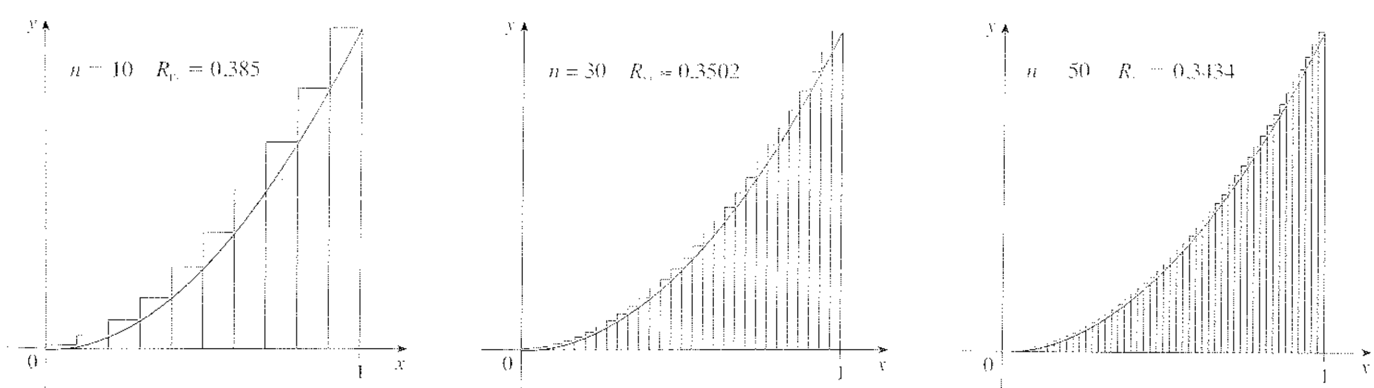


FIGURA 8

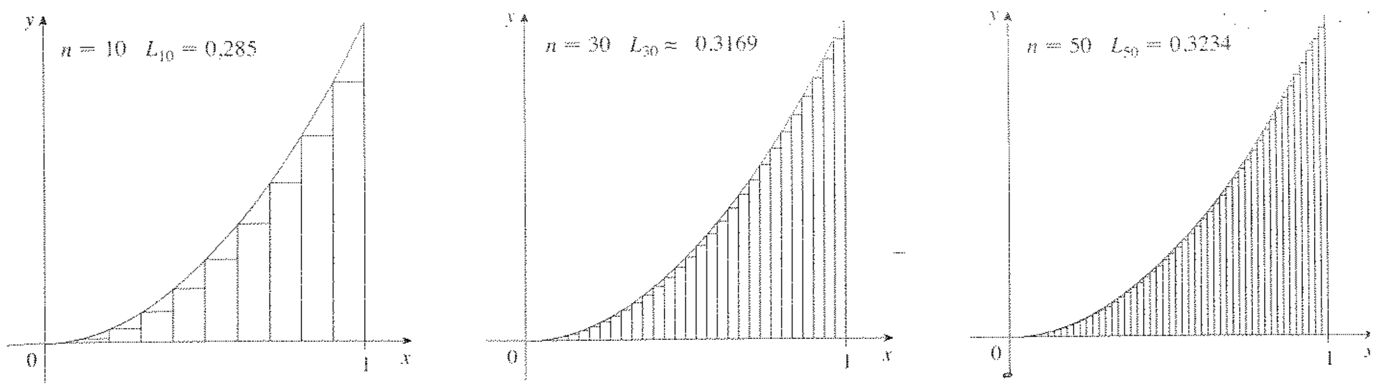


FIGURA 9

□ A área é o número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores.

das somas das áreas dos retângulos aproximantes, isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Vamos aplicar a idéia dos Exemplos 1 e 2 para regiões mais gerais de S da Figura 1. Começamos por subdividir S em n faixas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual largura, como na Figura 10. A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Os extremos direitos dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \quad x_3 = a + 3\,\Delta x, \quad \ldots$$

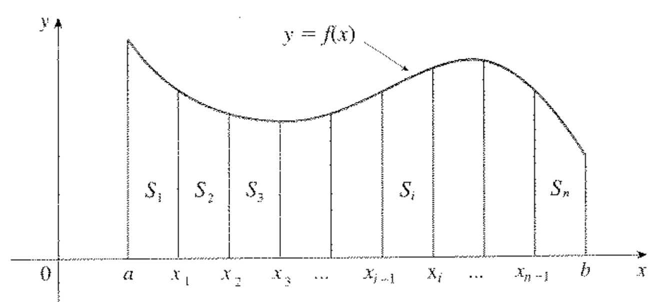


FIGURA 10

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f nos extremos direitos dos subintervalos (veja a Figura 11). Então a área do

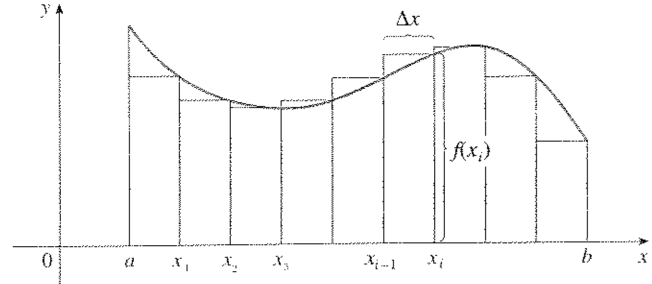
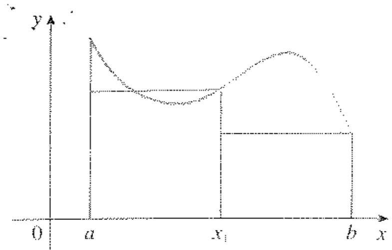


FIGURA 11

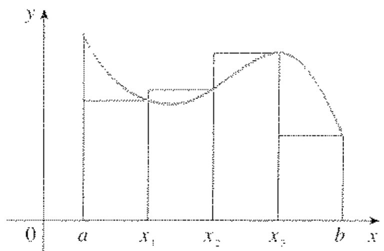
i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que pensamos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

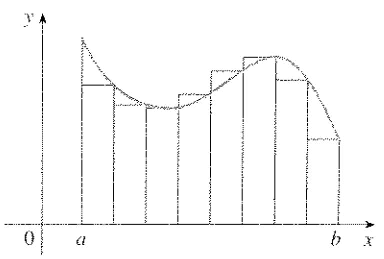
A Figura 12 mostra essa aproximação para $n = 2, 4, 8$ e 12. Observe que essa aproximação aparenta tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$. Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma.



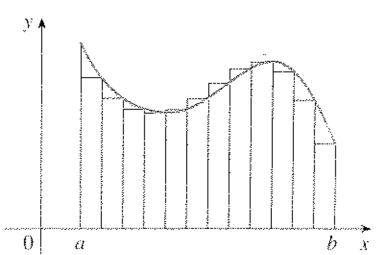
(a) $n = 2$



(b) $n = 4$



(c) $n = 8$



(d) $n = 12$

FIGURA 12

2 Definição A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Pode ser provado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. Pode também ser provado que obteremos o mesmo valor se usarmos os extremos esquerdos dos subintervalos:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De fato, em vez de usar os extremos esquerdo ou direito, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de **pontos amostrais**. A Figura 13 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como os extremos. Logo uma expressão mais geral para a área de S é

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

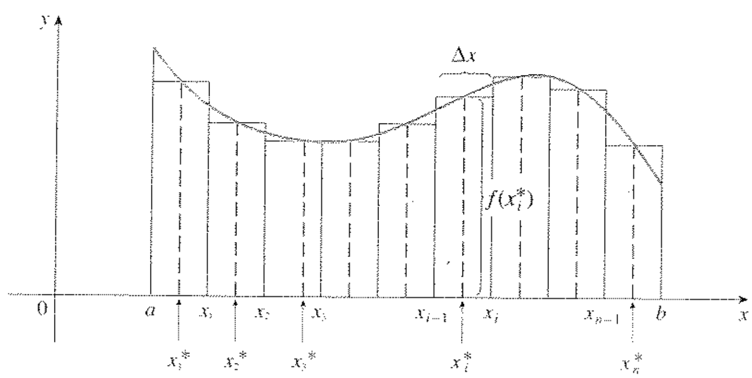


FIGURA 13

Freqüentemente usamos a **notação somatória (notação sigma)** para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

Isso nos diz para parar quando $i = n$.

Isso nos diz para somar. $\longrightarrow \sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Isso nos diz para começar com $i = m$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser inscritas da seguinte forma:

Se você precisar praticar com a notação somatória, veja os exemplos e tente alguns exercícios no Apêndice E.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Também podemos reescrever a Fórmula 1 da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXEMPLO 3 Seja A a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ e $x = 2$.

(a) Usando os extremos direitos, ache uma expressão para A como um limite. Não compute o limite.

(b) Estime a área tomando como pontos amostrais os pontos médios e usando quatro e depois dez subintervalos.

SOLUÇÃO

(a) Uma vez que $a = 0$ e $b = 2$, a largura de um subintervalo é

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

logo $x_1 = 2/n, x_2 = 4/n, x_3 = 6/n, x_i = 2i/n$ e $x_n = 2n/n$. A soma das áreas dos retângulos aproximantes é

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 2, a área é

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Usando a notação somatória podemos escrever

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

É difícil computar esse limite diretamente à mão, mas com à ajuda de um CAS isso não é tão complicado (veja o Exercício 24). Na Seção 5.3 seremos capazes de encontrar mais facilmente A usando um método diferente.

(b) Com $n = 4$ os subintervalos com mesma largura $\Delta x = 0{,}5$ são $[0, 0{,}5]$, $[0{,}5, 1]$, $[1, 1{,}5]$ e $[1{,}5, 2]$. Os pontos médios desses intervalos são $x_1^* = 0{,}25$, $x_2^* = 0{,}75$, $x_3^* = 1{,}25$, e

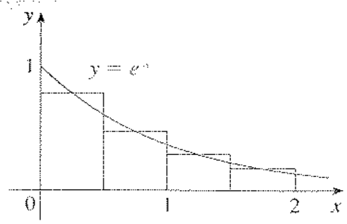


FIGURA 14

$x_4^* = 1{,}75$, e a soma das áreas dos quatro retângulos aproximantes (veja a Figura 14) é

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\
&= f(0{,}25)\,\Delta x + f(0{,}75)\,\Delta x + f(1{,}25)\,\Delta x + f(1{,}75)\,\Delta x \\
&= e^{-0{,}25}(0{,}5) + e^{-0{,}75}(0{,}5) + e^{-1{,}25}(0{,}5) + e^{-1{,}75}(0{,}5) \\
&= \tfrac{1}{2}(e^{-0{,}25} + e^{-0{,}75} + e^{-1{,}25} + e^{-1{,}75}) \approx 0{,}8557
\end{aligned}
$$

Logo uma estimativa para a área é

$$A \approx 0{,}8557$$

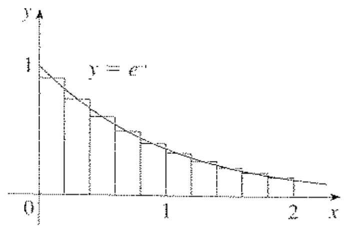


FIGURA 15

Com $n = 10$ os subintervalos são $[0, 0{,}2]$, $[0{,}2, 0{,}4]$, . . . , $[1{,}8, 2]$ e os pontos médios são $x_1^* = 0{,}1, x_2^* = 0{,}3, x_3^* = 0{,}5, \ldots, x_{10}^* = 1{,}9$. Assim

$$
\begin{aligned}
A \approx M_{10} &= f(0{,}1)\,\Delta x + f(0{,}3)\,\Delta x + f(0{,}5)\,\Delta x + \cdots + f(1{,}9)\,\Delta x \\
&= 0{,}2(e^{-0{,}1} + e^{-0{,}3} + e^{-0{,}5} + \cdots + e^{-1{,}9}) \approx 0{,}8632
\end{aligned}
$$

Da Figura 15 fica evidente que essa estimativa é melhor que aquela com $n = 4$.

O Problema da Distância

Vamos considerar agora o *problema da distância*: achar a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo sendo conhecida a velocidade do objeto em todos os instantes. (Em um certo sentido é o problema inverso do problema da velocidade discutido na Seção 2.1.) Se a velocidade permanece constante, então o problema da distância é de fácil solução através da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil encontrar a distância percorrida. Vamos investigar o problema no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 □ Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para ter o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para pés/s (1 mi/h = 5.280/3.600 pés/s):

Tempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (pés/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial

(25 pés/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$25 \text{ pés/s} \times 5 \text{ s} = 125 \text{ pés}$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la como sendo aquela de $t = 5$ s. Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5$ s até $t = 10$ s é

$$31 \text{ pés/s} \times 5 \text{ s} = 155 \text{ pés}$$

Se somarmos as estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obteremos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$25 \times 5 + 31 \times 5 + 35 \times 5 + 43 \times 5 + 47 \times 5 + 46 \times 5 = 1.135 \text{ pés}$$

Podemos da mesma forma usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo e supor a velocidade como sendo constante. Então nossa estimativa fica

$$31 \times 5 + 35 \times 5 + 43 \times 5 + 47 \times 5 + 46 \times 5 + 41 \times 5 = 1.215 \text{ pés}$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, poderemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

Talvez os cálculos no Exemplo 4 o faça lembrar-se das somas usadas anteriormente para estimar as áreas. A similaridade tem explicação quando esboçamos um gráfico da função velocidade do carro na Figura 16 e traçamos os retângulos cujas alturas são as velocidades iniciais para cada intervalo de tempo. A área do primeiro retângulo é $25 \times 5 = 125$, que é também a nossa estimativa para a distância percorrida nos primeiros cinco segundos. De fato, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade e a largura, o tempo. A soma das áreas dos retângulos na Figura 16 é $L_6 = 1.135$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

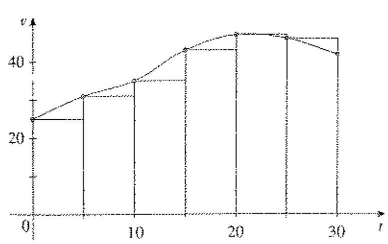


FIGURA 16

Em geral, suponha que um objeto se mova com a velocidade $v = f(t)$, onde $a \leqslant t \leqslant b$ e $f(t) \geqslant 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0 (= a), t_1, t_2, \ldots, t_n (= b)$ de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\,\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Se usarmos as velocidades nos extremos direitos em vez de nos extremos esquerdos, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Quanto maior a freqüência com que medimos a velocidade, mais precisa nossa estimativa; logo, parece plausível que a distância *exata* d percorrida seja o *limite* de tal expressão:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

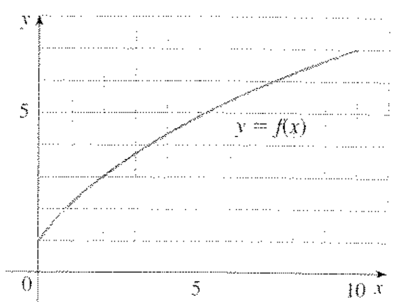
Veremos na Seção 5.4 que isso é realmente verdadeiro.

Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área nas Equações 2 e 3, segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. Nos Capítulos 6 e 8 veremos que outras quantidades de interesse nas ciências naturais e sociais — tais como o trabalho realizado por uma força variável ou a saída de sangue do coração — podem também ser interpretadas como sendo a área sob uma curva. Logo, ao computar áreas neste capítulo, tenha em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

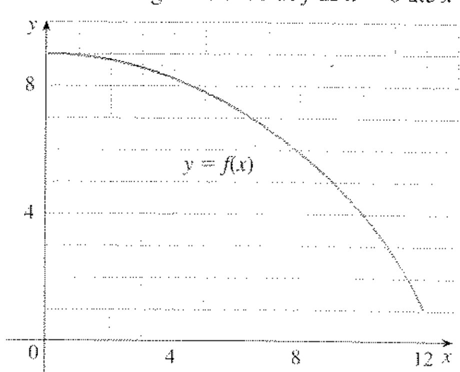
5.1 Exercícios

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize cinco retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 10$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.

(b) Encontre as novas estimativas usando dez retângulos em cada caso.



2. (a) Use seis retângulos para achar as estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.



(i) L_6 (pontos amostrais estão no extremo esquerdo)

(ii) R_6 (pontos amostrais estão no extremo direito)

(iii) M_6 (pontos amostrais estão no ponto médio)

(b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa para a área verdadeira?

(c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa para a área verdadeira?

(d) Entre os números L_6, R_6 e M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.

3. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = 1/x$ de $x = 1$ até $x = 5$ usando quatro retângulos aproximantes e extremos direitos. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?

(b) Repita a parte (a) usando os extremos esquerdos.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = 25 - x^2$ de $x = 0$ até $x = 5$ usando quatro retângulos aproximantes e extremos direitos. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?

(b) Repita a parte (a) usando extremos esquerdos.

5. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremos direitos. Então aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.

(b) Repita a parte (a) usando extremos esquerdos.

(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.

(d) De seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual aparenta ser a melhor estimativa?

6. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) Estime a área sob o gráfico de f usando quatro retângulos aproximantes e tomando pontos amostrais para ser

(i) extremos direitos (ii) pontos médios

Em cada caso, esboce a curva e os retângulos.

(c) Aperfeiçoe suas estimativas da parte (b) usando oito retângulos.

7–8 □ Com uma calculadora programável (ou um computador), é possível calcular as expressões para a soma das áreas dos retângulos aproximantes, mesmo para os valores grandes de n, usando *looping*. (Em uma TI use o comando Is >; em uma Casio use Isz; em uma HP ou no BASIC use um *loop* FOR–NEXT.) Compute a soma das áreas dos retângulos aproximantes utilizando subintervalos iguais e extremos direitos para $n = 10$, 30 e 50. Então conjecture sobre o valor da área exata.

7. A região sob $y = \operatorname{sen} x$ de 0 até π

8. A região sob $y = 1/x^2$ de 1 até 2

9. Alguns sistemas algébricos computacionais têm comandos que traçam retângulos aproximantes e calculam as somas de suas áreas, no mínimo se x_i^* é um extremo esquerdo ou direito. (Por exemplo, no Maple use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` e `rightsum`.)

(a) Se $f(x) = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, ache as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.

(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).

(c) Mostre que a área exata sob f está entre 4,6 e 4,7.

CAS **10.** (a) Se $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, use os comandos discutidos no Exercício 9 para encontrar as somas esquerda e direita para $n = 10$, 30 e 50.

(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).

(c) Mostre que a área exata sob f está entre 0,87 e 0,91.

11. A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade na metade do segundo intervalo é dada em uma tabela. Ache as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorreu durante esses três segundos.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (pés/s)	0	6,2	10,8	14,9	18,1	19,4	20,2

12. A leitura do odômetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v(pés/s)	30	28	25	22	24	27

(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.

(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.

(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

13. O óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Ache a estimativa superior e inferior para a quantidade total que vazou.

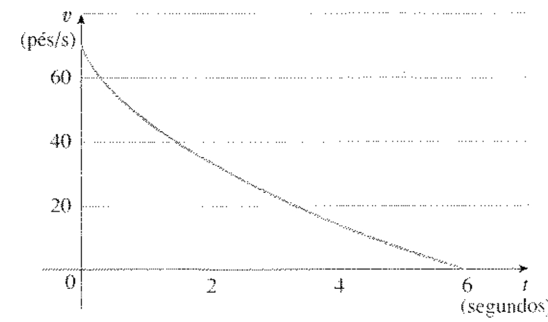
$t(h)$	0	2	4	6	8	10
$r(t)$(L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

14. Quando estimamos as distâncias a partir dos dados das velocidades, algumas vezes é necessário usar tempos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que não estão igualmente espaçados. Podemos ainda estimar as distâncias usando o período de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por exemplo, em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49 cujo propósito era instalar o satélite de comunicação Intelsat. A tabela, fornecida pela NASA, mostra os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em funcionamento dos foguetes auxiliares.

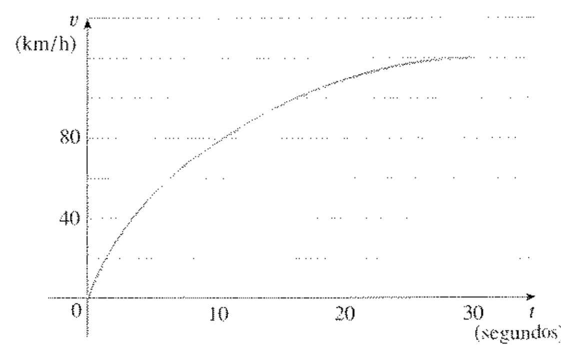
[illegible]	[illegible]	[illegible]
Lançamento	0	[illegible]
Começo da manobra de inclinação	10	[illegible]
Fim da manobra de inclinação	15	[illegible]
Acelerando para 89%	20	[illegible]
Acelerando para 67%	32	[illegible]
Acelerando para 104%	59	1.325
Pressão dinâmica máxima	62	1.445
Separação dos foguetes auxiliares	125	4.151

Utilize esses dados para estimar a altura do ônibus espacial, acima da superfície da Terra, 62 segundos após seu lançamento.

15. O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.



16. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.



17–19 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

17. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 16$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $3 \leqslant x \leqslant 10$

19. $f(x) = x \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

20–21 Determine a região com área igual ao limite dado. Não calcule o limite

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \operatorname{tg} \frac{i\pi}{4n}$

22. (a) Utilize a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob a curva $y = x^3$ de 0 a 1 como um limite.

(b) A fórmula a seguir para a soma dos cubos dos primeiros n inteiros está provada no Apêndice E. Use-a para calcular o limite da parte (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

23. (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.

(b) Use um sistema algébrico computacional para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).

(c) Calcule o limite da parte (a).

24. Ache o valor exato da região sob o gráfico $y = e^{-x}$ de 0 até 2 usando um sistema algébrico computacional para calcular a soma e então o limite no Exemplo 3(a). Compare sua resposta com a estimativa obtida no Exemplo 3(b).

25. Encontre a área exata sob a curva cosseno $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = b$, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use um sistema algébrico computacional para calcular a soma e computar o limite.) Em particular, qual é a área se $b = \pi/2$?

26. (a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito em um círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central $2\pi/n$, mostre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugestão*: Use a Equação 3.4.2.]

5.2 A Integral Definida

Vimos na Seção 5.1 que um limite da forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

aparece quando computamos uma área. Vimos também que ele aparece quando tentamos achar a distância percorrida por um objeto. Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Nos Capítulos 6 e 8 veremos que os limites da forma (1) também surgem no processo de encontrar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massas, forças devido à pressão da água e trabalho, como também outras quantidades. Daremos, portanto, a esse tipo de limite um nome e notação especiais.

$\boxed{2}$ **Definição de Integral Definida** Se f é uma função contínua definida por $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Seja $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\ (= b)$ os extremos desses subintervalos e vamos escolher os **pontos amostrais** $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ nesses subintervalos de forma que x_i^* está no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então **a integral definida de f de a para b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Uma vez que assumimos f como contínua, pode ser provado que o limite da Definição 2 sempre existe e fornece o mesmo valor, não importando como escolhemos os pontos amostrais x_i^*. Se tomarmos os pontos amostrais como os extremos direitos, então $x_i^* = x_i$, e a definição de integral fica

$$\boxed{3} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Se escolhermos os pontos amostrais como os extremos esquerdos, então $x_i^* = x_{i-1}$, e a definição fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Alternativamente, podemos escolher x_i^* como o ponto médio do subintervalo ou qualquer outro número entre x_{i-1} e x_i.

Embora a maioria das funções que encontramos seja contínua, o limite na Definição 2 também existe se f tiver um número finito de descontinuidades removíveis ou saltos (mas não descontinuidades infinitas). (Veja a Seção 2.5.) Assim, podemos também estabelecer a integral definida para essas funções.

NOTA 1 □ O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$, é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**, e o símbolo dx por si só não tem um significado oficial; $\int_a^b f(x)\,dx$ é todo um símbolo. O processo de calcular uma integral é conhecido como **integração**.

NOTA 2 □ A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número; não depende de x. De fato, em vez de x podemos usar qualquer outra letra sem mudar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 □ A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Sabemos que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1). Comparando a Definição 2 com a definição de área da Seção 5.1 vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2).

□ Bernhard Riemann tornou-se PhD sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como "uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil". A Definição 2 de integral que usamos se deve a Riemann. Ele também fez grandes contribuições para a teoria de funções de uma variável complexa, física, matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria. O conceito de espaço amplo de Riemann e a geometria resultaram ser a colocação correta, 50 anos mais tarde, para a teoria da relatividade geral de Einstein. Riemann, que nunca teve boa saúde, morreu de tuberculose aos 39 anos.

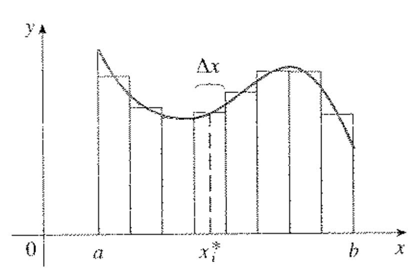


FIGURA 1

Se $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann $\Sigma\, f(x_i^*)\,\Delta x$ é a soma de áreas de retângulos.

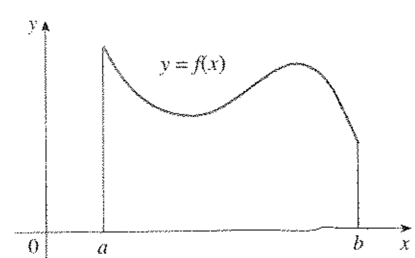


FIGURA 2

Se $f(x) \geq 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

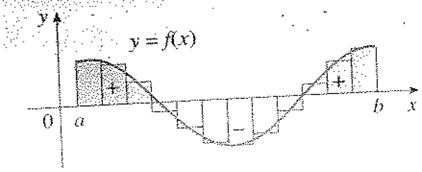


FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ é uma aproximação para a área líquida

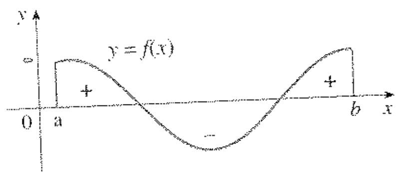


FIGURA 4
$\int_b^a f(x)\,dx$ é a área líquida

Se f assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e o *negativo* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (as áreas dos retângulos cinza menos as áreas dos retângulos azuis). Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área líquida**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

onde A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

NOTA 4 □ No espírito da precisa definição de limite de uma função na Seção 2.4, podemos escrever o significado exato de limite que define a integral na Definição 2 como:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

para todo $n > N$ e toda escolha de x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$.

Isso significa que a integral definida pode ser aproximada por uma soma de Riemann com qualquer grau de precisão desejado.

NOTA 5 □ Embora tenhamos definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, há situações nas quais é vantajoso trabalhar com os intervalos de comprimentos diferentes. Por exemplo, no Exercício 14 da Seção 5.1, a Nasa forneceu dados de velocidade em instantes que não são igualmente espaçados, mas mesmo assim fomos capazes de estimar a distância percorrida. E existem métodos para a integração numérica que tiram vantagem dos subintervalos desiguais.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, teremos de garantir que todos esses comprimentos tendem a 0 no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, $\text{máx}\,\Delta x_i$, tender a 0. Portanto, nesse caso a definição de uma integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

EXEMPLO 1 □ Expresse

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\Delta x$$

como uma integral no intervalo $[0, \pi]$.

SOLUÇÃO Comparando o limite dado com o limite da Definição 2 vemos que eles são idênticos se escolhermos

$$f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad x_i^* = x_i$$

(Logo os pontos amostrais são os extremos direitos, e o limite dado é da forma da Equação 3.) Foi dado que $a = 0$ e $b = \pi$. Portanto, pela Definição 2 ou Equação 3, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i]\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$

Mais tarde, quando aplicarmos a integral definida a situações físicas, será importante reconhecer os limites de somas como integrais, como fizemos no Exemplo 1. Quando Leibniz escolheu a notação para a integral, ele optou por ingredientes que lembrassem o processo de limite. Em geral, quando escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

substituímos $\lim \Sigma$ por $\int$, x_i^* por x e Δx por dx.

Cálculo de Integrais

Quando usamos a definição para calcular uma integral definida, precisamos saber como trabalhar com somas. As três equações a seguir dão fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos. A Equação 4 talvez lhe seja familiar de um curso de álgebra. As Equações 5 e 6 foram discutidas na Seção 5.1 e estão provadas no Apêndice E.

$$\boxed{4} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{5} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

As fórmulas remanescentes são regras simples para trabalhar com a notação somatória.

□ As Fórmulas 7-10 são provadas escrevendo-se cada lado na forma expandida. O lado esquerdo da Equação 8 é

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

O lado direito é

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Eles são iguais pela propriedade distributiva. As outras fórmulas estão discutidas no Apêndice E.

$$\boxed{7} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\boxed{8} \qquad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\boxed{9} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\boxed{10} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EXEMPLO 2 □

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando como pontos amostrais os extremos direitos e $a = 0$, $b = 3$ e $n = 6$.

(b) Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO

(a) Com $n = 6$ o comprimento dos intervalos é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

e os extremos direitos são $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1{,}0$; $x_3 = 1{,}5$; $x_4 = 2{,}0$; $x_5 = 2{,}5$ e $x_6 = 3{,}0$. Logo a soma de Riemann é

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0{,}5)\,\Delta x + f(1{,}0)\,\Delta x + f(1{,}5)\,\Delta x + f(2{,}0)\,\Delta x + f(2{,}5)\,\Delta x + f(3{,}0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9) \\ &= -3{,}9375 \end{aligned}$$

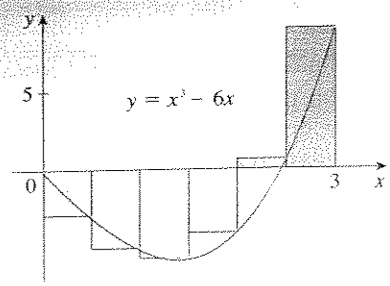


FIGURA 5

Observe que f não é uma função positiva e, portanto, a soma de Riemann não representa uma soma de áreas de retângulos. Mas ela representa a soma das áreas dos retângulos cinza (acima do eixo x) menos a soma das áreas dos retângulos azuis (abaixo do eixo x) na Figura 5.

(b) Com n subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Uma vez que estamos utilizando os extremos direitos, podemos usar a Equação 3:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Equação 8 com } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Equações 10 e 8)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

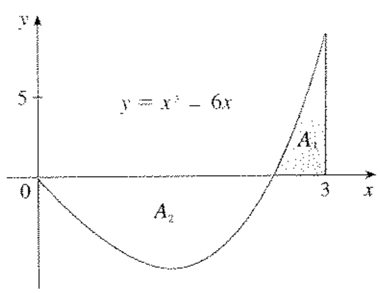


FIGURA 6

$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6{,}75$

Essa integral não pode ser interpretada como uma área, pois f assume os valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 - A_2$, e A_1 e A_2 estão na Figura 6.

A Figura 7 ilustra o cálculo mostrando os termos positivos e negativos na soma de Riemann direita R_n para $n = 40$. Os valores na tabela mostram as somas de Riemann tendendo ao valor exato da integral, $-6{,}75$, quando $n \to \infty$.

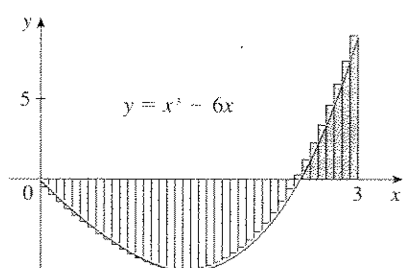


FIGURA 7

$R_{40} \approx -6{,}3998$

n	R_n
40	$-6{,}3998$
100	$-6{,}6130$
500	$-6{,}7229$
1.000	$-6{,}7365$
5.000	$-6{,}7473$

Um método muito mais simples para o cálculo da integral do Exemplo 2 será dado na Seção 5.3.

□ Como $f(x) = e^x$ é positiva, a integral no Exemplo 3 representa a área mostrada na Figura 8.

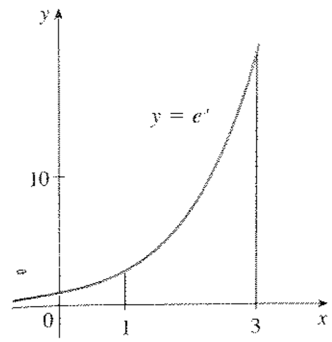


FIGURA 8

EXEMPLO 3

(a) Estabeleça uma expressão para $\int_1^3 e^x\,dx$ como um limite de somas.

(b) Use um CAS para calcular a expressão.

SOLUÇÃO

(a) Temos aqui $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ e

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

Logo $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ e

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Da Equação 3, obtemos

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

(b) Se utilizarmos um CAS para calcular a soma e simplificar, obteremos

□ Um CAS é capaz de encontrar uma expressão explícita para essa soma, pois ela é uma série geométrica. O limite pode ser encontrado usando-se a Regra de L'Hôspital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Agora usamos o CAS para calcular o limite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

Na próxima seção, iremos aprender um método muito mais fácil para calcular integrais.

EXEMPLO 4 Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$

(b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

SOLUÇÃO

(a) Uma vez que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar essa integral como a área sob a curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ de 0 até 1. Mas, uma vez que $y^2 = 1 - x^2$, temos $x^2 + y^2 = 1$, o que mostra que o gráfico de f é um quarto de círculo de raio 1 na Figura 9. Portanto

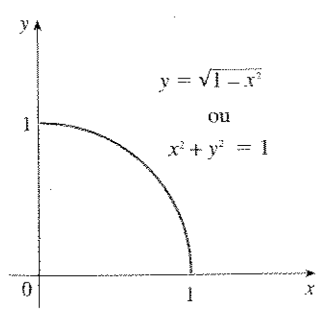


FIGURA 9

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(Na Seção 7.3 seremos capazes de *provar* que a área de um círculo de raio r é πr^2.)

(b) O gráfico de $y = x - 1$ é a reta com inclinação 1 mostrada na Figura 10. Calculamos a integral como a diferença das áreas de dois triângulos:

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1{,}5$$

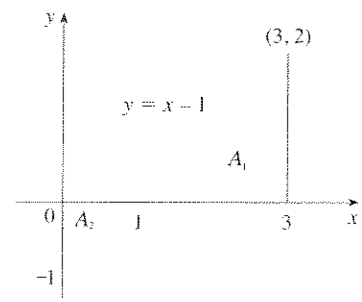


FIGURA 10

A Regra do Ponto Médio

Freqüentemente escolhemos o ponto amostral x_i^* como o extremo direito do i-ésimo intervalo, pois isso é conveniente para o cálculo do limite. Porém, se o propósito for encontrar uma *aproximação* para uma integral, é geralmente melhor escolher x_i^* como o ponto médio do intervalo, o qual denotamos por $\bar{x}_i$. Qualquer soma de Riemann é uma aproximação para uma integral, mas se usarmos os pontos médios obteremos a seguinte aproximação.

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

e $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = $ ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$

EXEMPLO 5 □ Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Os extremos dos cinco subintervalos são 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 e 2,0, portanto, os pontos são 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 e 1,9. O comprimento dos subintervalos é $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, logo a Regra do Ponto Médio dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908$$

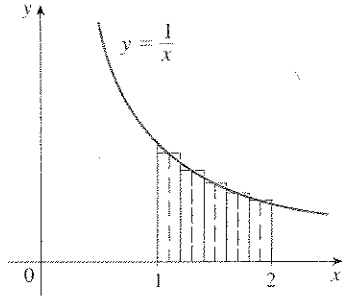


FIGURA 11

Uma vez que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, a integral representa uma área, e a aproximação dada pela Regra do Ponto Médio é a soma das áreas dos retângulos mostrados na Figura 11.

Por ora, não sabemos quão precisa é a aproximação do Exemplo 5, mas na Seção 7.7 vamos aprender um método para estimar o erro envolvido no uso da Regra do Ponto Médio. Então discutiremos outros métodos de aproximação de integrais definidas.

Se aplicarmos a Regra do Ponto Médio na integral no Exemplo 2, obteremos o que está mostrado na Figura 12. A aproximação $M_{40} \approx -6{,}7563$ está muito mais perto do valor verdadeiro $-6{,}75$ do que a aproximação pelo extremo direito, $R_{40} \approx -6{,}3998$, mostrada na Figura 7.

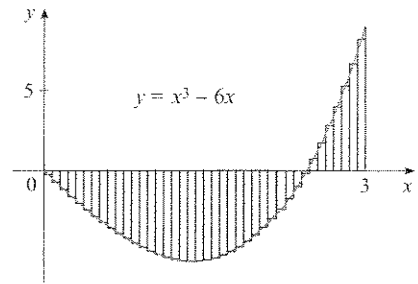


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6{,}7563$

Propriedades da Integral Definida

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implicitamente assumimos que $a < b$. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que $a > b$. Observe que se invertermos a e b, então Δx mudará de $(b - a)/n$ para $(a - b)/n$. Portanto

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, e

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de uma forma mais simples. Vamos supor que f e g sejam funções contínuas.

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

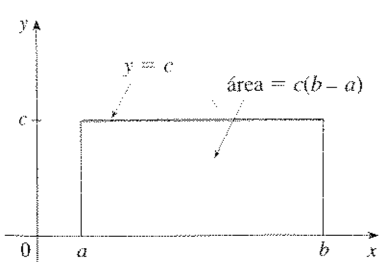


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

A Propriedade 1 estabelece que a integral de uma função constante $f(x) = c$ é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se $c > 0$ e $a < b$, isto é esperado, pois $c(b - a)$ é a área do retângulo sombreada na Figura 13.

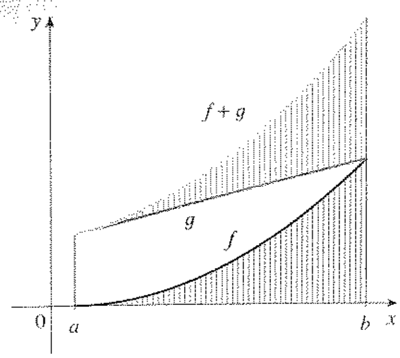


FIGURA 14

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$$

□ A Propriedade 3 parece intuitivamente razoável, pois sabemos que multiplicar uma função por um número positivo c estica ou comprime verticalmente seu gráfico por um fator de c. Logo estica ou comprime cada retângulo aproximante por um fator de c, e, portanto, tem o efeito de multiplicar a área por c.

A Propriedade 2 estabelece que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas isso estabelece que a área sob $f + g$ é a área sob f mais a área sob g. A Figura 14 nos ajuda a entender por que isto é verdadeiro: em vista de como funciona a adição gráfica, os segmentos de reta vertical correspondentes têm a mesma altura.

Em geral, a Propriedade 2 segue da Equação 3 e do fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

A Propriedade 3 pode ser provada de forma análoga e estabelece que a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função. Em outras palavras, uma constante (mas *somente uma* constante) pode ser colocada na frente de um sinal de integração. A Propriedade 4 é provada escrevendo-se $f - g = f + (-g)$ e usando-se as Propriedades 2 e 3 com $c = -1$.

EXEMPLO 6 □ Use as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 2 e 3 das integrais, temos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Sabemos da Propriedade 1 que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

e encontramos no Exemplo 2 da Seção 5.1 que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

A propriedade a seguir estabelece como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

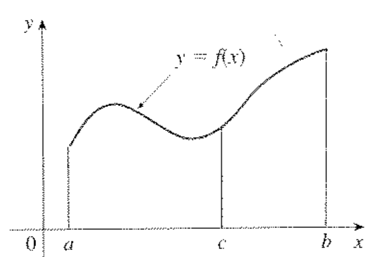


FIGURA 15

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Isto não é fácil de ser provado em geral, mas para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $a < c < b$ a Propriedade 5 pode ser vista a partir da interpretação geométrica na Figura 15: a área sob $y = f(x)$ de a até c mais a área de c até b é igual à área total de a até b.

EXEMPLO 7 Se $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ e $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, ache $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 5 temos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

logo $$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

Observe que as Propriedades 1–5 são verdadeiras se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As pro priedades a seguir, nas quais comparamos os tamanhos de funções e os de integrais, sã verdadeiras somente se $a \leqslant b$.

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de f, logo a interpretaçã geométrica da Propriedade 6 é simplesmente que as áreas são positivas. Mas a propriedad pode ser provada da definição de integral (Exercício 64). A Propriedade 7 estabelece qu uma função maior tem uma integral maior. Ela segue das Propriedades 6 e 4, po $f - g \geqslant 0$.

A Propriedade 8 está ilustrada na Figura 16 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$. Se f for co tínua poderemos tomar m e M como o máximo e o mínimo absolutos de f no interval $[a, b]$. Nesse caso a Propriedade 8 estabelece que a área sob o gráfico de f é maior que área do retângulo com altura m e menor que área do retângulo como altura M.

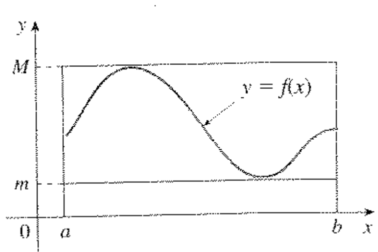


FIGURA 16

Prova da Propriedade 8 Uma vez que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, a Propriedade 7 nos dá

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Usando a Propriedade 1 para calcular a integral do lado esquerdo e do lado direito, obtem

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

A Propriedade 8 é proveitosa quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira tamanho de uma integral, ou seja, sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio

EXEMPLO 8 Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

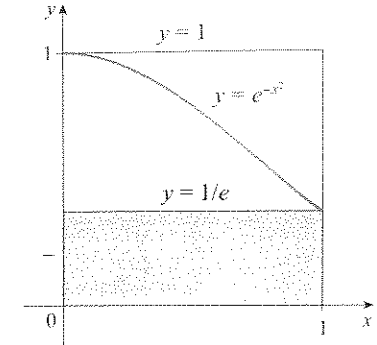


FIGURA 17

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo $[0, 1]$, seu máximo é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, usando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0{,}3679$, podemos escrever

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

O resultado do Exemplo 8 é ilustrado na Figura 17. A integral é maior do que a área do retângulo inferior e menor do que a área do quadrado.

5.2 Exercícios

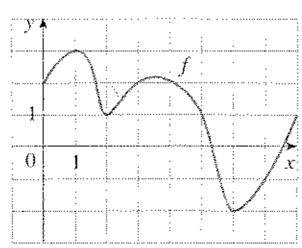
1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2, 0 \leqslant x \leqslant 2$, com quatro subintervalos, tomando os pontos amostrais como os extremos direitos. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2. Se $f(x) = \ln x - 1, 1 \leqslant x \leqslant 4$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais os extremos esquerdos. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

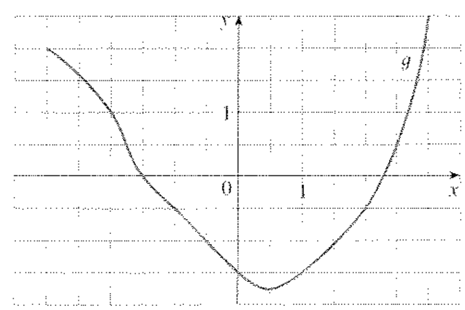
3. Se $f(x) = \sqrt{x} - 2, 1 \leqslant x \leqslant 6$, calcule a soma de Riemann com $n = 5$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Ache a soma de Riemann para $f(x) = x - 2\,\text{sen}\,2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, com seis termos, tomando como pontos amostrais os extremos direitos. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) Explique o que representa a soma de Riemann com a ajuda de um esboço.
   (b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

5. É dado o gráfico de uma função f. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ utilizando quatro subintervalos com (a) extremos direitos, (b) extremos esquerdos e (c) pontos médios.



6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremos direitos, (b) extremos esquerdos e (c) pontos médios.



7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. A tabela fornece os valores de uma função obtidos experimentalmente. Use-os para estimar $\int_0^6 f(x)\,dx$ utilizando três subintervalos iguais com (a) extremos direitos, (b) extremos esquerdos e (c) pontos médios. Se for sabido que a função é decrescente, você pode dizer se suas estimativas são menores ou maiores que o valor exato da integral?

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	9,3	9,0	8,3	6,5	2,3	$-7{,}6$	$-10{,}5$

9–12 □ Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3+1}\,dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi} \sec(x/3)\,dx, \quad n = 6$

11. $\int_2^{1} \text{sen}(x^2)\,dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^{5} x^2 e^{-x}\,dx, \quad n = 4$

13. Se você tiver um CAS que possa calcular as aproximações pelo Ponto Médio e fazer o gráfico dos retângulos correspondentes (use os comandos `middlesum` e `middlebox` do Maple), verifique a resposta do Exercício 11 e ilustre com um gráfico. Repita então com $n = 10$ e $n = 20$.

14. Com uma calculadora programável ou computador (veja as instruções para o Exercício 7 da Seção 5.1), calcule as somas de Riemann esquerda e direita para a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ no intervalo $[0, 1]$ com $n = 100$. Explique por que essas estimativas mostram ser

$$0{,}306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx < 0{,}315$$

Deduza que a aproximação usando a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ no Exercício 11 é precisa até a segunda casa decimal.

15. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas R_n de Riemann à direita para a integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. Para qual valor esses números parecem estar se aproximando?

16. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas L_n e R_n de Riemann à esquerda e à direita para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. Entre quais dois números o valor da integral deve ficar? Você pode fazer uma proposição análoga para a integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$? Explique.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \operatorname{sen} x_i \,\Delta x, \quad [0, \pi]$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{e^{x_i}}{1 + x_i}\,\Delta x, \quad [1, 5]$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x, \quad [1, 8]$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\Delta x \quad [0, 2]$

21–25 Use a forma da definição de integral dada na Equação 3 para computar a integral.

21. $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\,dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\,dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\,dx$

24. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\,dx$

25. $\int_1^2 x^3\,dx$

26. (a) Ache uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando uma soma de Riemann com os extremos direitos e $n = 8$.
(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).
(c) Use a Equação 3 para computar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.
(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

27. Prove que $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Prove que $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Expresse a integral como um limite de somas. Então calcule, usando um sistema algébrico computacional para achar a soma e o limite

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\,dx$

30. $\int_1^{10} (x^2 - 4\ln x)\,dx$

31–32 Expresse a integral como um limite de somas. Depois, avalie usando um sistema algébrico computacional para achar a soma e o limite

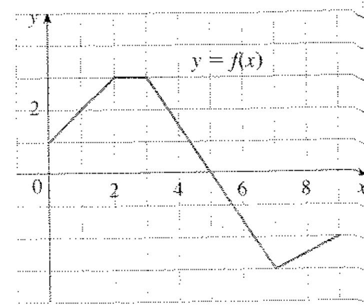
31. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\,dx$

31. $\int_2^{10} x^6\,dx$

33. O gráfico de f está mostrado. Calcule cada integral interpretando-a em termos das áreas.

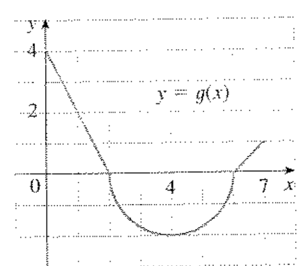
(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



34. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



35–40 Calcule a integral interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_0^3 (\frac{1}{2}x - 1)\,dx$

36. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$

37. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

38. $\int_{-1}^{3} (3 - 2x)\,dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\,dx$

41. Dado que $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, quanto é $\int_9^4 \sqrt{t}\,dt$?

42. Calcule $\int_1^1 x^2 \cos x\, dx$.

43. No Exemplo 2 da Seção 5.1 mostramos que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Use esse fato e as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (5 - 6x^2)\, dx$.

44. Use as propriedades das integrais e o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Use o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. Use o resultado do Exercício 27 e o fato de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (do Exercício 25 na Seção 5.1), junto com as propriedades das integrais, para calcular $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 5x)\, dx$.

47. Escreva como uma integral única no formato $\int_a^b f(x)\, dx$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{5} f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\, dx = 3{,}6$, ache $\int_1^4 f(x)\, dx$.

49. Se $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$, e $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, ache $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$

50. Ache $\int_0^5 f(x)\, dx$ se $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

51–54 □ Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

51. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\, dx \leq \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

52. $\int_1^2 \sqrt{5 - x}\, dx \geq \int_1^2 \sqrt{x + 1}\, dx$

53. $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\pi}{6} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx \leq \dfrac{\pi}{3}$

55–60 □ Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

55. $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

56. $\int_0^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

59. $\int_0^2 x e^{-x}\, dx$

60. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

61–62 □ Use as propriedades das integrais, junto com os Exercícios 27 e 28, para provar a desigualdade.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geq \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Prove a Propriedade 3 das integrais.

64. Prove a Propriedade 6 das integrais.

65. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugestão*: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.]

66. Use o resultado do Exercício 65 para mostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

67–68 □ Expresse o limite como uma integral definida.

67. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugestão*: Considere $f(x) = x^4$.]

68. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

69. Ache $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. [*Sugestão*: Escolha x_i^* como a média geométrica de x_{i-1} e x_i (isto é, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1} x_i}$) e use a identidade

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

Projeto Descoberta — Funções Áreas

1. (a) Trace a reta $y = 2t + 1$ e use a geometria para achar a área sob essa reta, acima do eixo t, e entre as retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.

(b) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região que está sob a reta $y = 2t + 1$ entre $t = 1$ e $t = x$. Esboce essa região e use a geometria para achar uma expressão para $A(x)$.

(c) Diferencie a função área $A(x)$. O que você nota?

2. (a) Se $x \geq -1$, seja

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa a área de uma região. Esboce essa região.

(b) Use o resultado do Exercício 28 da Seção 5.2 para encontrar uma expressão para $A(x)$.

(c) Ache $A'(x)$. O que você nota?

(d) Se $x \geqslant -1$ e h é um número positivo pequeno, então $A(x + h) - A(x)$ representa a área de uma região. Descreva e esboce a região.

(e) Trace um retângulo que aproxime a região da parte (d). Comparando as áreas dessas duas regiões, mostre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Use a parte (e) para dar uma explicação intuitiva para o resultado da parte (c).

3. (a) Trace o gráfico da função $f(x) = \cos(x^2)$ na janela de inspeção $[0, 2]$ por $[-1{,}25, 1{,}25]$.

(b) Se definirmos uma nova função g por

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

então $g(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $f(x)$ torna-se negativa, onde $g(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. Use a parte (a) para determinar o valor de x no qual $g(x)$ começa a decrescer. [Diferente da integral do Problema 2, é impossível calcular a integral definindo g para obter uma expressão explícita para $g(x)$.]

(c) Use o comando de integração em sua calculadora ou computador para estimar $g(0{,}2)$, $g(0{,}4)$, $g(0{,}6)$, ..., $g(1{,}8)$, $g(2)$. Então use esses valores para esboçar um gráfico de g.

(d) Use seu gráfico de g da parte (c) para esboçar o gráfico de g' usando a interpretação de $g'(x)$ como a inclinação de uma reta tangente. Como comparar g' com o gráfico de f?

4. Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Baseado nos resultados dos Problemas 1–3, conjecture uma expressão para $g'(x)$.

5.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão de fato estreitamente relacionados. Ele percebeu que a diferenciação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a precisa relação inversa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitou a computar as áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como fizemos nas Seções 5.1 e 5.2.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

onde f é uma função contínua em $[a, b]$ e x varia entre a e b. Observe que g depende somente de x, que aparece como a variável superior do limite na integral. Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\, dt$ é um número definido. Se variamos x, o número $\int_a^x f(t)\, dt$ também varia e define uma função de x denotada por $g(x)$. Se f for uma função positiva então $g(x)$ pode ser interpretada como uma área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode variar de a até b. (Imagine g como a função "área até aqui", veja a Figura 1.)

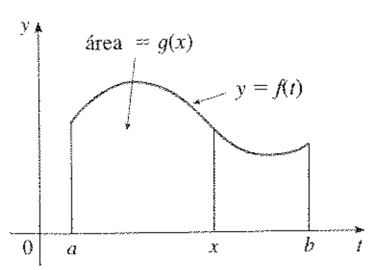
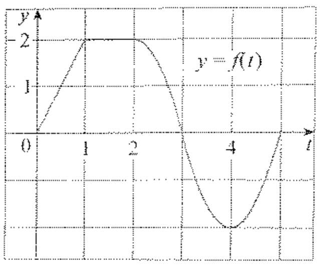


FIGURA 1



EXEMPLO 1 Se f é a função contínua cujo gráfico está mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, ache os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico der g.

SOLUÇÃO Primeiro note que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. Da Figura 3, sabemos que $g(1)$ é a área do triângulo:

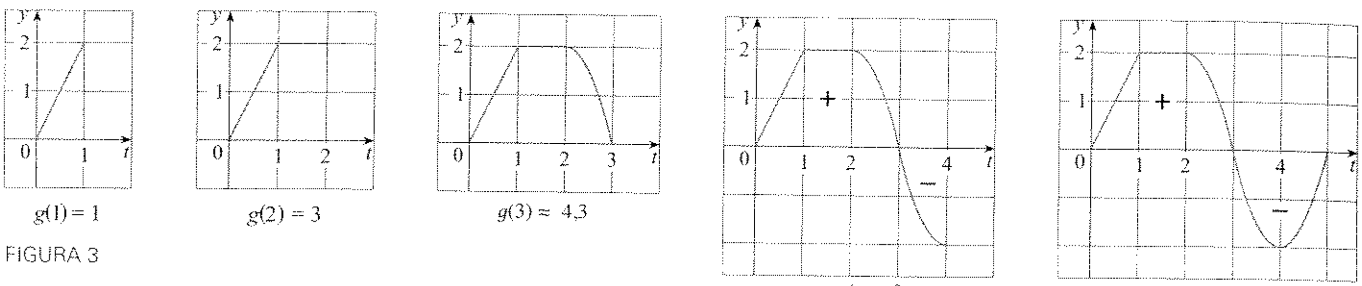
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para achar $g(2)$ somamos $g(1)$ a área de um retângulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que a área abaixo da curva definida por f no intervalo de 2 a 3 é aproximadamente 1,3, assim,

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1{,}3 = 4{,}3$$



$g(1) = 1$ $g(2) = 3$ $g(3) \approx 4{,}3$ $g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1{,}7$

FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ é negativo e, dessa forma, começamos a subtrair as áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4{,}3 + (-1{,}3) = 3{,}0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1{,}3) = 1{,}7$$

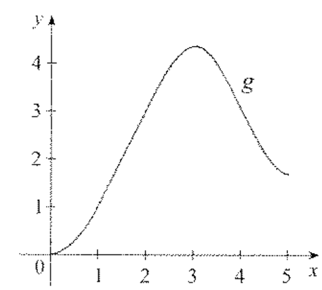


FIGURA 4

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Usamos esses valores para fazer um esboço do gráfico de g apresentado na Figura 4. Observe que, pelo fato de $f(t)$ ser positiva para $t < 3$, continuamos adicionando área para $t < 3$ e assim g é crescente até $x = 3$, onde atinge o seu valor máximo. Para $x > 3$, g decresce porque $f(t)$ é negativo.

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Note que $g'(x) = x$, isto é, $g' = f$. Em outras palavras, se g for definida como a integral de f pela Equação 1, então g resulta ser uma antiderivada de f, pelo menos nesse caso. E se esboçarmos a derivada da função g mostrada na Figura 4 pelas inclinações estimadas das tangentes, teremos um gráfico semelhante ao de f na Figura 2. Portanto, suspeitamos que $g' = f$, também, no Exemplo 1.

Para ver por que isso pode ser verdadeiro, em geral consideramos qualquer função contínua f com $f(x) \geqslant 0$. Então $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, como na Figura 1.

A fim de computar $g'(x)$ da definição de derivada, primeiro observamos que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ é obtida subtraindo-se as áreas, logo ela é a área sob o gráfico de f de x até $x + h$ (a área em destaque da Figura 5). Para h pequeno você pode ver da figura que essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

logo

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

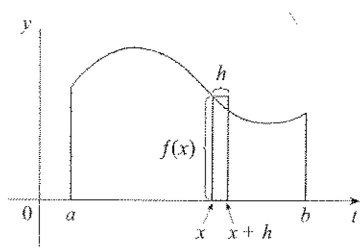


FIGURA 5

Intuitivamente, portanto, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

□ Abreviamos o nome desse teorema para TFC1. Esse teorema diz que a derivada de uma integral definida em relação a seu limite superior é o integrando calculado no limite superior.

Isso é verdadeiro mesmo quando f não é necessariamente positiva, como demonstra a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Prova Se x e $x + h$ estão em (a, b), então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(pela Propriedade 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

logo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por ora, vamos assumir que $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x + h]$, o Teorema do Valor Extremo estabelece que há números u e v em $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x + h]$ (veja a Figura 6).

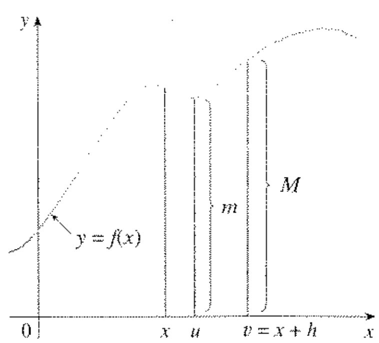


FIGURA 6

Pela Propriedade 8 das integrais, temos

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

isto é,

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)h$$

Uma vez que $h > 0$, podemos dividir essa desigualdade por h:

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)$$

Agora usamos a Equação 2 para substituir a parte do meio dessa desigualdade:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

A desigualdade 3 pode ser provada de uma maneira similar para o caso onde $h < 0$ (veja o Exercício 63).

Agora tomemos $h \to 0$. Então $u \to x$ e $v \to x$, uma vez que u e v estão entre x e $x + h$. Conseqüentemente

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

pois f é contínua em x. Concluímos, de (3) e do Teorema do Confronto, que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Se $x = a$ ou b, então a Equação 4 pode ser interpretada como um limite lateral. Então o Teorema 2.9.4 (modificado para limites laterais) mostra que g é contínua em $[a, b]$.

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

quando f for contínua. Falando não rigorosamente, a Equação 5 nos estabelece que se primeiro integramos f e então diferenciamos o resultado, retornamos à função original f.

EXEMPLO 2 ▫ Ache a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

EXEMPLO 3 ▫ Embora a fórmula da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ possa ser vista como uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos dessas funções. Por exemplo, a **função de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus trabalhos em óptica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de auto-estradas.

A parte 1 do Teorema Fundamental nos diz como diferenciar a função de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$$

Isso significa que podemos aplicar todos os métodos do cálculo diferencial para analisar S (veja o Exercício 57).

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$ e a função de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Foi usado um computador para fazer o gráfico de S computando o valor dessa integral para vários valores de x. Realmente parece que $S(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $x \approx 1{,}4$ quando $S(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. A Figura 8 mostra uma parte maior do gráfico de S.

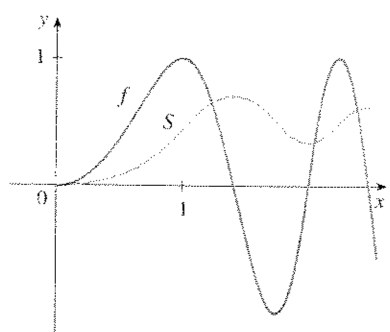


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen}\,(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \text{sen}\,(\pi t^2/2)\, dt$

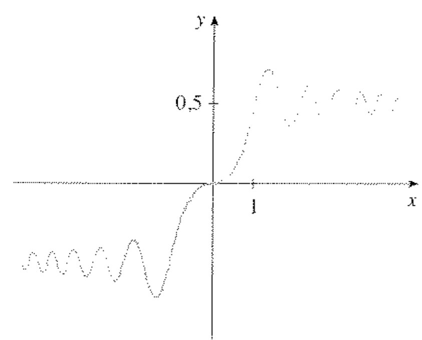


FIGURA 8
A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \text{sen}\,(\pi t^2/2)\, dt$

Se começarmos agora com o gráfico de S da Figura 7 e pensarmos sobre como deve ser sua derivada, parece razoável que $S'(x) = f(x)$. [Por exemplo, S é crescente quando $f(x) > 0$ e decrescente quando $f(x) < 0$.] Logo, isso dá uma confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

EXEMPLO 4 Ache $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

SOLUÇÃO Aqui devemos ser cuidadosos para usar a Regra da Cadeia em conjunção com o TFC1. Seja $u = x^4$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(pela Regra da Cadeia)} \\
&= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(pelo TFC1)} \\
&= \sec(x^4)\cdot 4x^3
\end{aligned}$$

Na Seção 5.2 computamos as integrais a partir da definição como um limite de somas de Riemann e vimos que esse procedimento é às vezes longo e difícil. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sabemos da Parte 1 que $g'(x) = f(x)$; isto é, g é uma antiderivada de f. Se F for qualquer outra antiderivada de f em $[a, b]$, então sabemos do Corolário 4.2.7 que F e g diferem por uma constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x < b$. Mas, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites de ambos os lados da Equação 6 (quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$), vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.

Se fizermos $x = a$ na fórmula de $g(x)$, obteremos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Portanto, usando a Equação 6 com $x = b$ e $x = a$, temos

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\
&= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\,dt
\end{aligned}$$

A Parte 2 do Teorema Fundamental estabelece que se conhecermos uma antiderivada F de f, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nos extremos do intervalo $[a, b]$. É muito surpreendente que $\int_a^b f(x)\,dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, pode ser encontrado sabendo-se os valores de $F(x)$ em somente dois pontos, a e b.

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se o interpretamos em termos físicos. Se $v(t)$ for a velocidade de um objeto e $s(t)$ for sua posição no instante t, então $v(t) = s'(t)$, portanto s é uma antiderivada de v. Na Seção 5.1 consideramos um objeto que se move sempre no sentido positivo e fizemos a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual a distância percorrida. Em símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Isso é exatamente o que o TFC2 estabelece nesse contexto.

EXEMPLO 5 ☐ Calcule a integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUÇÃO A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma antiderivada é $F(x) = e^x$; logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

☐ Compare os cálculos do Exemplo 5 com os do Exemplo 3 na Seção 5.2, muito mais difíceis.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que o TFC2 estabelece que podemos usar *qualquer* antiderivada F de f. Portanto podemos usar a mais simples, isto é, $F(x) = e^x$, em vez de $e^x + 7$ ou $e^x + C$. ☐

Freqüentemente usamos a notação

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Logo a equação do TFC2 pode ser escrita como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{onde} \qquad F' = f$$

Outras notações comuns são $F(x)\,\big|_a^b$ e $[F(x)]_a^b$.

EXEMPLO 6 ☐ Ache a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

SOLUÇÃO Uma antiderivada de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. A área A pedida é encontrada usando-se a Parte 2 do Teorema Fundamental:

☐ Quando aplicamos o Teorema Fundamental usamos uma antiderivada F de f particular. Não é necessário utilizar a antiderivada mais geral.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Se você comparar o cálculo do Exemplo 6 com o do Exemplo 2 na Seção 5.1 verá que o Teorema Fundamental dá um método *muito* mais curto.

EXEMPLO 7 ☐ Calcule $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUÇÃO A integral dada é uma abreviação para

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Uma antiderivada de $f(x) = 1/x$ é $F(x) = \ln|x|$, e, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, podemos escrever $F(x) = \ln x$. Logo

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

EXEMPLO 8 Ache a área sob a curva cosseno de 0 até b, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUÇÃO Uma vez que uma antiderivada de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \operatorname{sen} x$, temos

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

Em particular, tomando $b = \pi/2$, temos provado que a área sob a curva cosseno de 0 até $\pi/2$ é $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (Veja a Figura 9.)

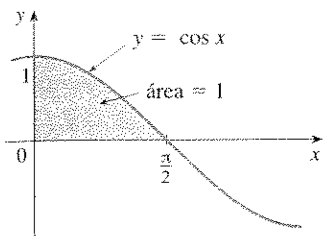


FIGURA 9

Quando o matemático francês Gilles de Roberval encontrou a área sob as curvas seno e cosseno, em 1635, isto era um problema muito desafiante que requeria uma grande dose de engenhosidade. Se não tivéssemos a vantagem do Teorema Fundamental, teríamos de computar um limite de somas difícil usando obscuras identidades trigonométricas (ou um CAS, como no Exercício 25 da Seção 5.1). Isso foi ainda mais difícil para Roberval porque o aparato de limites não tinha sido inventado em 1635. Mas nos anos de 1660 e 1670, quando o Teorema Fundamental foi descoberto por Barrow e explicado por Newton e Leibniz, esses problemas ficaram muito fáceis, como você pode ver no Exemplo 8.

EXEMPLO 9 O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUÇÃO Para começar notamos que esse cálculo deve estar errado, pois a resposta é negativa, mas $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ e a Propriedade 6 de integrais estabelece que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ quando $f \geqslant 0$. O Teorema Fundamental do Cálculo aplica-se a uma função contínua. Ele não pode ser aplicado aqui, pois $f(x) = 1/x^2$ não é contínua em $[-1, 3]$. De fato, f tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$, portanto

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{não existe}$$

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

O Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f é contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, quando F for qualquer antiderivada de f, isto é, $F' = f$.

Notamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que estabelece que se f for integrada e o resultado, diferenciado, obteremos de volta a função original f. Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Essa versão estabelece que se tomarmos uma função F, a diferenciarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo estabelecem que a diferenciação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram para o Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiantes são acessíveis para todos nós.

5.3 Exercícios

1. Explique claramente o que você entende por "diferenciação e integração são processos inversos".

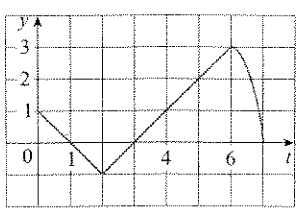
2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado.

(a) Avalie $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.

(b) Estime $g(7)$.

(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.



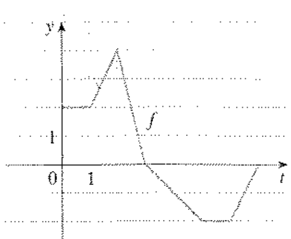
3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.

(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

(b) Em que intervalos g está crescendo?

(c) Onde g tem um valor máximo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.



4. Seja $g(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt$, onde f é uma função cujo gráfico está mostrado.

(a) Calcule $g(-3)$ e $g(3)$.

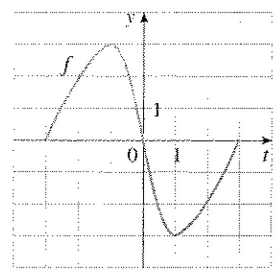
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ e $g(0)$.

(c) Em que intervalo g está crescendo?

(d) Onde g tem um valor máximo?

(e) Faça um esboço do gráfico de g.

(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.



5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. Então ache $g'(x)$ de duas maneiras: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e então diferenciando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (1 + \sqrt{t})\,dt$

7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada da função.

7. $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}\,dt$

8. $g(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

9. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

10. $g(u) = \int_3^u \frac{1}{x + x^2}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

$$\left[\textit{Sugestão}: \int_x^2 \cos(t^2)\,dt = -\int_2^x \cos(t^2)\,dt\right]$$

12. $F(x) = \int_x^{10} \operatorname{tg}\,\theta\,d\theta$

13. $h(x) = \int_2^{1/x} \operatorname{arctg} t \, dt$

14. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3} \, dr$

15. $y = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t} \, dt$

16. $y = \int_1^{\cos x} (t + \operatorname{sen} t) \, dt$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2} \, du$

18. $y = \int_{e^x}^{0} \operatorname{sen}^3 t \, dt$

19–42 ▫ Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral, ou explique por que ela não existe.

19. $\int_{-1}^{3} x^5 \, dx$

20. $\int_{-2}^{5} 6 \, dx$

21. $\int_2^8 (4x + 3) \, dx$

22. $\int_0^4 (1 + 3y - y^2) \, dy$

23. $\int_0^1 x^{4/5} dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x} \, dx$

25. $\int_1^2 \frac{3}{t^4} \, dt$

26. $\int_{-2}^{3} x^{-5} dx$

27. $\int_{-5}^{5} \frac{2}{x^3} dx$

28. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta \, d\theta$

29. $\int_0^2 x(2 + x^5) dx$

30. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \, dt$

32. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x}) \, dx$

33. $\int_{\pi}^{2/\pi} \operatorname{cossec}^2 \theta \, d\theta$

34. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta \, d\theta$

35. $\int_1^9 \frac{1}{2x} \, dx$

36. $\int_0^1 10^x \, dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt$

38. $\int_0^1 \frac{4}{t^2 + 1} \, dt$

39. $\int_{-1}^{1} e^{u+1} du$

40. $\int_1^2 \frac{4 + u^2}{u^3} \, du$

41. $\int_0^2 f(x) \, dx \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ x^5 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

42. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

43–46 ▫ Use o gráfico para dar uma estimativa não precisa da área da região que está situada abaixo da curva dada. Então ache a área exata.

43. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

44. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

45. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

46. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

47–48 ▫ Calcule a integral e interprete-a como uma diferença das áreas. Ilustre com um esboço.

47. $\int_{-1}^{2} x^3 \, dx$

48. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$

49–52 ▫ Ache a derivada da função

49. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \, du$

$$\left[\textit{Sugestão:} \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_0^{3x} f(u)\, du \right]$$

50. $g(x) = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}} \, dt$

51. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \operatorname{sen} t \, dt$

52. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2) \, du$

53. Se $F(x) = \int_1^x f(t) \, dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u} \, du$, determine $F''(2$

54. Ache o intervalo em que a curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2} \, dt \qquad \text{é côncava para cima.}$$

55. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x) dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$'

56. A **função erro** dada por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

é muito usada em probabilidade, estatística e engenharia.

(a) Mostre que $\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}[erf(b) - erf(a)]$.

(b) Mostre que a função $y = e^{x^2} erf(x)$ satisfaz a equação diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

57. A função Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

(a) Em que valores de x essa função tem valores de máximo locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

(c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, correta até duas casas decimal:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2) \, dt = 0{,}2$$

58. A **função integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo definimos $f(0) = 1$, e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores de máximo locai:

(c) Ache as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direit da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação correta até uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt = 1$$

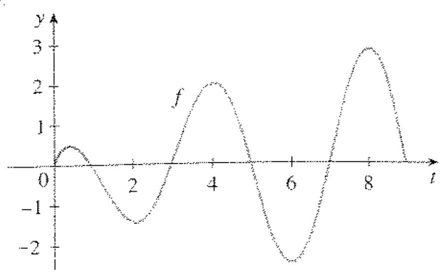
59–60 ▫ Seja $g(x) = \int_0^x f(t) \, dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrad

(a) Em que valores de x ocorrem os valores de máximo e mínir local em g?

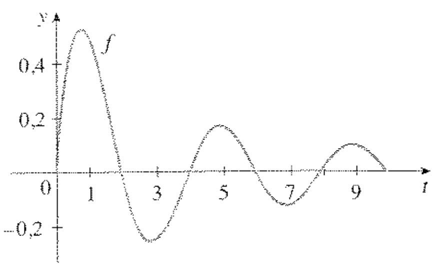
(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

(c) Em que intervalos g é côncavo para baixo?
(d) Esboce o gráfico de g.

59.



60.



61–62 □ Calcule o limite reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em $[0, 1]$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^3}{n^4}$

62. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \sqrt{\dfrac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$

63. Justifique (3) para o caso $h < 0$.

64. Se f é contínua e g e h são funções diferenciáveis, encontre a fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

65. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.
(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1{,}25$.

66. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

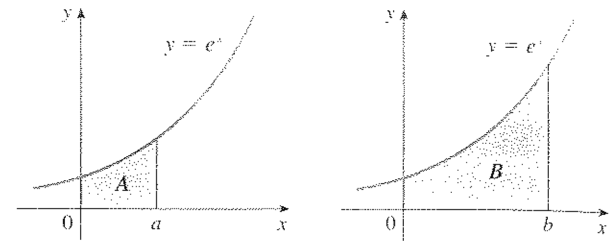
(a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.
(b) Esboce os gráficos de f e g.
(c) Onde f é diferenciável? Onde g é diferenciável?

67. Ache uma função f e um número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

para todo $x > 0$.

68. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.



69. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos.
(a) Explique por que $\int_0^t f(s)\,ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde a último recondicionamento.
(b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?
(c) Mostre que C tem um valor mínimo nos números $t = T$ onde $C(T) = f(T)$.

70. Uma companhia de alta tecnologia compra um novo sistema computacional com valor inicial V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.
(a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t, onde $C(t) = f(t) + g(t)$.
(b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e

$$g(t) = \frac{Vt^2}{12.900} \qquad t > 0$$

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.
(c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.
(d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

Vimos na Seção 5.3 que a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método muito poderoso para computar a integral definida de uma função, desde que possamos encontrar uma antiderivada da função. Nesta seção vamos introduzir uma notação para antiderivadas, rever as fórmulas para as antiderivadas e então usá-las para computar as integrais definidas. Também reformularemos o TFC2, de forma a torná-lo mais facilmente aplicável a problemas da ciência e engenharia.

Integrais Indefinidas

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as antiderivadas e as integrais definidas. A Parte 1 estabelece que se f for contínua, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma antiderivada de f. A Parte 2 estabelece que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrada calculando-se $F(b) - F(a)$, onde F é uma antiderivada de f.

Precisamos de uma notação conveniente para as antiderivadas que as torne fáceis de serem trabalhadas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre as antiderivadas e as integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para uma antiderivada de f e é chamada **integral indefinida**. Assim

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Portanto podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma antiderivada para cada valor da constante C).

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)dx$ é uma função (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Parte 2 do Teorema Fundamental. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big]_a^b$$

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de antiderivadas de funções. Portanto, vamos dar de novo a Tabela de Fórmulas de Antidiferenciação da Seção 4.10, junto com algumas outras, na notação de integrais indefinidas. Cada fórmula pode ser verificada diferenciando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabela de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Lembre-se de que a partir do Teorema 4.10.1 a antiderivada mais geral *sobre um dado intervalo* é obtida adicionando-se uma constante a uma dada antiderivada. **Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo**. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

com o entendimento de que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a antiderivada geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\[2mm] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

:: A integral indefinida no Exemplo 1 tem seu gráfico feito na Figura 1 para vários valores de C. O valor de C é o intercepto y.

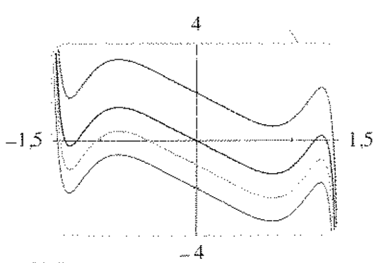


FIGURA 1

EXEMPLO 1 :: Ache a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUÇÃO Usando nossa convenção e a Tabela 1 temos

$$\begin{aligned}\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx &= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx \\ &= 10\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C \\ &= 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

Você pode verificar essa resposta diferenciando-a.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUÇÃO Essa integral indefinida não é imediatamente aparente na Tabela 1, logo usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta\,d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando o TFC2 e a Tabela 1, temos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75$$

Compare esse cálculo com o Exemplo 2(b) da Seção 5.2.

EXEMPLO 4 Ache $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

SOLUÇÃO O Teorema Fundamental dá

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\ \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\ \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\ \operatorname{tg}^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\operatorname{tg}^{-1}2$$

Esse é o valor exato da integral. Se uma aproximação decimal for desejada, poderemos usar uma calculadora para aproximar $\operatorname{tg}^{-1}2$. Fazendo isso, obtemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0{,}67855$$

□ A Figura 2 mostra o gráfico do integrando no Exemplo 4. Sabemos da Seção 5.2 que o valor da integral pode ser interpretado como a soma de áreas com o sinal mais, menos as áreas com sinal menos.

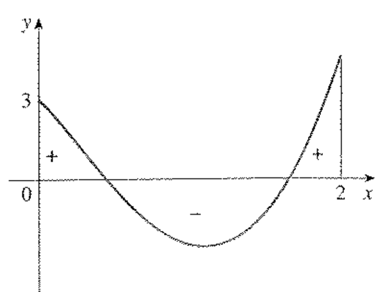


FIGURA 2

EXEMPLO 5 Calcule $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUÇÃO Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, como uma soma de frações:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$
$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$
$$= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Aplicações

A Parte 2 do Teorema Fundamental estabelece que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f. Isso significa que $F' = f$, logo a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, crescer, decrescer e crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a troca *líquida* em y.] Logo podemos reformular o TFC2 em palavras da forma a seguir.

Teorema da Variação Total A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais discutidas na Seção 3.3. Aqui estão alguns exemplos dessa idéia:

- Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Portanto

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

- Se $[C](t)$ for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada de $d[C]/dt$. Logo

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}\,dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

  é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

- Se a massa de uma viga medida a partir do extremo esquerdo até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear $\rho(x) = m'(x)$. Logo

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

- Se a taxa de crescimento populacional for dn/dt, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  é o crescimento na população durante o período de tempo de t_1 até t_2.

- Se $C(x)$ for o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada $C'(x)$. Logo

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

é o crescimento do custo quando a produção está crescendo de x_1 até x_2 unidades.

- Se um objeto move-se ao longo de uma reta com a função posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$, logo

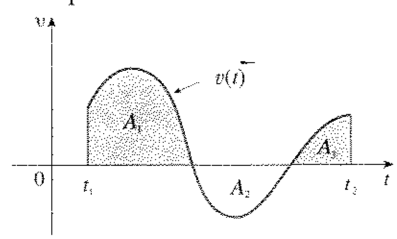
$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento*, da partícula durante o período de tempo t_1 a t_2. Na Seção 5.1 conjecturamos que isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora temos provado que é sempre verdade.

- Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geqslant 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leqslant 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é computada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade. Portanto

$$\boxed{3} \qquad \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distância total percorrida}$$

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termos de áreas sob uma curva velocidade.



$$\text{deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

FIGURA 3

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

EXEMPLO 6 □ Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).
(a) Ache o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Ache a distância percorrida durante esse período de tempo.

SOLUÇÃO
(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

(b) Note que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$, logo $v(t) \leqslant 0$ em um intervalo $[1, 3]$ e $v(t) \geqslant 0$ em $[3, 4]$. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

□ Para integrar o valor absoluto de $v(t)$, usamos a Propriedade 5 de integrais da Seção 5.2 para dividir a integral em duas partes, uma onde $v(t) \leqslant 0$ e outra onde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$

EXEMPLO 7 □ A Figura 4 mostra a potência consumida na cidade de São Francisco em um dia de setembro (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia usada naquele dia.

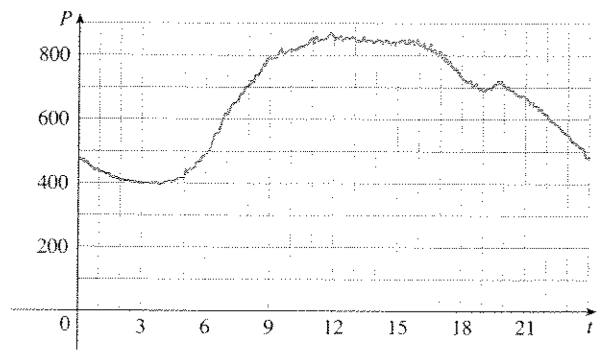


FIGURA 4

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia que usamos hoje. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\int_0^{24} P(t)\,dt \approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t$$

$$\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850$$
$$+ 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)$$

$$= 15.840$$

A energia usada foi de aproximadamente 15.840 megawatts-hora.

■ Nota sobre as unidades

Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e Δt, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\,dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 Exercícios

1–4 Verifique por diferenciação que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

5–14 Ache a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int x^{-3/4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^3+6x+1)\,dx$

8. $\displaystyle\int x(1+2x^4)\,dx$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int \left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

11. $\displaystyle\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$

12. $\displaystyle\int (3e^u+\sec^2 u)\,du$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}^2 x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

15–16 Ache a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

15. $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$

16. $\displaystyle\int (\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

17–40 Calcule a integral.

17. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2-4x+5)\,dx$

18. $\displaystyle\int_1^3 (1+2x-4x^3)\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x-e^x)\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5-u^3+u^2)\,du$

21. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u+1)^2\,du$

22. $\displaystyle\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv$

23. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$

24. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,dt$

25. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (4y^3+\frac{2}{y^3})\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y+5y^7}{y^3})\,dy$

27. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x+4\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^\pi (4\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta)\,d\theta$

32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{sen}\,\theta+\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{\sec^2\theta}\,d$

35. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^3\,dx$

37. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

38. $\displaystyle\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

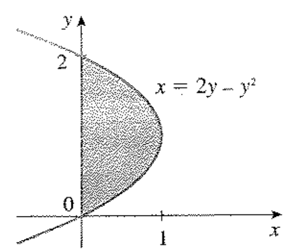
39. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-2|x|)\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\mathrm{sen}\,x|\,dx$

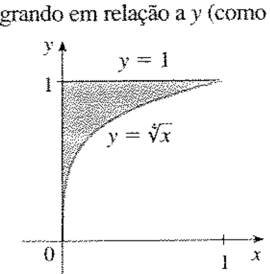
41. Use um gráfico para estimar o intercepto x da curva $y = x + x^2 - x^4$. Então use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

42. Repita o Exercício 41 para a curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

43. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Ache a área da região.



44. Os contornos da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Ache a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 43).



45. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em libras p ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa?

46. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$ (veja o Exemplo 3 da Seção 3.3). O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

47. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

48. Uma colméia com uma população inicial de 100 abelhas cres a uma taxa de $n'(t)$ abelhas por semana. O que $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$ representa?

49. Na Seção 4.8 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que $\int_{1.000}^{5.000} R'(x)\, dx$ representa?

50. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x milhas do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\, dx$ representa?

51. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

52. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\, dx$?

53–54 □ A função velocidade (em metros por segundo) é dada por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

53. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

54. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

55–56 □ A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

55. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

56. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

57. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida em quilogramas por metro, onde x é medida em metros a partir de um extremo da barra. Ache a massa total da barra.

58. A água flui do fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minutos, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que flui do tanque durante os primeiros dez minutos.

59. A velocidade de um carro é lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

60. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que os indicadores da taxa $r(t)$ com que materiais sólidos são lançados na atmosfera sejam dados na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

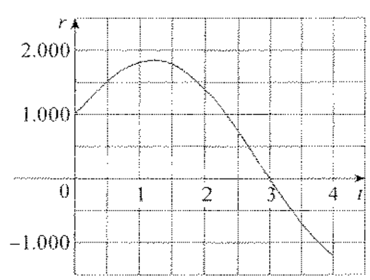
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

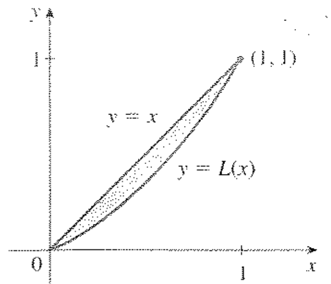
61. O custo marginal de fabricação de x jardas de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por jardas). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2.000 para 4.000 jardas.

62. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25.000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar quantidade de água depois de quatro dias.



63. Os economistas usam uma distribuição acumulada chamada *curva de Lorenz* para descrever a distribuição de renda entre as famílias em um dado país. Tipicamente, uma curva de Lorenz é definida em $[0, 1]$, passa por $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e é contínua, crescente e côncava para cima. Os pontos sobre essa curva são determinados classificando-se todas as famílias pela renda e então computando-se a porcentagem de famílias cuja renda é menor ou igual a uma porcentagem dada da renda total do país.

Por exemplo, o ponto $(a/100, b/100)$ está sobre a curva de Lorenz se $a\%$ de famílias recebe menos do que ou igual a $b\%$ da renda total. A *igualdade absoluta* da distribuição de renda ocorreria se a parte mais baixa $a\%$ das famílias recebesse $a\%$ da renda e, nesse caso, a curva de Lorenz seria a reta $y = x$. A área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ mede quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O *coeficiente de desigualdade* é a razão da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ para a área sob $y = x$.



(a) Mostre que o coeficiente de desigualdade é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$, isto é, mostre que

$$\text{coeficiente de desigualdade} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) A distribuição de renda para um certo país está representada pela curva de Lorenz definida pela equação

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

Qual a porcentagem da renda total recebida pela parte de baixo de 50% das famílias? Encontre o coeficiente de desigualdade.

64. Em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49 cujo propósito era instalar uma pe[ç]a nova em um satélite de comunicação do INTELSAT. A tabela dá os dados da velocidade para o ônibus entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (pés/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	185
Fim da manobra de inclinação	15	319
Acelerando para 89%	20	447
Acelerando para 67%	32	742
Acelerando para 104%	59	1.325
Pressão dinâmica máxima	62	1.445
Separação dos foguetes auxiliares	125	4.151

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.

(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour* 125 segundos depois do lançamento.

Projeto Escrito — Newton, Leibniz e a Invenção do Cálculo

Algumas vezes lemos que os inventores do cálculo foram *sir* Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Mas sabemos que as idéias básicas por trás da integração foram investigadas há 2.500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudóxio e Arquimedes, e que os métodos para encontrar as tangentes foram inventados por Pierre Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677), entre outros. Barrow, professor de Newton em Cambridge, foi o primeiro a entender a relação inversa existente entre a diferenciação e a integração. O que Newton e Leibniz fizeram foi usar essa relação na forma do Teorema Fundamental do Cálculo, a fim de desenvolver o cálculo dentro de uma disciplina matemática sistemática. É nesse sentido que é atribuída a Newton e a Leibniz a invenção do cálculo.

Leia sobre as contribuições desses homens em uma ou mais das referências dadas e escreva sobre um dentre os três tópicos listados a seguir. Você pode incluir detalhes biográficos, mas o propósito principal de seu relatório deve ser uma descrição, com algum detalhe, de seus métodos e notações. Em particular, você deve consultar uma das fontes, que trazem trechos das publicações originais de Newton e Leibniz, traduzidas do latim para o inglês.

- O Papel de Newton no Desenvolvimento do Cálculo
- O Papel de Leibniz no Desenvolvimento do Cálculo
- A Controvérsia entre os Seguidores de Newton e Leibniz sobre a Prioridade na Invenção do Cálculo

Referências

1. BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. *A History of Mathematics*. Nova York, John Wiley, 1987, Capítulo 19.
2. BOYER, Carl. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York, Dover, 1959, Capítulo V.

3. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York, Springer-Verlag, 1979, Capítulos 8 e 9.
4. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, 6. ed. Nova York, Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. GILLISPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Leibniz de Joseph Hofmann no Volume VIII e o artigo sobre Newton de I. B. Cohen no Volume X.
6. KATZ, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York, HarperCollins, 1993, Capítulo 12.
7. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York, Oxford University Press, 1972, Capítulo 17.

Livros fontes

1. FAUVEL, John; GRAY Jeremy. (eds.) *The History of Mathematics: A Reader.* Londres, MacMillan Press, 1987, Capítulo 12 e 13.
2. SMITH, D. E. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics*. Nova York, Dover, 1959, Capítulo V.
3. STRUIK, D. J. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1969, Capítulo V.

5.5 Regra da Substituição

Com base no Teorema Fundamental é importante sermos capazes de encontrar antiderivadas. Porém nossas fórmulas de antidiferenciação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Para encontrar essa integral usamos a estratégia do problema-solução de *introduzir alguma coisa extra*. Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u. Suponha que façamos u igual à quantidade sob o sinal de raiz em (1), $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2x\,dx$. Note que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em (1); portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

□ Diferenciais são definidas na Seção 3.11. Se $u = f(x)$, então

$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \begin{aligned} \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du \\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para diferenciar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que se $F' = f$, então

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Assim provamos a regra que se segue.

4 Regra da Substituição Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi provada usando-se a Regra da Cadeia para a diferenciação. Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em (4) como diferenciais.

Assim, a Regra da Substituição estabelece que: **é permitido operar com dx e du após os sinais de integrais como se fossem diferenciais**.

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUÇÃO Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\,dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\,dx = du/4$ e a Regra da Substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Verifique a resposta por diferenciação.

Note que no estágio final retornamos para a variável original x.

A idéia por trás da Regra da Substituição é substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Isso é obtido mudando-se da variável original x para uma nova variável u, que é uma função de x. Dessa forma, no Exemplo 1 substituímos a integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ pela mais simples $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

O desafio principal no uso da Regra da Substituição é descobrir uma substituição apropriada. Você deve tentar escolher u como uma função no integrando cuja diferencial também ocorra (exceto por um fator constante). Foi isso que aconteceu no Exemplo 1. Se isso não for possível, tente escolher u como alguma parte complicada do integrando. Achar a substituição correta tem algo de artístico. É usual errar na substituição; se sua primeira tentativa não funcionar, tente outra substituição.

EXEMPLO 2 □ Calcule $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUÇÃO 1 Seja $u = 2x + 1$. Então $du = 2\,dx$, logo $dx = du/2$. Nesse caso, a Regra da Substituição dá

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Outra substituição possível é $u = \sqrt{2x+1}$. Então

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{portanto} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(Ou observe que $u^2 = 2x + 1$, logo $2u\,du = 2\,dx$.) Assim

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u \cdot u\,du = \int u^2\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

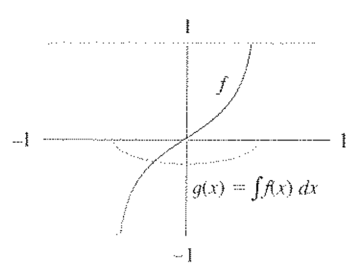


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1+}$

EXEMPLO 3 □ Ache $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = 1 - 4x^2$. Então $du = -8x\,dx$, portanto $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C\end{aligned}$$

A resposta do Exemplo 3 pode ser verificada por diferenciação, mas em vez disso vamos verificá-la graficamente. Na Figura 1 usamos um computador para fazer o gráfico do integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ e de sua integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (escolhemos o caso $C = 0$). Note que $g(x)$ decresce quando $f(x)$ é negativa, cresce quando $f(x)$ é positiva, e tem seu valor mínimo quando $f(x) = 0$. Portanto parece razoável, da evidência gráfica, que g é uma antiderivada de f.

EXEMPLO 4 □ Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUÇÃO Se fizermos $u = 5x$, então $du = 5\,dx$, portanto $dx = \frac{1}{5}\,du$. Dessa forma,

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

EXEMPLO 5 Ache $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUÇÃO Uma substituição apropriada fica mais evidente se fatorarmos x^5 como $x^4 \cdot x$. Seja $u = 1 + x^2$. Então $du = 2x\, dx$, conseqüentemente $x\, dx = du/2$. Também temos $x^2 = u - 1$, portanto $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx &= \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx \\
&= \int \sqrt{u}\, (u - 1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{u}\, (u^2 - 2u + 1)\, du \\
&= \tfrac{1}{2} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7} u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5} u^{5/2} + \tfrac{2}{3} u^{3/2}\right) + C \\
&= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

SOLUÇÃO Vamos escrever primeiro a tangente em termos de seno e cosseno:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Isso sugere que devemos substituir $u = \cos x$, visto que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ e portanto $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg} x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{du}{u} \\
&= -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C
\end{aligned}$$

Uma vez que $-\ln |\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln |\sec x|$, o resultado d Exemplo 6 também pode ser escrito como

5 $$\boxed{\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln |\sec x| + C}$$

Integrais Definidas

Existem dois métodos para se calcular uma integral *definida* por substituição. Um del consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundament Por exemplo, usando o resultado do Exemplo 2 temos

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx &= \int \sqrt{2x + 1}\, dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4 \\
&= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}
\end{aligned}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em se alterar os limites de integração ao mudar a variável.

□ Essa regra estabelece que quando usamos uma substituição em uma integral definida, devemos colocar tudo em termos da nova variável u, não somente x e dx mas também os limites de integração. Os novos limites de integração são os valores de u que correspondem a $x = a$ e $x = b$.

6 Regra da Substituição para as Integrais Definidas Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Prova Seja F uma antiderivada de f. Então, por (3), $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$; logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Mas, aplicando uma segunda vez o TFC2, também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EXEMPLO 7 □ Usando $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ calcule (6).

SOLUÇÃO Usando a substituição da Solução 1 do Exemplo 2, temos $u = 2x + 1$ e $dx = du/2$. Para encontrar os novos limites de integração notamos que

$$\text{quando } x = 0,\ u = 1 \quad \text{e} \quad \text{quando } x = 4,\ u = 9$$

Portanto

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

□ A interpretação geométrica do Exemplo 7 está na Figura 2. A substituição $u = 2x + 1$ estica o intervalo $[0, 4]$ por um fator de 2 e translada-o para a direita em uma unidade. A Regra da Substituição mostra que as duas áreas são iguais.

Observe que quando usamos (6) não retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u.

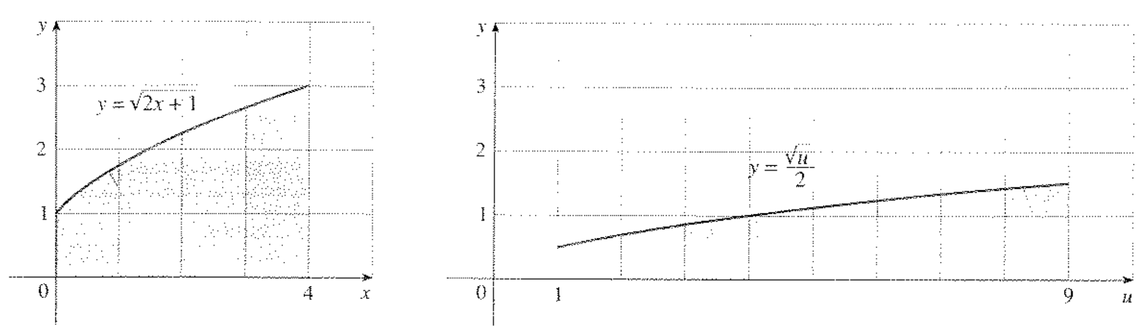


FIGURA 2

EXEMPLO 8 □ Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

□ A integral dada no Exemplo 8 é uma forma abreviada de

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

SOLUÇÃO Seja $u = 3 - 5x$. Então $du = -5\,dx$, portanto $dx = -du/5$. Quando $x = 1$, $u = -2$, e quando $x = 2$, $u = -7$. Assim

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

EXEMPLO 9 □ Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos fazer $u = \ln x$, pois sua diferencial $du = dx/x$ ocorre na integral. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Assim

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

□ Uma vez que a função $f(x) = (\ln x)/x$ no Exemplo 9 é positiva para $x > 1$, a integral representa a área da região sombreada na Figura 3.

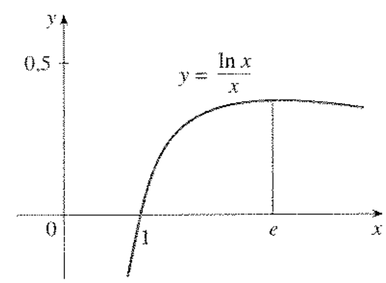


FIGURA 3

Simetria

O próximo teorema usa a Regra da Substituição para as Integrais Definidas (6) para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam propriedades de simetria.

> **7 Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f é contínua em $[-a, a]$.
>
> (a) Se f for par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> (b) Se f for ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Prova Dividimos a integral em duas:

$$\boxed{8} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Na primeira integral da última igualdade fazemos a substituição $u = -x$. Então $du = -dx$, e quando $x = -a$, $u = a$. Portanto

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

e assim sendo a Equação 8 fica

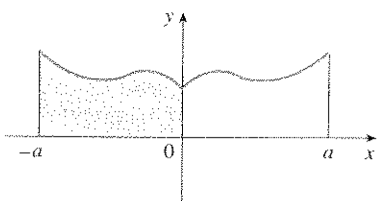
$$\boxed{9} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$; logo, da Equação 9 segue que

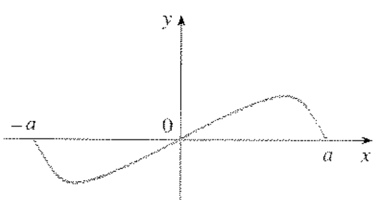
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 4. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a devido à simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 □ Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 □ Visto que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Exercícios

1–6 □ Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad u = \sqrt{x}$
5. $\int \frac{4}{(1 + 2x)^3}\,dx, \quad u = 1 + 2x$
6. $\int e^{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

7–44 □ Calcule a integral indefinida.

7. $\int 2x(x^2 + 3)^4\,dx$
8. $\int x^2(x^3 + 5)^2\,dx$
9. $\int (3x^3 - 2)^{20}\,dx$
10. $\int (2 - x)^9\,dx$
11. $\int \frac{1 + 4x}{\sqrt{1 + x + 2x^2}}\,dx$
12. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$
13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$
14. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$
15. $\int \frac{3}{(2y + 1)^5}\,dy$
16. $\int \frac{1}{(5t + 4)^{2,7}}\,dt$
17. $\int \sqrt{4 - t}\,dt$
18. $\int y^3\sqrt{2y^4 - 1}\,dy$
19. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$
20. $\int \sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\,d\theta$
21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{1 + x^2}\,dx$
23. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$
24. $\int \sqrt{x}\operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

25. $\int \cos\theta \operatorname{sen}^6\theta \, d\theta$

26. $\int (1+\operatorname{tg}\theta)^5 \sec^2\theta \, d\theta$

27. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$

28. $\int e^{\cos t} \operatorname{sen} t \, dt$

29. $\int \dfrac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\, dz$

30. $\int \dfrac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\, dx$

31. $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$

32. $\int \dfrac{e^x}{e^x+1}\, dx$

33. $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\operatorname{cossec}^2 x \, dx$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2}\, dx$

35. $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

36. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$

37. $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx$

38. $\int \sqrt[3]{x^3+1}\, x^5 \, dx$

39. $\int x^a\sqrt{b+cx^{a+1}}\, dx \quad (c \neq 0, a \neq -1)$

40. $\int \operatorname{sen} t \sec^2(\cos t)\, dt$

41. $\int \dfrac{1+x}{1+x^2}\, dx$

42. $\int \dfrac{x}{1+x^4}\, dx$

43. $\int \dfrac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\, dx$

44. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}\, dx$

45–48 □ Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável fazendo um gráfico da função e de sua antiderivada (tome $C = 0$).

45. $\int \dfrac{3x-1}{(3x^2-2x+1)^4}\, dx$

46. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

47. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

48. $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta \, d\theta$

49–70 □ Calcule a integral definida, se ela existir.

49. $\int_0^2 (x-1)^{25}\, dx$

50. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx$

51. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\, dx$

52. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\, dx$

53. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

54. $\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \operatorname{cotg} \pi t \, dt$

55. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \operatorname{tg}^3\theta \, d\theta$

56. $\int_0^2 \dfrac{dx}{(2x-3)^2}$

57. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

59. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+x^6}\, dx$

61. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx$

64. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}\, dx$

65. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

66. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

67. $\int_0^4 \dfrac{dx}{(x-2)^3}$

68. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$

69. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\, dx \quad (a > 0)$

70. $\int_{-a}^a x\sqrt{x^2+a^2}\, dx$

71–72 □ Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva dada. Então ache a área exata.

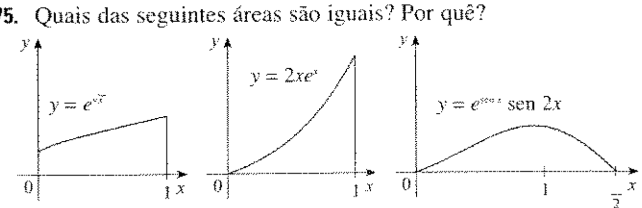
71. $y = \sqrt{2x+1}, \quad 0 \leq x \leq 1$

72. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

73. Calcule $\int_{-2}^2 (x+3)\sqrt{4-x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

74. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

75. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



76. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias temos após 3 horas?

77. A respiração é um ciclo completo e cíclico que começa pela inalação e acaba pela exalação, e isso tudo leva cerca de 5 s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em parte, por que a função $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido freqüentemente usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

78. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5.000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Observe que a produção tende a 5.000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores estão familiarizados com as novas técnicas.) Ache o número de calculadoras produzidas do começo da terceira semana até o final da quarta semana.

79. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, ache $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

80. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, encontre $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

81. Suponha f contínua em $\mathbb{R}$, prove que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de área s.

82. Se f for contínua em $\mathbb{R}$ prove que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

83. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

84. Use a substituição $u = \pi - x$ para mostrar que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

85. Use o Exercício 84 para calcular a integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

5.6 Logaritmo Definido como uma Integral

Nosso tratamento das funções exponenciais e logarítmicas tem se baseado até agora em nossa intuição, que por sua vez se baseia em evidência visual e numérica. (Veja seções 1.5, 1.6 e 3.1). Nesta seção vamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para dar um tratamento alternativo que proverá uma base sólida para estas funções.

Em vez de começar com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, vamos definir $\ln x$ como uma integral e a partir daí definir a função exponencial como sua função inversa. Nesta seção você deve ter em mente que nós não usaremos nenhuma definição anterior e resultados relacionados com funções exponenciais e logarítimicas.

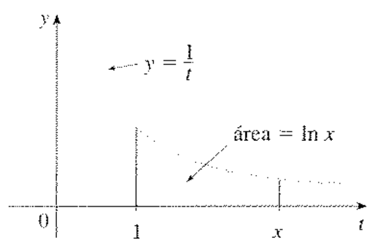


FIGURA 1

Logaritmo Natural

Vamos definir primeiro $\ln x$ como uma integral.

1 Definição **Função logaritmo natural** é definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

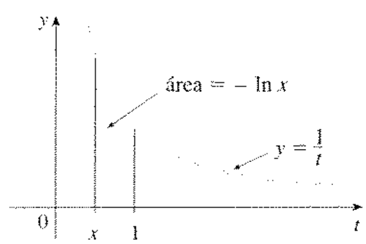


FIGURA 2

A existência dessa função depende do fato de que a integral de uma função contínua sempre existe. Se $x > 1$, então $\ln x$ pode ser interpretada geometricamente como a área sob a hipérbole $y = 1/t$ de $t = 1$ até $t = x$ (veja a Figura 1). Para $x = 1$, temos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Para $0 < x < 1$, $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

logo $\ln x$ é o negativo da área mostrada na Figura 2.

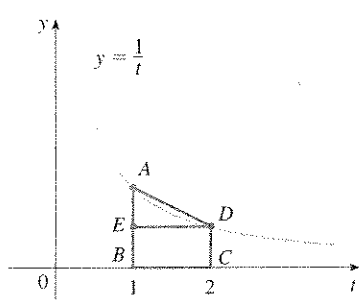


FIGURA 3

EXEMPLO 1 □

(a) Comparando as áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar o valor de $\ln 2$.

SOLUÇÃO

(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 até 2. Da Figura 3 vemos que essa área é maior que a área do retângulo $BCDE$ e menor que a área do trapezóide $ABCD$.

Assim, temos

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Se usarmos a Regra do Ponto Médio com $f(t) = 1/t$, $n = 10$ e $\Delta t = 0{,}1$, obteremos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0{,}1)[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$

$$= (0{,}1)\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots + \frac{1}{1{,}95}\right) \approx 0{,}693$$

Observe que a integral que define $\ln x$ é exatamente do tipo discutido na Parte 1 d Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3). De fato, usando esse teorema temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

e portanto

[2]
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Vamos usar agora essa regra de diferenciação para provar as seguintes propriedades d função logarítmica.

[3] **Leis dos Logaritmos** Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r\ln x$

Prova

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ têm a mesma derivada, e diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Fazendo $x = 1$ nessa equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Assim

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se substituirmos agora a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando a Lei nº 1 com $x = 1/y$, temos

$$\ln\frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y}\cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

e, portanto, segue $$\ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando novamente a Lei nº 1, temos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

A prova da Lei nº 3 ficará como exercício.

Para fazer o gráfico de $y = \ln x$ vamos determinar primeiro seus limites:

4 $$\text{(a)}\ \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Prova

(a) Usando a Lei nº 3 com $x = 2$ e $r = n$ (onde n é qualquer número inteiro positivo), temos $\ln(2^n) = n\ln 2$. Segue então que $\ln 2 > 0$, logo isso mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mas $\ln x$ é uma função crescente, uma vez que sua derivada $1/x > 0$. Portanto, $\ln x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Se fizermos $t = 1/x$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Assim, usando (a), temos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}(-\ln t) = -\infty$$

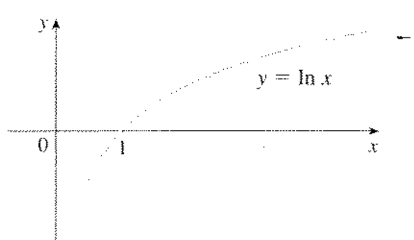


FIGURA 4

Se $y = \ln x, x > 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

o que mostra que $\ln x$ é crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$. Juntando essa informação com (4), fazemos o gráfico de $y = \ln x$ na Figura 4.

Uma vez que $\ln 1 = 0$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente que assume valores arbitrariamente grandes, o Teorema do Valor Intermediário mostra que existe um número onde $\ln x$ assume o valor 1 (veja a Figura 5). Esse número importante é denotado por e.

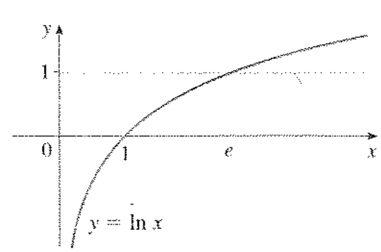


FIGURA 5

5 Definição e é um número tal que $\ln e = 1$.

Vamos mostrar (no Teorema 19) que essa definição é consistente com nossa definição anterior de e.

Função Exponencial Natural

Uma vez que ln é uma função crescente, ela é um a um e, portanto, tem uma função inversa, que denotaremos por exp. Assim, de acordo com a definição de uma função inversa:

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

6 $$\boxed{\exp(x) = y \iff \ln y = x}$$

e as equações de cancelamento são

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

7 $$\boxed{\exp(\ln x) = x \qquad \text{e} \qquad \ln(\exp x) = x}$$

Em particular, temos

$$\exp(0) = 1, \text{ uma vez que } \ln 1 = 0$$

$$\exp(1) = e, \text{ uma vez que } \ln e = 1$$

Obtemos o gráfico $y = \exp x$ refletindo o gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 6). O domínio de exp é a imagem de ln, isto é, $(-\infty, \infty)$; a imagem de exp é o domínio de ln, isto é, $(0, \infty)$.

Se r for um número racional qualquer, então a terceira lei dos logaritmos dá

$$\ln(e^r) = r \ln e = r$$

Dessa forma, por (6), $\qquad \exp(r) = e^r$

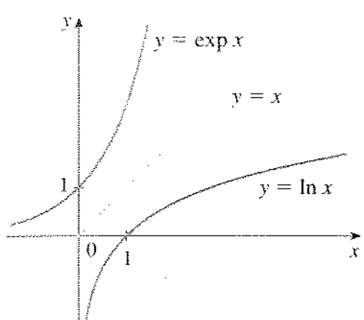


FIGURA 6

Portanto, $\exp(x) = e^x$ sempre que x for um número racional. Isso nos leva a definir e^x, para os valores irracionais de x, por meio da equação

$$\boxed{e^x = \exp(x)}$$

Em outras palavras, pelas razões dadas, definimos e^x como a função inversa de $\ln x$. Nessa notação (6) fica

8 $$\boxed{e^x = y \iff \ln y = x}$$

e as equações de cancelamento (7) ficam

9 $$\boxed{e^{\ln x} = x \qquad x > 0}$$

10 $$\boxed{\ln(e^x) = x \qquad \text{para todo } x}$$

A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das funções mais freqüentes no cálculo e em suas aplicações, portanto é importante que você se familiarize com seu gráfico

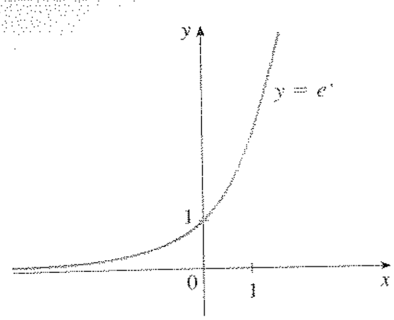


FIGURA 7
Função exponencial natural

(Figura 7) e suas propriedades (que seguem do fato de que é a inversa da função logarítmica natural).

Propriedades da Função Exponencial A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função contínua, crescente, com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Assim, $e^x > 0$ para todo x. Também

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Logo o eixo x é uma assíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

Vamos verificar que f tem as outras propriedades esperadas de uma função exponencial.

11 **Lei dos Expoentes** Se x e y forem números reais e r for racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

Prova da Lei nº 1 Usando a primeira lei dos logaritmos e a Equação 10, temos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Uma vez que ln é uma função um a um, segue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

As Leis nºs 2 e 3 são provadas de forma análoga (veja os Exercícios 6 e 7). Como veremos em breve, a Lei nº 3 na realidade é válida quando r é qualquer número real.

Vamos provar agora a fórmula de diferenciação para e^x.

12
$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

Prova A função $y = e^x$ é diferenciável, pois é a função inversa de $y = \ln x$, que sabemos ser diferenciável. Para encontrar sua derivada, usamos o método da função inversa. Seja $y = e^x$. Então $\ln y = x$ e, diferenciando essa última equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

Funções Exponenciais Gerais

Se $a > 0$ e r é qualquer número racional, então, por (9) e (11),

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Dessa forma, mesmo que x seja irracional, *definimos*

13 $$a^x = e^{x \ln a}$$

Assim, por exemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$$

A função $f(x) = a^x$ é chamada **função exponencial com base *a***. Note que a^x é positiva para todo x, pois e^x é positiva para todo x.

A Definição 13 nos permite estender uma das leis dos logaritmos. Já sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ quando r é racional. Mas se permitirmos r ser *qualquer* número real teremos, da Definição 13,

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Do mesmo modo,

14 $$\ln a^r = r \ln a \qquad \text{para todo número real } r.$$

As leis gerais dos expoentes que seguem da Definição 13 junto com as leis de expoentes para e^x.

15 **Lei dos Expoentes** Se x e y forem números reais e $a, b > 0$, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x/a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

Prova

1. Usando a Definição 13 e as leis de expoentes para e^x, temos

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y \end{aligned}$$

3. Utilizando a Equação 14, obtemos

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} \\ &= e^{xy \ln a} = a^{xy} \end{aligned}$$

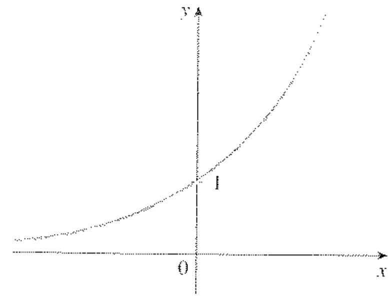
As provas remanescentes ficarão como exercícios.

A fórmula de diferenciação para funções exponenciais é também uma conseqüência da Definição 13:

16 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Prova $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

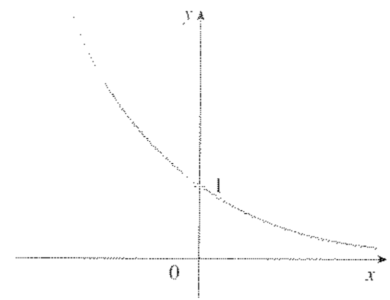
Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, logo $(d/dx)\,a^x = a^x \ln a > 0$. Isso mostra que $y = a^x$ é crescente (veja a Figura 8). Se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$, e portanto $y = a^x$ é decrescente (veja a Figura 9).



$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

FIGURA 8

$y = a^x$, $a > 1$



$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$

FIGURA 9

$y = a^x$, $0 < a < 1$

Funções Logarítmicas Gerais

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função um a um. Sua função inversa é chamada **função logarítmica com base *a***, e é denotada por $\log_a$. Assim

17 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Em particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

As leis dos logaritmos são similares àquelas do logaritmo natural e podem ser deduzidas a partir das leis dos expoentes (veja o Exercício 10).

Para diferenciar $y = \log_a x$, escrevemos a equação como $a^y = x$. Da Equação 14, temos $y \ln a = \ln x$, logo

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Uma vez que $\ln a$ é uma constante, podemos diferenciar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$$

18 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

O Número *e* Expresso como um Limite

Nesta seção definimos e como um número tal que $\ln e = 1$. O próximo teorema mostra que isso é igual ao número e definido na Seção 3.1 (veja a Equação 3.8.5).

19
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Prova Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = 1/x$, portanto $f'(1) = 1$. Mas, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Portanto, pelo Teorema 2.58 e a continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

5.6 Exercícios

1. (a) Comparando áreas, mostre que

$$\tfrac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \tfrac{5}{12}$$

   (b) Use a Regra do Ponto Médio $n = 10$ para estimar $\ln 1{,}5$.

2. Com referência ao Exemplo 1.
   (a) Ache a equação da reta tangente à curva $y = 1/t$ que é paralela à reta secante AD.
   (b) Use a parte (a) para mostrar que $\ln 2 > 0{,}66$.

3. Comparando áreas, mostre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

4. (a) Comparando áreas, mostre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.
   (b) Deduza que $2 < e < 3$.

5. Prove a terceira lei dos logaritmos. [*Sugestão*: Comece mostrando que ambos os lados da equação têm a mesma derivada.]

6. Prove a Segunda Lei dos Expoentes para e^x [veja (11)].

7. Prove a Terceira Lei dos Expoentes para e^x [veja (11)].

8. Prove a Segunda Lei dos Expoentes [veja (15)].

9. Prove a Quarta Lei dos Expoentes [veja (15)].

10. Deduza as seguintes Leis dos Logaritmos a partir de (15):
    (a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
    (b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
    (c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

5 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
   (b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
   (c) Se $f(x)$ assume valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
   (b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
   (c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assume valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
   (b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual flui água para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em pés por segundo, com aceleração $a(t)$.
   (a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
   (b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
   (c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
   (b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação "diferenciação e integração são processos inversos".

8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Explique por que ou dê um contra-exemplo da afirmativa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Se f for contínua em $[a, b]$, e $f(x) \geqslant 0$, então
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Se f' for contínua em $[1, 3]$, então $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Se f e g forem contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Se f e g forem diferenciáveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

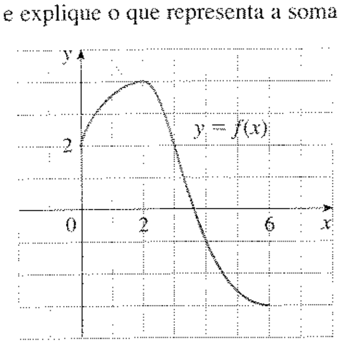
12. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.

13. Todas as funções contínuas têm derivadas.

14. Todas as funções contínuas têm antiderivadas.

EXERCÍCIOS

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) os extremos esquerdos e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.



2. (a) Calcule a soma de Riemann para
$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$
com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais os extremos direitos. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.
   (b) Use a definição de integral definida (com os extremos direitos) para calcular o valor da integral
$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$
   (c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).
   (d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

3. Calcule

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \, \Delta x$$

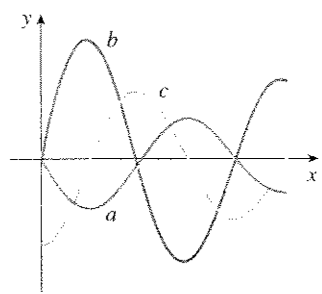
como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

5. Se $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, ache $\int_4^6 f(x)\,dx$.

6. (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como o limite das somas de Riemann tomando como pontos amostrais os extremos direitos. Use um CAS para calcular a soma e computar o limite.

(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.



8. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) dx$

(b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule, se existir, a integral.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\int_0^T (x^4 + 8x - 7)\,dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\int_0^1 \left(\sqrt[4]{u} + 1\right)^2 du$

15. $\int_0^1 y\left(y^2 + 1\right)^5 dy$

16. $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\,dv$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\int_0^1 e^{\pi t}\,dt$

22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2 - 3x}\,dx$

23. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1 + x - x^2}{x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\int \operatorname{cossec}^2 3t\,dt$

27. $\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 \left|x^2 - 4\right| dx$

38. $\int_0^4 \left|\sqrt{x} - 1\right| dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre então a área exata.

42. Faça o gráfico da função $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Ache a derivada da função.

43. $F(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\,dt$

44. $F(x) = \int_\pi^x \operatorname{tg}(s^2)\,ds$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$

46. $g(x) = \int_1^{\cos x} \sqrt[3]{1 - t^2}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$ **54.** $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

55. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$.

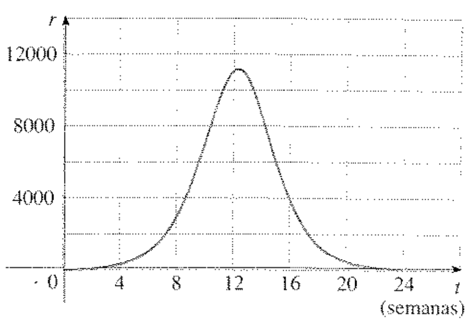
56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t) = t^2 - t$ onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa pela qual o óleo é consumido no mundo, onde t é medido em anos começando em $t = 0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa a $\int_0^3 r(t)dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana, o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as 24 primeiras semanas.



60. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calcule $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Ache uma antiderivada F de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2)$ tal que $F(1) = 0$.

62. A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi t^2)\, dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x) = \int_0^x \cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.
(a) Em quais intervalos C é crescente?
(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?
(c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, correta até a segunda casa decimal:

$$\int_0^x \cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt = 0{,}7$$

(d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ e $x = 1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x| \leqslant a$ e 0 se $|x| > a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para achar a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos computar

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use a Regra de L'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$, e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Se f' for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Ache $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, prove que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

Problemas Quentes

Antes de olhar a solução do próximo exemplo, cubra-o e tente resolvê-lo você mesmo.

Exemplo 1 Calcule $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{x}{x-3} \int_3^x \dfrac{\text{sen } t}{t}\, dt \right)$.

Solução Vamos começar por uma análise preliminar dos ingredientes da função. O que acontece com o primeiro fator, $x/(x-3)$, quando x tende a 3? O numerador tende a 3 e o denominador a 0, portanto temos

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^-$$

O segundo fator tende a $\int_3^3 (\text{sen } t)/t\, dt$, que é 0. Não está claro o que acontece com a função como um todo. (Um fator torna-se grande enquanto o outro torna-se pequeno.) Como devemos proceder?

▪ Os princípios dos problemas-soluções foram discutidos na página 80.

Um dos princípios dos problemas-soluções *é reconhecer alguma coisa familiar*. Haverá uma parte da função que nos lembre de alguma coisa vista antes? Bem, a integra

$$\int_3^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

tem x como seu limite superior de integração, e esse tipo de integral ocorre na Parte 1 dc Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Isso sugere que uma diferenciação pode estar envolvida.

Uma vez que começamos a pensar sobre a diferenciação, o denominador $(x-3)$ lembra-nos de alguma coisa que pode ser familiar: uma das formas de definição de derivada no Capítulo 2 é

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

e com $a = 3$ isso fica

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

Logo, qual é a função F em nossa situação? Note que se definirmos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

então $F(3) = 0$. E o que acontece com o fator x no numerador? Ele é somente uma pistɛ falsa, portanto vamos fatorá-lo e colocar junto o cálculo:

▪ Outra estratégia é usar a Regra de L'Hôspital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt \right) &= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt}{x - 3} \\
&= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3} \\
&= 3F'(3) \\
&= 3\, \frac{\text{sen } 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\
&= \text{sen } 3
\end{aligned}$$

Problemas

1. Se $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, onde f é uma função contínua, ache $f(4)$.

2. Suponha que a curva $y = f(x)$ passe pela origem e pelo ponto $(1, 1)$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f'(x)\, dx$.

3. Mostre que $\dfrac{1}{17} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1 + x^4}\, dx \leqslant \frac{7}{24}$.

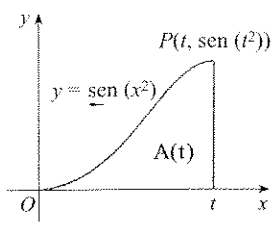
4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ e analise as regiões entre essas curvas e o eixo x. Como estão relacionadas as áreas dessas regiões?
   (b) Prove sua conjectura em (a).
   (c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada pelos vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de curva ela é?
   (d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).

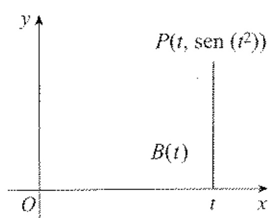
5. Se $f(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\, dt$, onde $g(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\, dt$, ache $f'(\pi/2)$.

6. Se $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$, ache $f'(x)$.

7. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \operatorname{tg} 2t)^{1/t}\, dt$.

8. A figura mostra duas regiões no primeiro quadrante: $A(t)$ é a área sob a curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ de 0 até t, e $B(t)$ é a área do triângulo com vértices O, P e $(t, 0)$. Ache $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.





FIGURAS PARA O PROBLEMA 8

9. Ache o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ é o máximo.

10. Use uma integral para estimar a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{10.000} \sqrt{i}$.

11. (a) Calcule $\int_0^n [\![x]\!]\, dx$, onde n é um inteiro positivo.
    (b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\, dx$, onde a e b são números reais com $0 \leqslant a < b$.

12. Encontre $\dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$.

13. Se f for uma função diferenciável tal que $\int_0^x f(t)\, dt = [f(x)]^2$ para todo x, ache f.

14. Um disco circular de raio r é usado em um evaporador e deve girar em um plano vertical. Ele deve ficar parcialmente submerso no líquido de tal forma a maximizar a área molhada exposta do disco. Mostre que o centro do disco deve estar posicionado a uma altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ acima da superfície do líquido.

15. Prove que se f for contínua, então $\displaystyle\int_0^x f(u)(x - u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$.

16. A figura mostra uma região que consiste em todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos do centro que dos lados do quadrado. Ache a área da região.

17. Calcule $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + n}} \right)$.

18. Para um número c qualquer, seja $f_c(x)$ dentre os dois números $(x - c)^2$ e $(x - c - 2)^2$. Definimos então $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\, dx$. Ache os valores máximo e mínimo de $g(c)$ se $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

19. Suponha que f é contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Ache o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$.

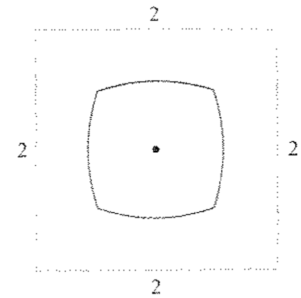
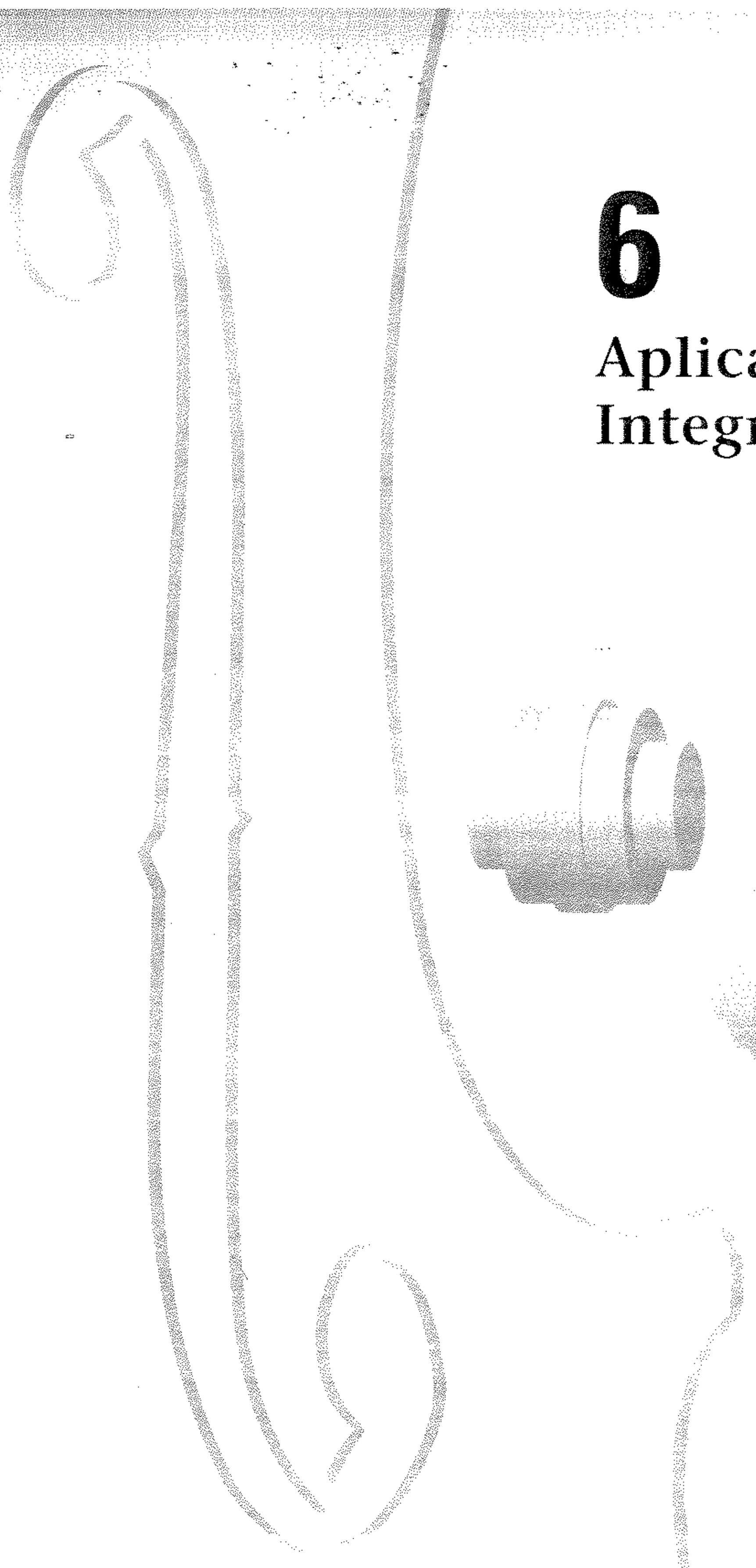
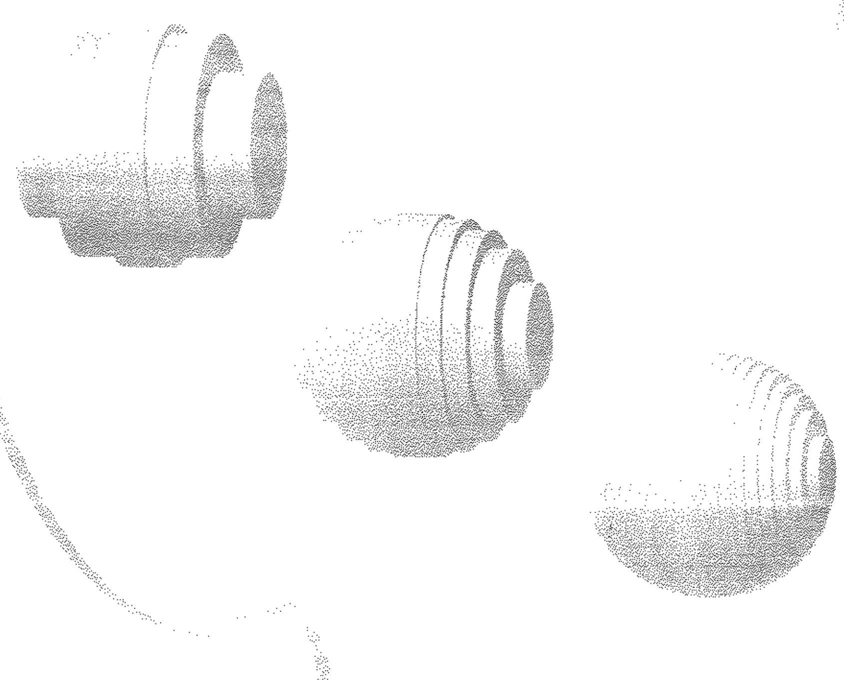


FIGURA PARA O PROBLEMA 16



6

Aplicações de Integração



"O volume de uma esfera é o limite das somas dos volumes dos cilindros aproximados."

Neste capítulo exploramos algumas das aplicações da integral definida usando-a para calcular as áreas entre curvas, volumes de sólidos e o trabalho feito por uma força variável. O tema comum é o seguinte método geral, o qual é similar àquele que usamos para encontrar as áreas sob as curvas: dividimos uma quantidade Q em um grande número de pequenas partes. Então, aproximamos cada pequena parte por uma quantidade do tipo $f(x_i^*)\,\Delta x$ e, portanto, aproximamos Q por uma soma de Riemann. Daí tomamos o limite e expressamos Q como uma integral. Finalmente avaliamos a integral utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo ou a Regra do Ponto Médio.

6.1 Áreas entre as Curvas

No Capítulo 5 definimos e calculamos as áreas de regiões que estão sob os gráficos de funções. Aqui usamos as integrais para encontrar as áreas de regiões entre os gráficos de duas funções.

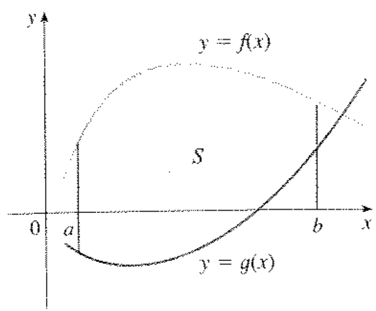


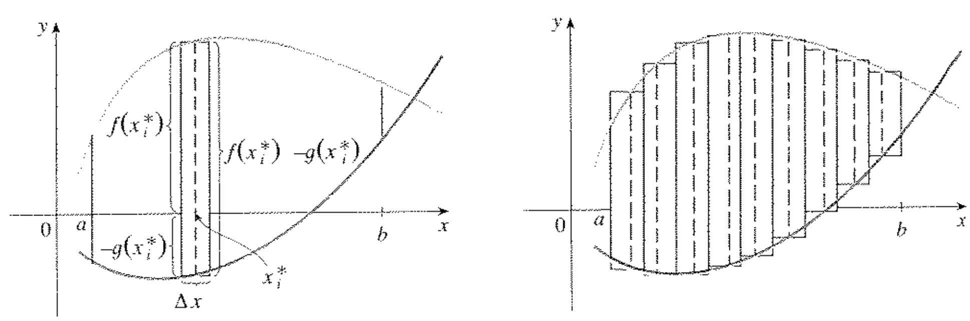
FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Considere a região S que está entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Veja a Figura 1.)

Assim como fizemos para as áreas sob as curvas na Seção 5.1, dividimos S em n faixas de larguras iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Veja a Figura 2.) Poderíamos ainda tomar todos os pontos extremos direitos como pontos de amostragem, nesse caso $x_i^* = x_i$. A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

é, portanto, uma aproximação que intuitivamente pensamos como a área de S.



(a) Retângulo típico

(b) Retângulos aproximadores

FIGURA 2

Essa aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. Portanto definimos a **área** A de como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos aproximadores.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x}$$

Reconhecemos o limite em (1) como a integral definida de $f - g$. Portanto, temos seguinte fórmula para a área.

> **2** A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, é
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

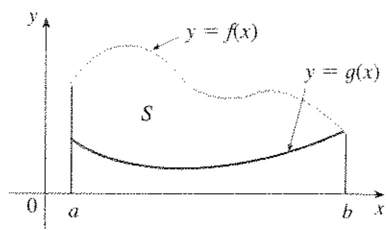


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Observe que, no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f, e a nossa definição geral de área (1) é reduzida à nossa definição anterior (Definição 2 na Seção 5.1).

No caso em que f e g forem ambas positivas, você pode ver na Figura 3 por que (2) é verdadeira:

$$A = [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EXEMPLO 1 □ Encontre a área da região limitada por cima por $y = e^x$, e por baixo por $y = x$, e limitada pelos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 4. A curva limitante superior é $y = e^x$ e a curva limitante inferior, $y = x$. Então usamos a fórmula (2) da área com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b = 1$:

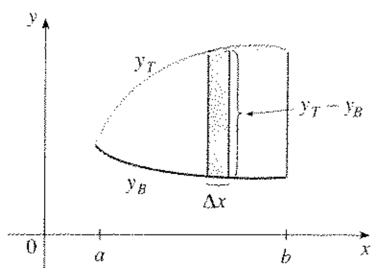


FIGURA 4

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5$$

Na Figura 4 desenhamos um retângulo aproximador típico com a largura Δx como um lembrete do procedimento pelo qual a área é definida em (1). Em geral, quando estabelecemos uma integral para uma área, é útil esboçar a região para identificar a curva superior y_T, a curva inferior y_B e um retângulo aproximador típico, como na Figura 5. Então a área de um retângulo típico é $(y_T - y_B)\,\Delta x$, e a equação

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resume o procedimento de adição (no sentido de limite) das áreas de todos os retângulos típicos.

Note que na Figura 5 a fronteira esquerda se reduz a um ponto, enquanto na Figura 3 a fronteira direita é que se reduz a um ponto. No próximo exemplo ambas as fronteiras se reduzem a um ponto, então a primeira etapa é encontrar a e b.

EXEMPLO 2 □ Encontre a área da região entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos de interseção das parábolas resolvendo suas equações simultaneamente. Isto resulta em $x^2 = 2x - x^2$ ou $2x^2 - 2x = 0$. Portanto, $2x(x - 1) = 0$; assim, $x = 0$ ou 1. Os pontos de interseção são $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

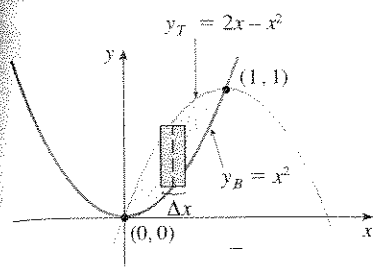


FIGURA 6

Vemos na Figura 6 que as fronteiras superior e inferior são

$$y_T = 2x - x^2 \quad \text{e} \quad y_B = x^2$$

A área de um retângulo típico é

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

e a região está entre $x = 0$ e $x = 1$. Então a área total é

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Às vezes é difícil, ou mesmo impossível, encontrar os pontos exatos de interseção (duas curvas. Como mostramos no exemplo a seguir, podemos usar uma calculadora gr fica ou um computador para encontrar os valores aproximados para os pontos de interseç e então prosseguir como anteriormente.

EXEMPLO 3 □ Encontre a área aproximada da região limitada pelas curvas $y = x/\sqrt{x^2 +}$ e $y = x^4 - x$.

SOLUÇÃO Se tentássemos encontrar os pontos exatos de interseção, teríamos de resolve a equação

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

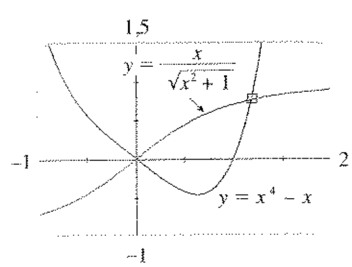


FIGURA 7

Essa parece ser uma equação muito difícil de resolver exatamente (de fato, é impossível), então usamos uma calculadora gráfica para desenhar os gráficos das duas curvas na Figura 7. Um ponto de interseção é a origem. Ampliamos na direção do outro ponto de interseção e descobrimos que $x \approx 1{,}18$. (Se maior precisão fosse requerida, poderíamos usar o método de Newton ou outro método, se disponível na nossa calculadora gráfica.) Assim uma aproximação para a área entre as curvas é

$$A \approx \int_0^{1{,}18}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x)\right]dx$$

Para integrar o primeiro termo utilizamos a substituição $u = x^2 + 1$. Então $du = 2x\,dx$ e quando $x = 1{,}18$, temos $u \approx 2{,}39$. Logo

$$A \approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2{,}39}\frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1{,}18}(x^4 - x)\,dx$$

$$= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2{,}39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1{,}18}$$

$$= \sqrt{2{,}39} - 1 - \frac{(1{,}18)^5}{5} + \frac{(1{,}18)^2}{2}$$

$$\approx 0{,}785$$

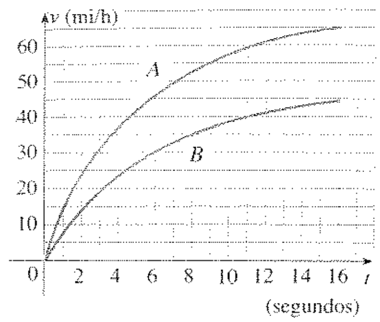


FIGURA 8

EXEMPLO 4 □ A Figura 8 mostra as curvas de velocidade de dois carros A e B, que partem lado a lado e se movem ao longo da mesma estrada. O que a área entre as curvas representa? Use a Regra do Ponto Médio para estimá-la.

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 5.4 que a área sob a curva de velocidade A representa a distância percorrida pelo carro A durante os primeiros 16 segundos. Similarmente, a área sob a curva B é a distância percorrida pelo carro B durante o mesmo período de tempo. Assim a área entre essas curvas, que é a diferença entre as áreas sob as curvas, é a distância entre os carros após 16 segundos. Obtemos as velocidades a partir do gráfico e as convertemos para pés por segundo (1 mi/h $= \frac{5280}{3600}$ pés/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Usamos a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ intervalos, de forma que $\Delta t = 4$. Os pontos médios dos intervalos são $\bar{t}_1 = 2, \bar{t}_2 = 6, \bar{t}_3 = 10$ e $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos a distância entre os carros após 16 segundos, como a seguir:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$

$$= 4(93) = 372 \text{ pés}$$

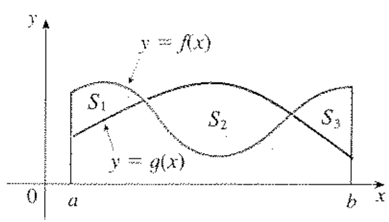


FIGURA 9

Para encontrar a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$ para alguns valores de x, mas $g(x) \geq f(x)$ para outros valores de x, então dividimos a região S dada em várias regiões $S_1, S_2, \ldots$ com áreas $A_1, A_2, \ldots$ como mostrado na Figura 9. Então definimos a área da região S como a soma das áreas das regiões menores $S_1, S_2, \ldots$: $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Como

$$|f(x) - (g)| = \begin{cases} f(x) - \ (x) \text{ quando } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) \text{ quando } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

temos a seguinte expressão para A.

> $\boxed{3}$ A área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é
>
> $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Quando avaliamos a integral em (3), contudo, ainda devemos dividi-la em integrais correspondentes a $A_1, A_2, \ldots$.

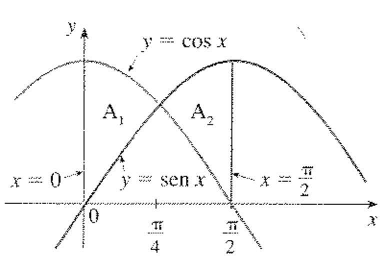


FIGURA 10

EXEMPLO 5 □ Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Os pontos de interseção ocorrem quando $\text{sen}\, x = \cos x$, isto é, quando $x = \pi/4$ (porque $0 \leq x \leq \pi/2$). A região está esboçada na Figura 10. Observe que $\cos x \geq \text{sen}\, x$

quando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, mas $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ quando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Portanto, a área requerida é

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}
$$

Neste exemplo particular poderíamos ter economizado trabalho notando que a região é simétrica em relação a $x = \pi/4$ e então

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é limitada por curvas com equações $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, onde f e g são contínuas e $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (veja a Figura 11), então sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

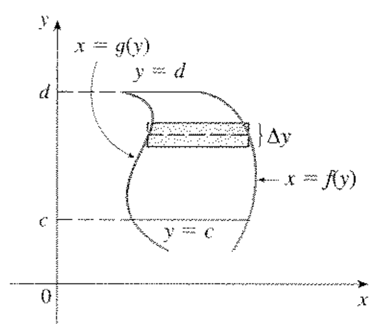


FIGURA 11

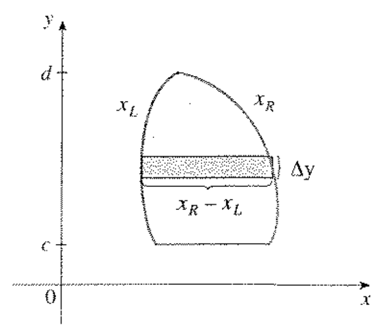


FIGURA 12

Se escrevermos x_R para o extremo direito e x_L para o extremo esquerdo, então, como a Figura 12 ilustra, teremos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

Aqui um retângulo típico de aproximação tem dimensões $x_R - x_L$ e Δy.

EXEMPLO 6 Encontre a área limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO Resolvendo as duas equações descobrimos que os pontos de interseção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$. Resolvemos a equação da parábola para x e notamos pela Figura 13 que as curvas de fronteira esquerda e direita são

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_R = y + 1$$

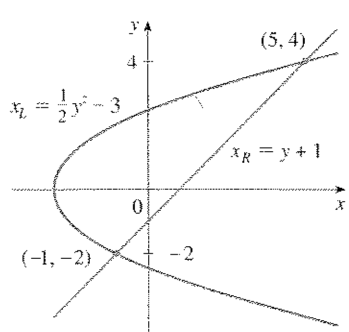


FIGURA 13

Devemos integrar entre os valores apropriados de y, $y = -2$ e $y = 4$. Assim

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Big]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

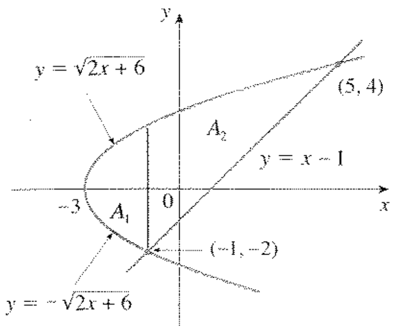


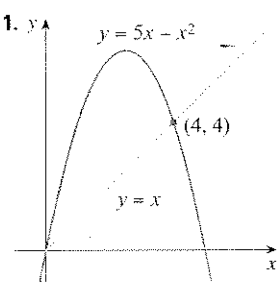
FIGURA 14

Poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6 integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito maior. Isso significaria dividir a região em dois e calcular as áreas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

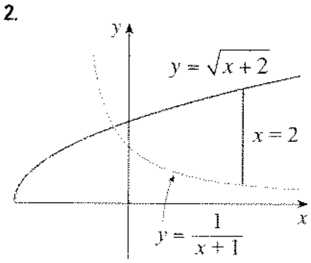
6.1 Exercícios

1–4 □ Encontre as áreas das regiões sombreadas.

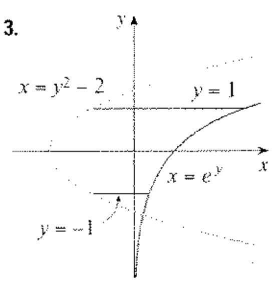
1.



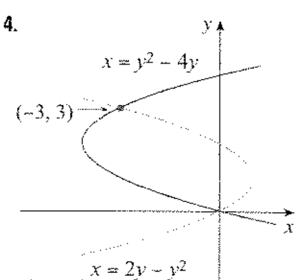
2.



3.



4.



5–26 □ Esboce a região limitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y. Desenhe um retângulo típico de aproximação e coloque sua altura e largura. Então calcule a área da região.

5. $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$

6. $y = \operatorname{sen} x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

7. $y = x$, $y = x^2$

8. $y = x^2$, $y = x^4$

9. $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2$, $y^2 = x$

12. $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$

13. $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

14. $y = x^3 - x$, $y = 3x$

15. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 9$

16. $y = 8 - x^2$, $y = x^2$, $x = -3$, $x = 3$

17. $x = 2y^2$, $x + y = 1$

18. $4x + y^2 = 12$, $x = y$

19. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$

20. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$, $y = x$

21. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

22. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

23. $y = \cos x$, $y = 1 - 2x/\pi$

24. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

25. $y = x^2$, $y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = \operatorname{sen} \pi x$, $y = x^2 - x$, $x = 2$

27–28 □ Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

27. (0, 0), (2, 1), (−1, 6)

28. (0, 5), (2, −2), (5, 1)

29–30 Avalie a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

29. $\int_{-1}^{1} |x^3 - x| \, dx$ **30.** $\int_{0}^{4} \left|\sqrt{x+2} - x\right| dx$

31–32 Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para aproximar a área de uma região limitada pelas curvas dadas.

31. $y = \operatorname{sen}^2(\pi x/4)$, $y = \cos^2(\pi x/4)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

32. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}$, $y = 0$, $x = 0$

33–36 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas de x dos pontos de interseção das curvas dadas. Então encontre a área aproximada da região limitada pelas curvas.

33. $y = x^2$, $y = 2 \cos x$ **34.** $y = x^4$, $y = 3x - x^3$

35. $y = x \cos(x^2)$, $y = x^3$ **36.** $y = e^x$, $y = 2 - x^2$

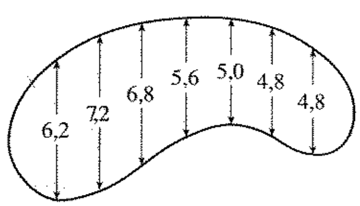
37. Use um sistema algébrico computacional para encontrar a área exata da região delimitada pelas curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ e $y = x$.

38. Faça um esboço da região no plano xy delimitada pelas inequações $x - 2y^2 \geq 0, 1 - x - |y| \geq 0$ e encontre sua área.

39. Os carros de corrida dirigidos por Cristina e Laís estão lado a lado na largada de uma corrida. A tabela mostra as velocidades de cada carro (em milhas por hora) durante os primeiros 10 segundos da corrida. Use a Regra do Ponto Médio para estimar quão mais longe Laís viaja em relação a Cristina durante os primeiros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

40. As larguras (em metros) de uma piscina com o formato de um rim foram medidas a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a área da piscina.



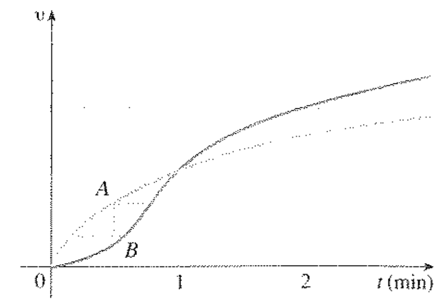
41. Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções de rapidez.

(a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.

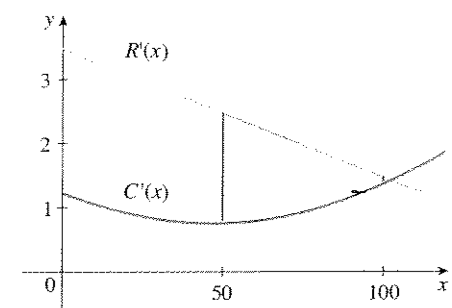
(b) Qual o significado da área da região sombreada?

(c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.

(d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.



42. A figura mostra os gráficos da função de receita marginal R' e da função de custo marginal C' para um fabricante. [Lembre-se de que, da Seção 4.8, $R(x)$ e $C(x)$ representam a receita e o custo quando x unidades são manufaturadas. Suponha que R e C são medidos em milhares de dólares.] Qual o significado da área da região sombreada? Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor dessa quantidade.



43. A curva com a equação $y^2 = x^2(x + 3)$ é chamada **cúbica de Tschirnhausen**. Se você colocar essa curva em um gráfico, verá que parte dela forma um laço. Encontre a área dentro desse laço.

44. Encontre a área da região limitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a essa parábola em $(1, 1)$ e o eixo x.

45. Encontre o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

46. (a) Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecta a área sob a curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Encontre o número b tal que a reta $y = b$ bissecta a área da parte (a).

47. Encontre os valores de c tal que a área da região limitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

48. Suponha que $0 < c < \pi/2$. Para qual valor de c a área da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ e $x = 0$ é igual à área da região limitada pelas curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ e $y = 0$?

49. Para quais valores de m a reta $y = mx$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$ limitam uma região? Encontre a área da região.

6.2 Volumes

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido nos deparamos com o mesmo tipo de problema para calcular as áreas. Temos uma idéia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando cálculo para dar uma definição exata de volume.

Começamos com um sólido simples chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é limitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (a distância de B_1 a B_2) é h, logo o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 1(b)], e se a base é um retângulo com o comprimento l e largura w, nesse caso o cilindro é uma caixa retangular (também conhecida como *paralelepípedo retangular*) com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 1(c)].

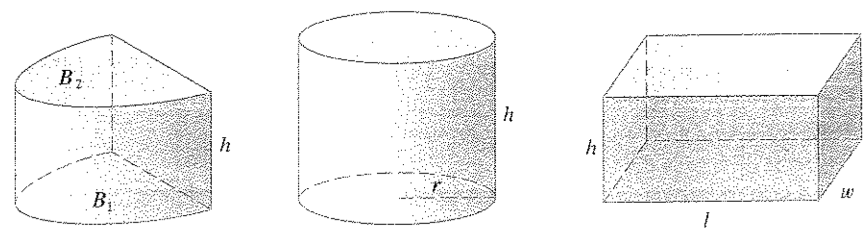


FIGURA 1

(a) Cilindro $V = Ah$

(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$

(c) Caixa retangular $V = lwh$

Para um sólido S que não é um cilindro primeiro "cortamos" S em pedaços e aproximamos cada pedaço por um cilindro. Estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de S por um processo de limite quando o número de partes se torna grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtemos uma região plana chamada **seção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leqslant x \leqslant b$. (Veja a Figura 2. Pense em fatiar S com uma faca por meio de x e calcular a área dessa fatia.) A área da secção transversal $A(x)$ varia quando x aumenta de a até b.

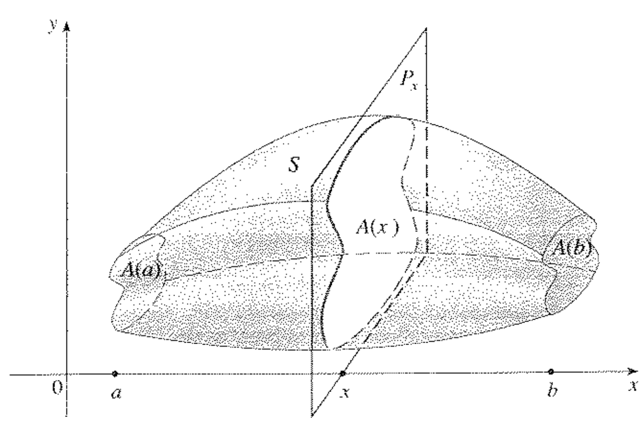


FIGURA 2

Vamos dividir S em n fatias de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um filão de pão.) Se escolhermos os pontos de amostragem x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) por um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx. (Veja a Figura 3.)

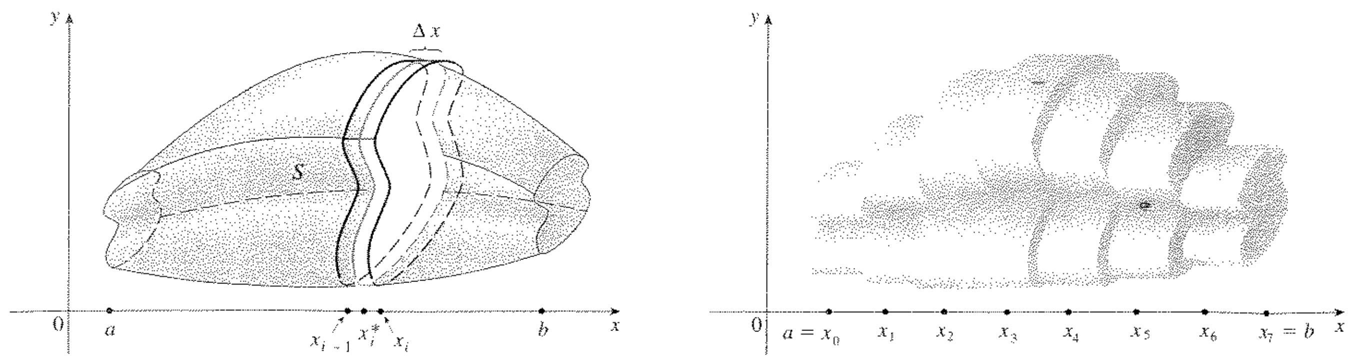


FIGURA 3

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\,\Delta x$, assim uma aproximação para a nossa concepção intuitiva de volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Essa aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *definimos* o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como a integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

□ Pode-se provar que essa definição é independente de como S se situa com relação ao eixo x. Ou seja, não importa como fatiamos S com planos paralelos, sempre teremos o mesmo resultado para V.

Definição de Volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)\,dx$ é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel obtida pelo fatiamento passando por x perpendicular ao eixo x.

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x. Assim da nossa definição de volume resulta que $V = \int_a^b A\,dx = A(b-a)$; e isso fica de acordo com a fórmula $V = Ah$.

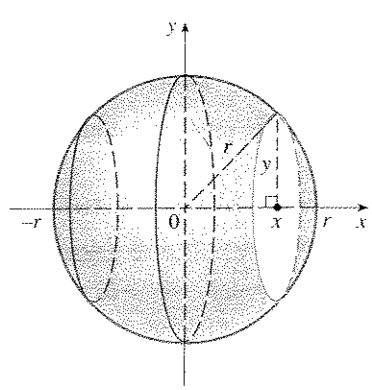


FIGURA 4

EXEMPLO 1 □ Mostre que o volume de uma esfera de raio r é

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

SOLUÇÃO: Se colocarmos a esfera de maneira que o seu centro esteja na origem (veja a Figura 4), então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio (pelo Teorema de Pitágoras) é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(O integrando é par.)}$$

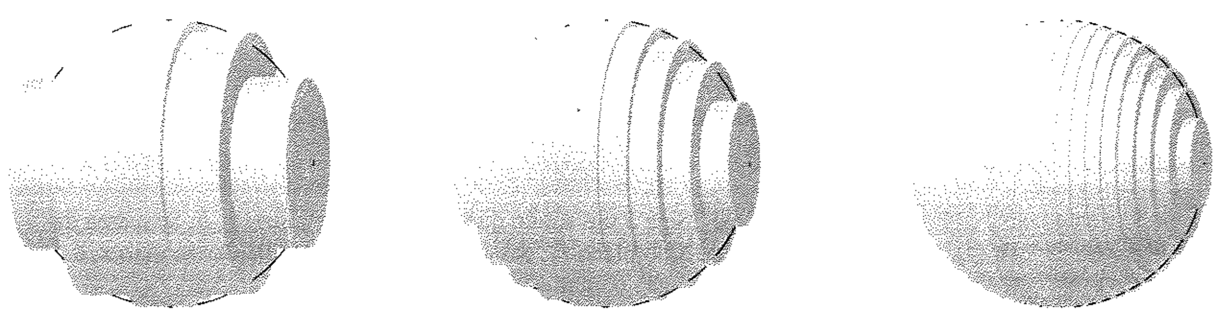
$$= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A Figura 5 ilustra a definição de volume quando o sólido é uma esfera com raio $r = 1$. Pelo resultado do Exemplo 1, sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi \approx 4.18879$. Aqui as fatias são cilindros circulares (*discos*), e as três partes da Figura 5 mostram as interpretações geométricas das somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

quando $n = 5$, 10, e 20, se escolhermos os pontos de amostragem x_i^* como os pontos médios $\bar{x}_i$. Note que quando aumentamos o número de cilindros de aproximação, a correspondente soma de Riemann torna-se mais próxima do volume verdadeiro.



(a) Usando 5 discos, $V \approx 4{,}2726$ (b) Utilizando 10 discos, $V \approx 4{,}2097$ (c) Usando 20 discos, $V \approx 4{,}1940$

FIGURA 5 Aproximação do volume de uma esfera de raio 1

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1. Ilustre a definição de volume esboçando um cilindro típico de aproximação.

SOLUÇÃO A região é exposta na Figura 6(a). Se fizermos a rotação ao redor do eixo x, obteremos o sólido mostrado na Figura 6(b). Quando fatiamos através do ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área dessa secção transversal é

$$A(x)\ y^2 = \pi(\sqrt{x})^2\ y^2 = \pi x$$

e o volume do cilindro de aproximação (um disco com espessura Δx) é

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

Obtivemos uma resposta razoável no Exemplo 2? Conferindo o nosso trabalho, vamos trocar a região dada por um quadrado de base $[0,1]$ e altura 1. Se fizermos a rotação desse quadrado, obteremos um cilindro com raio 1, altura 1 e volume $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Calculamos que o sólido dado tem metade desse volume. Isso parece estar certo.

O sólido está entre $x = 0$ e $x = 1$; assim, o seu volume é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

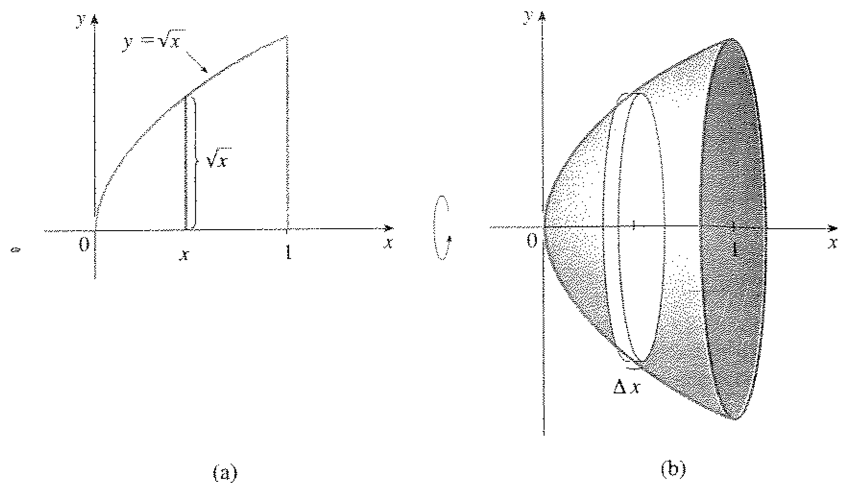


FIGURA 6

(a) (b)

EXEMPLO 3 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ ao redor do eixo y.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 7(a) e o sólido resultante é mostrado na Figura 7(b). Como a região é girada ao redor do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y e, portanto, integrar em relação a y. Se fatiarmos a uma altura y, obteremos um disco circular com raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Então a área da seção transversal através de y é

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

e o volume do cilindro de aproximação mostrado na Figura 7(b) é

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Como o sólido está entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

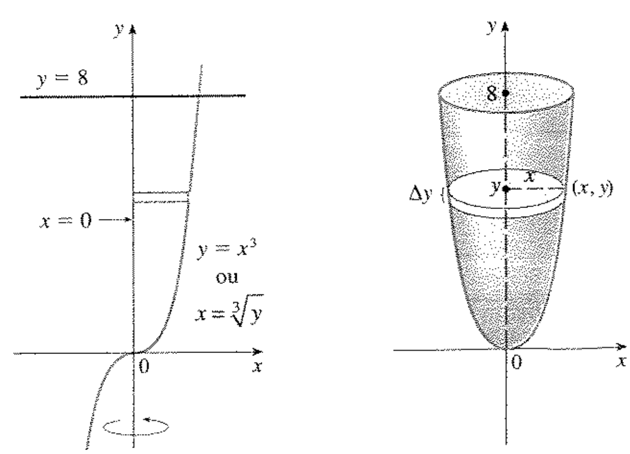


FIGURA 7

EXEMPLO 4 □ A região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se interceptam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A região entre esses pontos, o sólido de rotação e a secção transversal perpendicular ao eixo x são mostrados na Figura 8. A secção transversal no plano P_x tem o formato de uma *arruela* (um anel anular) com raio interno x^2 e raio externo x, portanto calculamos a área da secção transversal subtraindo a área do círculo interno da área do círculo externo:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Portanto temos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$
$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

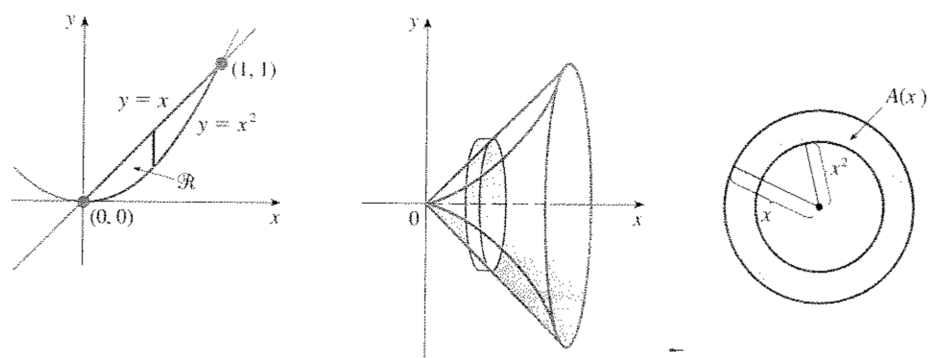


FIGURA 8

(a) (b) (c)

EXEMPLO 5 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do Exemplo 4 ao redor da reta $y = 2$.

SOLUÇÃO O sólido e a secção transversal são mostrados na Figura 9. Novamente a secção transversal é uma arruela, mas dessa vez o raio interno é $2 - x$ e o raio externo é $2 - x^2$.

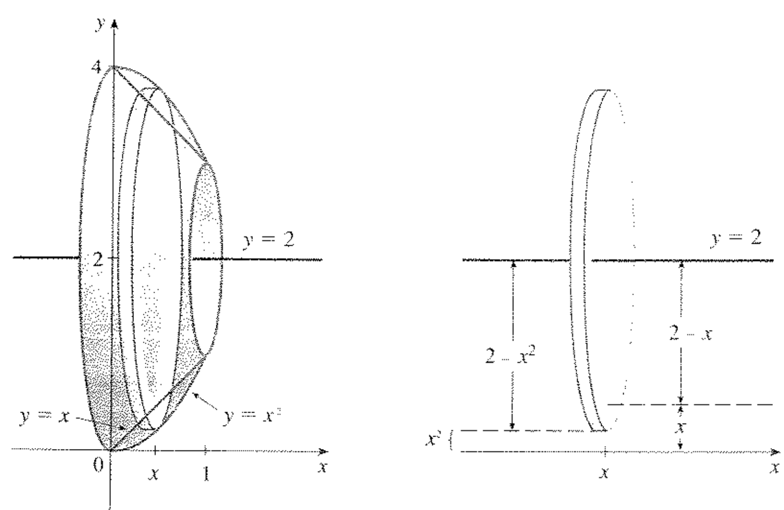


FIGURA 9

A área de secção transversal é

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

e assim o volume de S é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Os sólidos nos Exemplos 1–5 são todos chamados **sólidos de revolução**, porque são obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo. Em geral, calculamos o volume de um sólido de revolução usando a fórmula básica da definição

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

e encontramos a área da secção transversal A(x) ou A(y) por uma das seguintes maneiras:

- Se a secção transversal é um disco (como nos Exemplos 1–3), encontramos o raio do disco (em termos de x ou y) e usamos

$$A = \pi\,(\text{raio})^2$$

- Se a secção transversal é uma arruela (como nos Exemplos 4 e 5), encontramos o raio interno r_{in} e o raio externo r_{ex} a partir de um esboço (como nas Figuras 9 e 10), e calculamos a área da arruela subtraindo a área do disco interno da área do disco externo:

$$A = \pi\,(\text{raio externo})^2 - \pi\,(\text{raio interno})^2$$

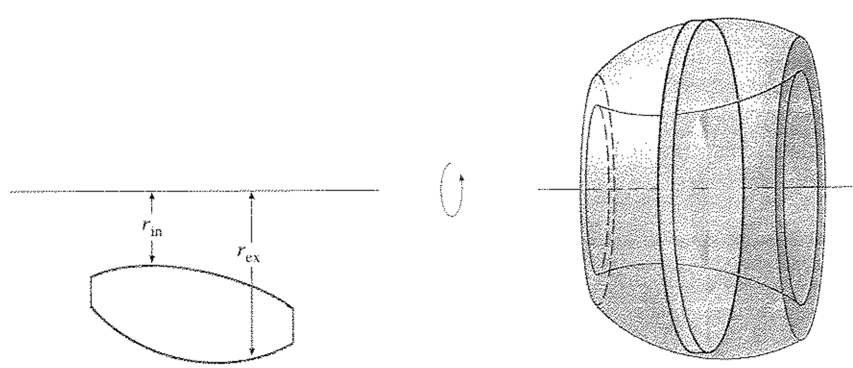


FIGURA 10

O próximo exemplo dá uma ilustração adicional ao procedimento.

EXEMPLO 6 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 ao redor da reta $x = -1$.

SOLUÇÃO A Figura 11 mostra uma secção transversal horizontal. É uma arruela com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$; assim, a área de seção transversal é

$$A(y) = \pi\,(\text{raio externo})^2 - \pi\,(\text{raio interno})^2$$

$$= \pi\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - \pi\left(1+y\right)^2$$

O volume é

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi\int_0^1 \left[(1+\sqrt{y})^2 - (1+y)^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right)dy$$

$$= \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

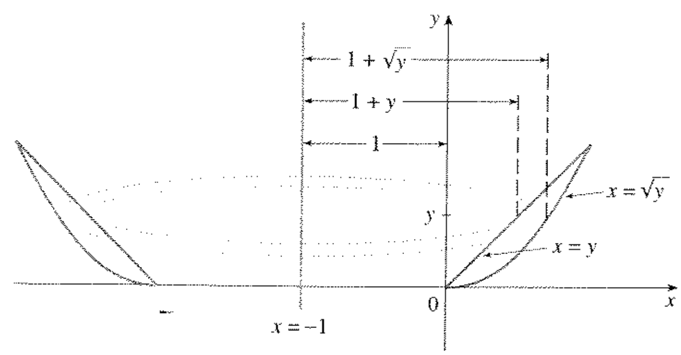


FIGURA 11

Agora encontraremos os volumes de três sólidos que *não* são de revolução.

EXEMPLO 7 ▫ A Figura 12 mostra um sólido com base circular de raio 1. As secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos eqüiláteros. Encontre o volume do sólido.

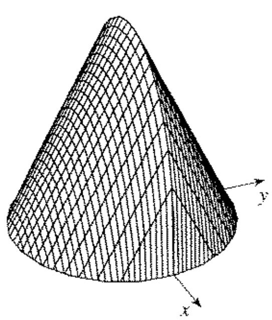


FIGURA 12
Gráfico gerado por computador a partir do sólido descrito no Exemplo 7

SOLUÇÃO Consideremos o círculo como $x^2 + y^2 = 1$. O sólido, sua base e uma secção transversal típica a uma distância x da origem são mostrados na Figura 13.

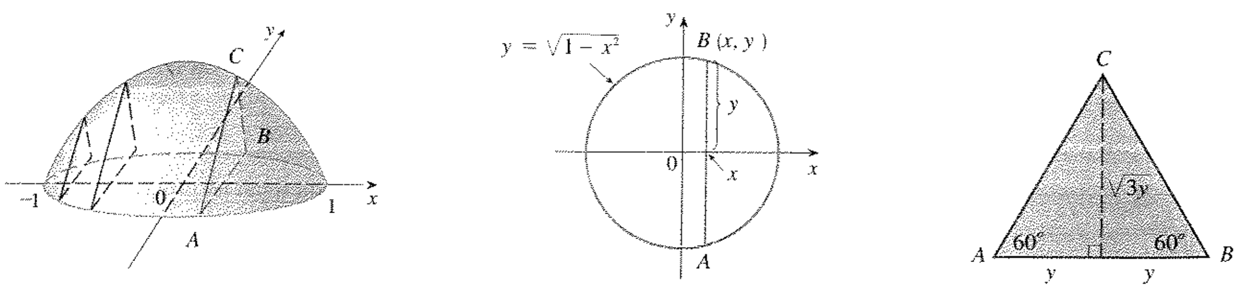


FIGURA 13

(a) Sólido (b) Sua base (c) Secção transversal

Como B está no círculo, temos $y = \sqrt{1-x^2}$, e assim a base do triângulo ABC é $|AB| = 2\sqrt{1-x^2}$. Como o triângulo é eqüilátero, vemos pela Figura 13(c) que a altura é $\sqrt{3}y = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$. A área da secção transversal é, portanto,

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}\,(1-x^2)$$

e o volume do sólido é

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1-x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1-x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

EXEMPLO 8 ▫ Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h.

SOLUÇÃO Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central, como na Figura 14. Qualquer plano P_x que passa por x e é perpendicular ao eixo x intercepta a pirâmide em um quadrado com o lado de comprimento s. Podemos expressar s em termos de x observando que, para os triângulos similares na Figura 15,

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

de forma que $s = Lx/h$. [Outro método é observar que a reta OP tem uma inclinação $L/(2h$ e desse modo a sua equação é $y = Lx/(2h)$.] Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

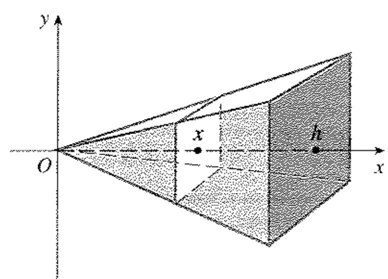


FIGURA 14

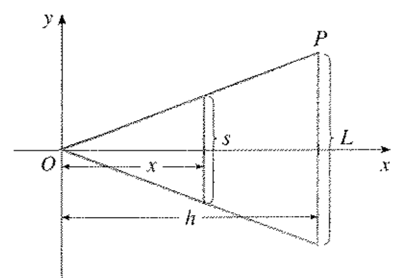


FIGURA 15

A pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$; assim o seu volume é

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx$$

$$= \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2 h}{3}$$

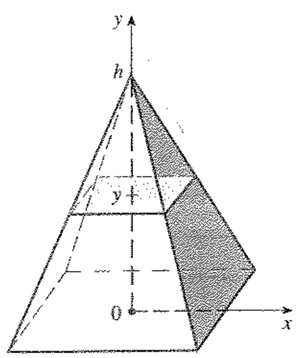


FIGURA 16

NOTA ▫ Não precisamos colocar o vértice da pirâmide na origem no Exemplo 8. Nós fizemos meramente para tornar as equações simples. Se, em vez disso, tivéssemos col cado o centro da base na origem e o vértice no eixo y positivo, como na Figura 16, você poderia verificar que teríamos obtido a integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

EXEMPLO 9 □ Uma cunha é cortada de um cilindro circular de raio 4 por dois planos. Um plano é perpendicular ao eixo do cilindro. O outro intercepta o primeiro com um ângulo de 30 graus ao longo de um diâmetro do cilindro. Encontre o volume da cunha.

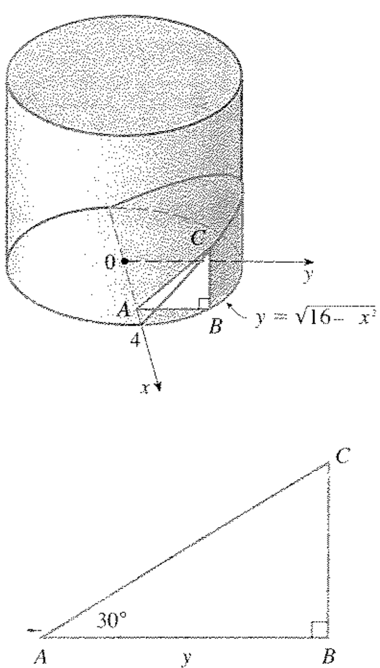


FIGURA 17

SOLUÇÃO Se colocarmos o eixo x ao longo do diâmetro onde os planos se encontram, então a base do sólido é um semicírculo com a equação $\sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Uma secção transversal perpendicular ao eixo x a uma distância x da origem é um triângulo ABC, como mostrado na Figura 17, cuja base é $\sqrt{16 - x^2}$ e cuja altura é $|BC| = y \text{ tg } 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Portanto a área da secção transversal é

$$\begin{aligned} A(x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} \\ &= \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

e o volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Para outro método, veja o Exercício 62. □

6.2 Exercícios

1–18 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados. Esboce a região, o sólido e um disco típico ou arruela.

1. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; ao redor do eixo x

2. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; ao redor do eixo x

3. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; ao redor do eixo x

4. $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$; ao redor do eixo x

5. $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 4$, $x = 0$; ao redor do eixo y

6. $x = y - y^2$, $x = 0$; ao redor do eixo y

7. $y = x^2$, $y^2 = x$; ao redor do eixo x

8. $y = \sec x$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$; ao redor do eixo x

9. $y^2 = x$, $x = 2y$; ao redor do eixo y

10. $y = x^{2/3}$, $x = 1$, $y = 0$; ao redor do eixo y

11. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; ao redor de $y = 1$

12. $y = x^2$, $y = 4$; ao redor de $y = 4$

13. $y = x^4$, $y = 1$; ao redor de $y = 2$

14. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; ao redor de $y = -1$

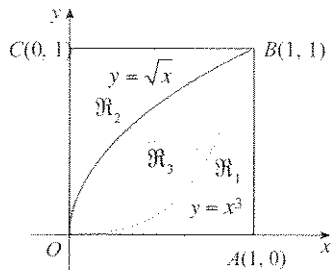
15. $x = y^2$, $x = 1$; ao redor de $x = 1$

16. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; ao redor de $x = 2$

17. $y = x^2$, $x = y^2$; ao redor de $x = -1$

18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; ao redor de $x = 1$

19–30 □ Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta dada.



19. $\mathfrak{R}_1$ ao redor de OA

20. $\mathfrak{R}_1$ ao redor de OC

21. $\mathfrak{R}_1$ ao redor de AB

22. $\mathfrak{R}_1$ ao redor de BC

23. $\mathfrak{R}_2$ ao redor de OA

24. $\mathfrak{R}_2$ ao redor de OC

25. $\mathfrak{R}_2$ ao redor de AB

26. $\mathfrak{R}_2$ ao redor de BC

27. $\mathfrak{R}_3$ ao redor de OA

28. $\mathfrak{R}_3$ ao redor de OC

29. $\mathfrak{R}_3$ ao redor de AB

30. $\mathfrak{R}_3$ ao redor de BC

31–36 □ Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas e ao redor das retas especificadas.

31. $y = \operatorname{tg}^3 x$, $y = 1$, $x = 0$; ao redor do eixo $y = 1$

32. $y = (x-2)^4$, $8x - y = 16$; ao redor do eixo $x = 10$

33. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; ao redor de $y = 1$

34. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; ao redor de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 3$; ao redor de $x = -2$

36. $2x + 3y = 6$, $(y-1)^2 = 4 - x$; ao redor de $x = -5$

37–38 □ Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de interseção das curvas dadas. Então encontre (aproximadamente) o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região limitada por essas curvas.

37. $y = x^2$, $y = \ln(x+1)$

38. $y = 3\operatorname{sen}(x^2)$, $y = e^{x/2} + e^{-2x}$

39–40 □ Use um sistema algébrico computacional para calcular o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

39. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de $y = -1$

40. $y = x$, $y = xe^{1-x/2}$; em torno de $y = 3$

41–44 □ Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

41. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

42. $\pi \int_2^5 y \, dy$

43. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8) \, dy$

44. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2] \, dx$

45. Uma tomografia computadorizada produz vistas de secções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais provêem informações sobre esse órgão que de outra maneira só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das secções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

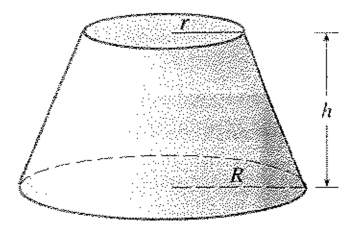
46. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x do fim do tronco) estão listadas na tabela. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do tronco.

x (m)	A (m²)	x (m)	A (m²)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

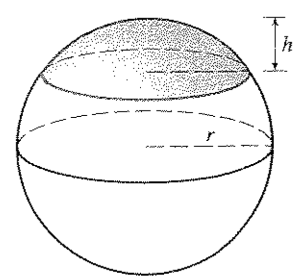
47–59 □ Encontre o volume do sólido S descrito.

47. Um cone circular reto com altura h e raio da base r.

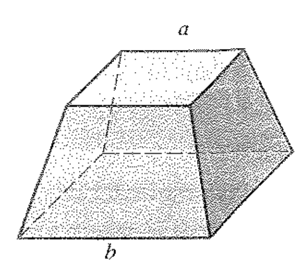
48. Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.



49. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



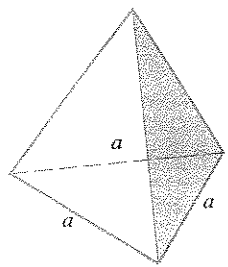
50. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



O que acontece se $a = b$? O que acontece se $a = 0$?

51. Uma pirâmide de altura h e base retangular de lados b e $2b$.

52. Uma pirâmide com altura h e base triangular eqüilátera com lado a (um tetraedro).



53. Um tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares com comprimentos de 3 cm, 4 cm e 5 cm.

54. A base de S é um disco circular de raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são quadradas.

55. A base de S é uma região elíptica limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.

56. A base de S é uma região parabólica $\{(x, y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos eqüiláteros.

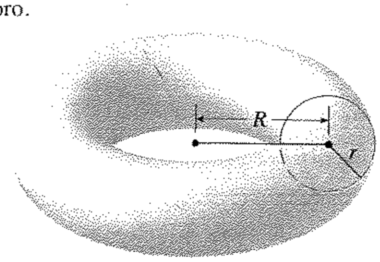
57. S tem a mesma base do Exercício 56, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadradas.

58. A base de S é uma região triangular com os vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 2)$. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são semicírculos.

59. S tem a mesma base do Exercício 58, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos isósceles com altura igual à base.

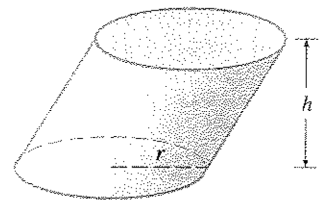
60. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são triângulos isósceles de altura h e lados desiguais na base.
    (a) Escreva uma integral para o volume de S.
    (b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume de S.

61. (a) Escreva uma integral para um toro sólido (o sólido com formato de rosquinha da figura) com raios r e R.
    (b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume do toro.



62. Resolva o Exemplo 9 tomando secções transversais paralelas à reta de interseção dos dois planos.

63. (a) O Princípio de Cavalieri afirma que se uma família de planos paralelos produzem áreas de secção transversal iguais para dois sólidos S_1 e S_2, então os volumes de S_1 e S_2 são iguais. Prove esse princípio.
    (b) Use o Princípio de Cavalieri para encontrar o volume do cilindro oblíquo mostrado na figura.



64. Ache o volume comum aos dois cilindros, cada qual com raio r, se os eixos dos cilindros se interceptam em ângulos retos.

65. Encontre o volume comum a duas esferas, cada qual com raio r, se o centro de cada esfera está na superfície da outra esfera.

66. Uma tigela tem o formato de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela e, depois despeja-se água até uma profundidade de h centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

67. Um buraco de raio r é perfurado através de um cilindro de raio $R > r$ a ângulos retos em relação ao eixo do cilindro. Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume cortado.

68. Um buraco de raio r é perfurado através do centro de uma esfera de raio $R > r$. Encontre o volume da porção remanescente da esfera.

69. Alguns dos pioneiros do Cálculo, como Kepler e Newton, foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou em 1715 *Stereometria doliorum*, um livro dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris.) Eles freqüentemente aproximavam o formato dos lados por parábolas.
    (a) Um barril com altura h e raio máximo R é construído pela rotação ao redor do eixo x da parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremo do barril é $r = R - d$, onde $d = ch^2/4$.
    (b) Mostre que o volume interno do barril é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

70. Suponha que a região $\mathcal{R}$ tem área A e está acima do eixo x. Quando $\mathcal{R}$ é girado ao redor do eixo x, ele varre um sólido com volume V_1. Quando $\mathcal{R}$ é girado ao redor da reta $y = -k$ (onde k é um número positivo), ele varre um sólido com volume V_2. Expresse V_2 em termos de V_1, k e A.

6.3 Cálculo de Volumes por Cascas Cilíndricas

Alguns problemas de volume são muito difíceis de lidar pelos métodos das seções ant riores. Por exemplo, vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sóli obtido pela rotação ao redor do eixo y pela região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$ (ve a Figura 1). Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo y, obteremos uma arruela. M para calcularmos os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equaç cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para x em termos de y; isto não é fácil.

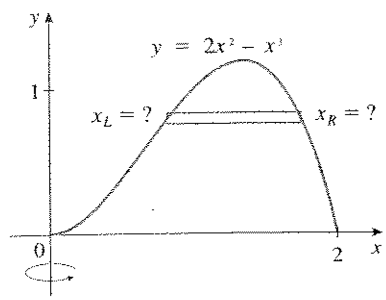


FIGURA 1

Felizmente existe um método, chamado **Método das Cascas Cilíndricas**, que é m fácil de usar em casos como esse. A Figura 2 mostra uma casca cilíndrica de raio inter r_1, raio externo r_2 e altura h. O seu volume V é calculado pela subtração do volume V_1 cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

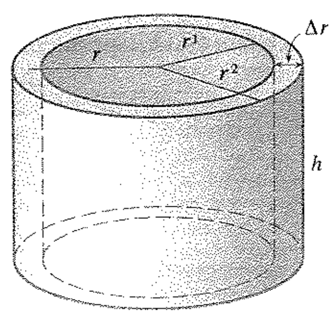


FIGURA 2

Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (o raio médio da casc então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna

$$\boxed{1} \qquad \boxed{V = 2\pi r h \, \Delta r}$$

e pode ser memorizada como

$$V = \text{[circunferência][altura][espessura]}$$

Agora considere S como o sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = f(x)$ [onde $f(x) \geqslant 0$], $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $b > a \geqslant 0$. (Veja a Figura 3.)

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesma largura Δx e cons deramos $\bar{x}_i$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo. Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e

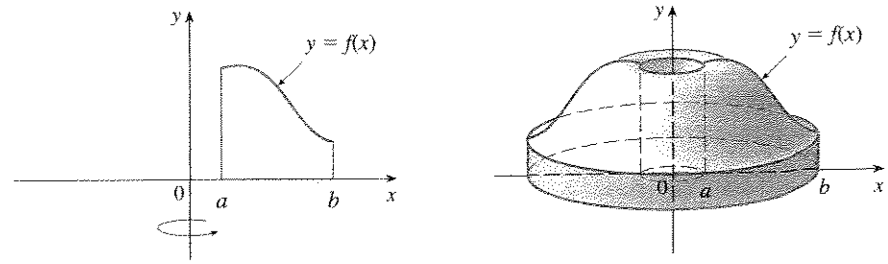
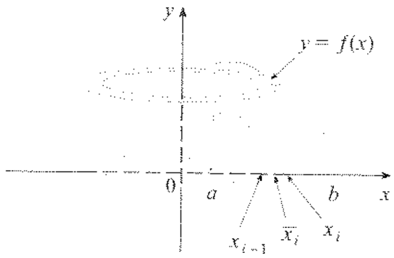


FIGURA 3



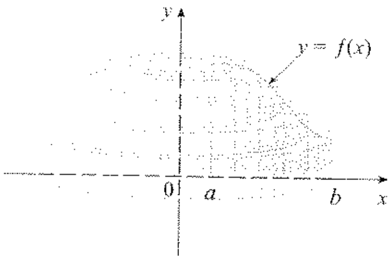


FIGURA 4

altura $f(\bar{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ e espessura Δx (veja a Figura 4). Assim, pela Fórmula 1 seu volume é

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

Portanto, uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Essa aproximação torna-se melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Então, o seguinte parece plausível:

> **2** O volume do sólido na Figura 3, obtido pela rotação ao redor do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b é
>
> $$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{onde } 0 \leqslant a < b$$

Usando o argumento das cascas cilíndricas, a Fórmula 2 parece razoável, porém mais tarde seremos capazes de prová-la (veja o Exercício 65 na Seção 7.1).

A melhor maneira para se lembrar da Fórmula 2 é pensar em uma casca típica, cortada e achatada como na Figura 5, com raio x, circunferência $2\pi x$, altura $f(x)$ e espessura Δx ou dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \quad \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \quad dx$$

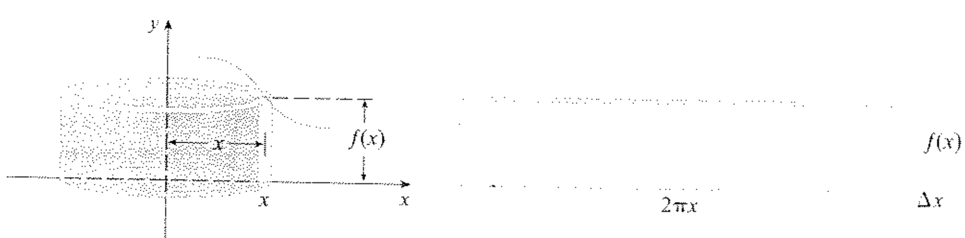


FIGURA 5

Esse tipo de argumento será útil em outras situações, tais como quando giramos ao redor de outras retas além do eixo y.

EXEMPLO 1 □ Ache o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

SOLUÇÃO: Do esboço da Figura 6 vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. Então, pelo método das cascas, o volume é

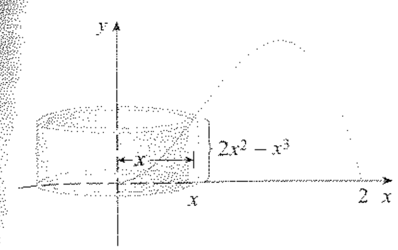


FIGURA 6

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Pode-se verificar que o método das cascas dá a mesma resposta que o método das fatias.

□ A Figura 7 mostra o gráfico gerado pelo computador do sólido do qual calculamos o volume no Exemplo 1.

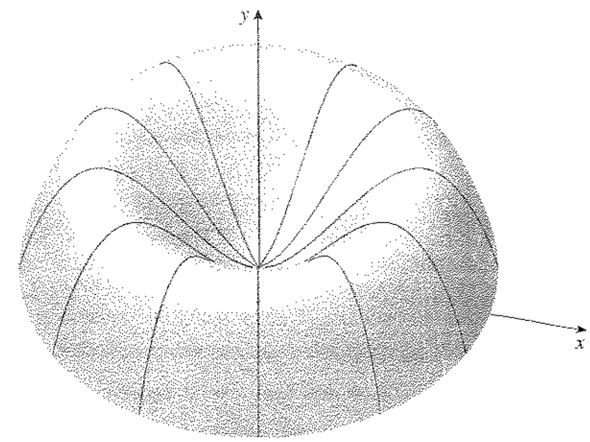


FIGURA 7

NOTA □ Comparando a solução do Exemplo 1 com as observações no começo des seção, vemos que o método das cascas cilíndricas é muito mais fácil que o método d arruelas para esse problema. Não tivemos de encontrar as coordenadas de máximo local não tivemos de resolver a equação da curva para x em termos de y. Contudo, em outr exemplos, os métodos da seção anterior podem ser mais fáceis.

EXEMPLO 2 □ Ache o volume de um sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

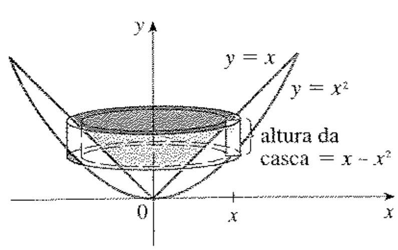


FIGURA 8

SOLUÇÃO A região e uma casca típica são mostradas na Figura 8. Vemos que a casca te raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $x - x^2$. Então o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Como o exemplo a seguir mostra, o método da casca funciona bem também quan giramos ao redor do eixo x. Simplesmente, temos de desenhar um diagrama para iden ficar o raio e a altura da casca.

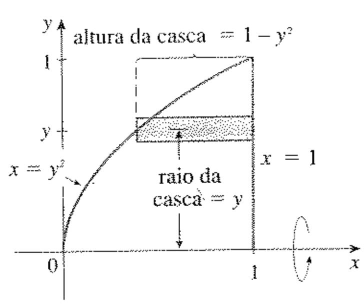


FIGURA 9

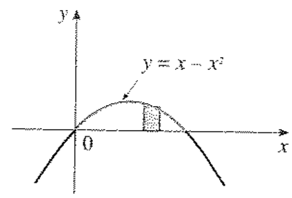
EXEMPLO 3 □ Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

SOLUÇÃO Esse problema foi resolvido usando-se os discos no Exemplo 2 da Seção 6.2. Para usar as cascas escrevemos $y = \sqrt{x}$ (na figura naquele exemplo) como $x = y^2$ na Figura 9. Pela rotação ao redor do eixo x, vemos que uma casca típica tem raio y, circunferência $2\pi y$ e altura $1 - y^2$. Então o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$
$$= 2\pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Neste exemplo o método do disco foi mais simples.

EXEMPLO 4 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ ao redor da reta $x = 2$.



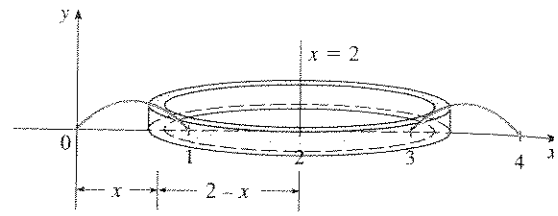


FIGURA 10

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação ao redor da reta $x = 2$. Esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$ e altura $x - x^2$.

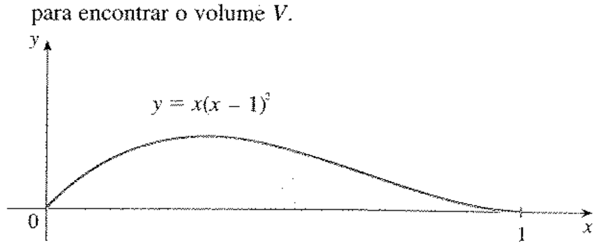
O volume do sólido é

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

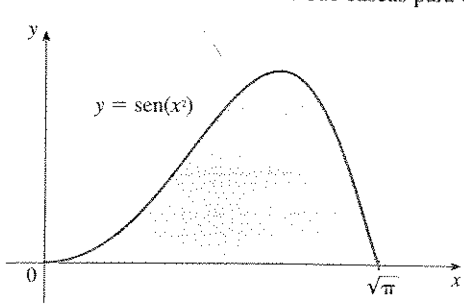
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Exercícios

1. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Explique por que é inconveniente fatiar para obter o volume V de S. Esboce uma casca típica de aproximação. Qual é a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar o volume V.



2. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica, e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume de S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? Explique.



3–7 □ Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação ao redor do eixo y da região limitada pelas curvas dadas. Esboce a região e a casca típica.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 3 + 2x - x^2, \quad x + y = 3,$

7. $y = 4(x - 2)^2, y = x^2 - 4x + 7$

8. Seja V o volume de um sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelos métodos de fatiamento e cascas cilíndricas. Em ambos os casos desenhe um diagrama para explicar seu método.

9–14 □ Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor do eixo x. Esboce a região e a casca típica.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $y = 4x^2, \quad 2x + y = 6$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 □ Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados. Esboce a região e uma casca típica.

15. $y = x^2, \quad y = 0, x = 1, \quad x = 2$; ao redor de $x = 1$

16. $y = x^2, \quad y = 0, x = -2, \quad x = -1$; ao redor do eixo y

17. $y = x^2, \quad y = 0, x = 1, \quad x = 2$; ao redor de $x = 4$

18. $y = 4x - x^2, \quad y = 8x - 2x^2$; ao redor de $x = -2$

19. $y = \sqrt{x - 1}, \quad y = 0, \quad x = 5$; ao redor de $y = 3$

20. $y = x^2, \quad x = y^2$; ao redor de $y = -1$

21–26 □ Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume de um sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

21. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2$; ao redor do eixo y

22. $y = x, \ y = 4x - x^2$; ao redo de $x = 7$

23. $y = x^4, \ y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$; ao redor de $x = -1$

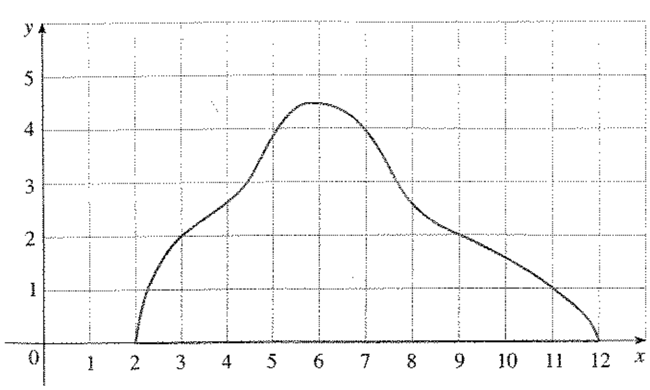
24. $y = 1/(1 + x^2), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$; ao redor de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \quad x = 0$; ao redor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \quad x = 4$; ao redor de $y = 5$

27. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para estimar o volume obtido pela rotação ao redor do eixo y da região sob a curva $y = \operatorname{tg} x, 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

28. Se a região na figura gira ao redor do eixo y para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do sólido.



29–32 □ Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2) \, dy$

32. $\int_0^{\pi} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx$

33–34 □ Use um gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos de interseção das curvas dadas. Então use essa informação para estimar o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por essas curvas.

33. $y = 0, y = x + x^2 - x^4$

34. $y = x^4, \ y = 3x - x^3$

35–36 □ Use um sistema algébrico computacional para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, y = \operatorname{sen}^4 x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$; ao redor de $x = \pi/2$.

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, y = 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi$; ao redor de $x = -1$.

37–42 □ A região limitada pelas curvas dadas é girada ao redor dos eixos especificados. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

37. $y = x^2 + x - 2, \quad y = 0$; ao redor do eixo x

38. $y = x^2 - 3x + 2, \quad y = 0$; ao redor do eixo y

39. $y = 5, \quad y = x + (4/x)$; ao redor de $x = -1$

40. $x = 1 - y^4, \quad x = 0$; ao redor de $x = 2$

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; ao redor do eixo y

42. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; ao redor do eixo x

43–45 □ Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

43. Uma esfera de raio r.

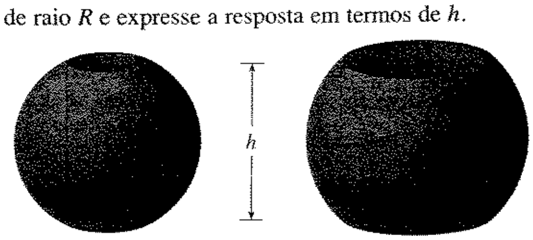
44. O toro do Exercício 61 da Seção 6.2.

45. Um cone circular reto de altura h e base com raio r.

46. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais também têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura.

(a) Qual anel tem mais madeira?

(b) Verifique o item (a). Use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera de raio R e expresse a resposta em termos de h.



6.4 Trabalho

O termo *trabalho* é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço necessária para executar uma tarefa. Na Física essa palavra tem um significado técnico que depende do conceito de *força*. Intuitivamente, você pode pensar na força que descreve o empurrar ou o puxar de um objeto — por exemplo, um empurrão horizontal em um livro sobre uma mesa ou a ação da gravidade terrestre sobre uma bola. Em geral, se um objeto se move ao longo de uma linha reta com função de deslocamento $s(t)$, então a **força** F no objeto (na mesma direção) é definida pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua aceleração:

$$\boxed{1} \qquad F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

No Sistema Métrico Internacional (SI), a massa é medida em quilogramas (kg), o deslocamento em metros (m), o tempo em segundos (s) e a força em newtons (N = Kg·m/s²). Então, uma força de 1 N atuando em uma massa de 1 kg produz uma aceleração de 1 m/s². No sistema fundamental norte-americano, a unidade de força escolhida é a libra.

No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho feito é definido pelo produto da força F pela distância d que o objeto se move:

$$\boxed{2} \qquad W = Fd \qquad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}$$

Se F é medida em newtons e d, em metros, então a unidade para W é o newton-metro, a qual é chamada joule (J). Se F é medida em libras (lb) e d em pés (pé), então a unidade de trabalho é a libra-pé (lb-pé), a qual é cerca de 1,36 J.

EXEMPLO 1 □

(a) Quanto trabalho é feito quando se levanta um livro de 1,2 kg do chão até uma carteira de altura 0,7 m? Use o fato de que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8$ m/s².

(b) Quanto trabalho é feito levantando-se um peso de 20 lb a uma altura de 6 pés do chão?

SOLUÇÃO

(a) A força exercida é igual e oposta à força exercida pela gravidade, então da Equação 1 temos

$$F = mg = (1{,}2)(9{,}8) = 11{,}76 \text{ N}$$

e a Equação 2 nos dá o trabalho executado como

$$W = Fd = (11{,}76)(0{,}7) \approx 8{,}2 \text{ J}$$

(b) Aqui a força dada é $F = 20$ lb; portanto o trabalho feito é

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ lb-pé}$$

Note que na parte (b), ao contrário da parte (a), não tivemos de multiplicar por g, porque o dado era o *peso* (o qual é força) e não a massa do objeto.

A Equação 2 define trabalho desde que a força seja constante. Mas o que acontece se a força é variável? Suponha que o objeto se mova ao longo do eixo x na direção positiva de $x = a$ até $x = b$, e em cada ponto x entre a e b uma força $f(x)$ atua no objeto, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com o extremo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto de amostragem x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a força naquele ponto é $f(x_i^*)$. Se n é grande, então Δx é pequeno, e como f é contínua, os valores de f não variam muito ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em outras palavras, f é praticamente constante no intervalo e então o trabalho W_i que é executado no movimento da partícula de x_{i-1} a x_i é dado aproximadamente pela Equação 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Então podemos aproximar o trabalho total por

$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

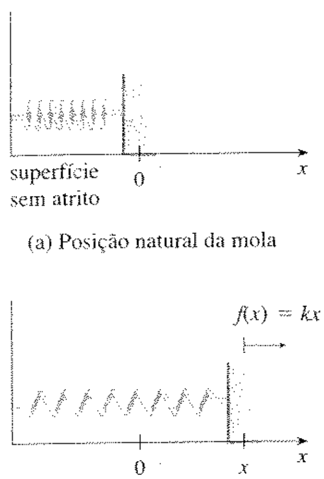
Parece que a aproximação torna-se cada vez melhor quando n é grande. Portanto definimos o **trabalho feito no movimento de um objeto de *a* a *b*** como o limite dessa quantidade quando $n \to \infty$. Como o lado direito de (3) é uma soma de Riemann, reconhecemos seu limite como uma integral definida e então

$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EXEMPLO 2 □ Quando uma partícula está localizada a uma distância de x pés da origem, uma força de $x^2 + 2x$ lb age sobre ela. Quanto trabalho é realizado movendo-a de $x = 1$ a $x = 3$?

SOLUÇÃO
$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

O trabalho feito é de $16\frac{2}{3}$ lb-pé.



(a) Posição natural da mola

(b) Posição esticada da mola

FIGURA 1 Lei de Hooke

No próximo exemplo usaremos uma lei da Física: a **Lei de Hooke** estabelece que a força necessária para manter uma mola esticada x unidades além do seu comprimento natural é proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante elástica**). A Lei de Hooke vale desde que x não seja muito grande (veja a Figura 1).

EXEMPLO 3 □ Uma força de 40 N é necessária para manter uma mola esticada do seu comprimento natural de 10 cm para um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é feito esticando-se a mola de 15 cm para 18 cm?

SOLUÇÃO De acordo com a Lei de Hooke, a força necessária para manter uma mola esticada x metros além do seu comprimento natural é $f(x) = kx$. Quando a mola é esticada de 10 cm para 15 cm, a quantidade esticada é 5 cm = 0,05 m. Isto significa que $f(0{,}05) = 40$, assim:

$$0{,}05k = 40 \qquad k = \tfrac{40}{0{,}05} = 800$$

Então, $f(x) = 800x$, e o trabalho realizado para esticar a mola de 15 cm para 18 cm é

$$W = \int_{0{,}05}^{0{,}08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0{,}05}^{0{,}08}$$
$$= 400[(0{,}08)^2 - (0{,}05)^2] = 1{,}56 \text{ J}$$

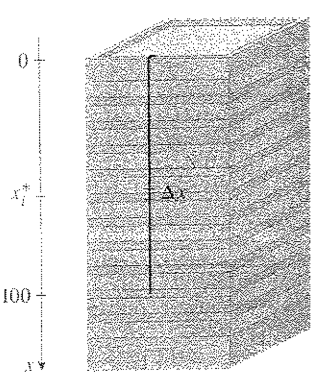


FIGURA 2

EXEMPLO 4 □ Um cabo de 200 lb tem 100 pés de comprimento e está pendurado sobre a borda de um edifício alto. Qual o trabalho necessário para puxar o cabo para o topo do edifício?

SOLUÇÃO Aqui não temos uma fórmula para a função força, mas podemos usar um argumento semelhante ao que nos levou à Definição 4.

Vamos posicionar a origem no topo do edifício e o eixo x apontando positivamente para baixo, como na Figura 2. Dividimos o cabo em pequenos pedaços iguais de comprimento Δx

Se x_i^* é um ponto no i-ésimo intervalo, então todos os pontos nesse intervalo são içados por aproximadamente a mesma quantidade, a saber x_i^*. O cabo pesa 2 lb por pé, logo o peso da i-ésima parte é $2\Delta x$. Assim o trabalho realizado nessa i-ésima parte, em lb-pé, é

$$\underbrace{2\Delta x}_{\text{força}}\ \underbrace{x_i^*}_{\text{distância}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

Teremos o trabalho total realizado somando toas essas aproximações, fazendo o número de partes se tornar grande ($\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx = x^2\Big]_0^{100} = 10.000 \text{ lb/pé}$$ □

□ Se tivéssemos colocado a origem na extremidade do cabo e o eixo x apontando positivamente para cima, teríamos obtido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

que nos dá a mesma resposta.

EXEMPLO 5 □ Um tanque tem o formato de um cone circular invertido de altura 10 m e raio da base 4 m e está cheio de água até uma altura de 8 m. Calcule o trabalho necessário para esvaziar o tanque bombeando toda a água pelo topo do tanque. (A densidade da água é de 1.000 kg/m^3.)

SOLUÇÃO Vamos medir as profundidades a partir do topo do tanque introduzindo uma coordenada vertical como na Figura 3. A água se estende de uma profundidade de 2 m até uma profundidade de 10 m e então dividimos o intervalo [2, 10] em n subintervalos com extremos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e escolhemos x_i^* no i-ésimo subintervalo. Isso divide a água em n camadas. A i-ésima camada é aproximada por um cilindro circular de raio r_i e altura Δx. Podemos calcular r_i por similaridade de triângulos usando a Figura 4, como a seguir:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Então uma aproximação para o volume da i-ésima camada de água é

$$V_i \approx \pi r_i^2\,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

e, dessa forma, sua massa é

$$\begin{aligned} m_i &= \text{densidade} \times \text{volume} \\ &\approx 1.000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x \end{aligned}$$

A força necessária para elevar essa camada de água deve ser maior que a força da gravidade, e assim

$$\begin{aligned} F_i = m_i g &\approx (9{,}8)160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x \\ &\approx 1.570\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x \end{aligned}$$

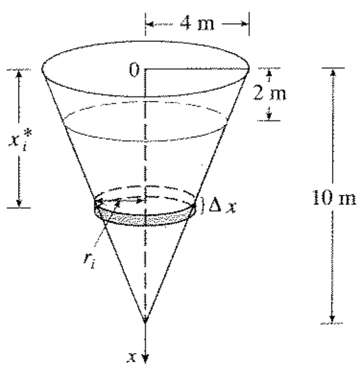


FIGURA 3

Cada partícula na camada deve se mover a uma distância de aproximadamente x_i^*. O trabalho W_i feito para elevar essa camada até o topo é aproximadamente o produto da força F_i e da distância x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1.570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Para encontrar o trabalho total realizado para esvaziar o tanque, adicionamos as contribuições de cada uma das n camadas e então tomamos o limite quando $n \to \infty$:

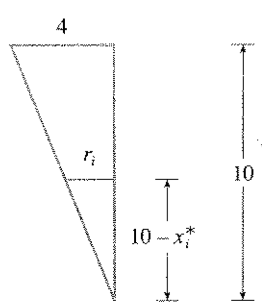


FIGURA 4

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 1.570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = \int_2^{10} 1.570\pi x(10 - x)^2\,dx \\ &= 1.570\pi\int_2^{10}(100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1.570\pi\left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^{10} \\ &= 1.570\pi\left(\tfrac{2.048}{3}\right) \approx 3{,}4 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

6.4 Exercícios

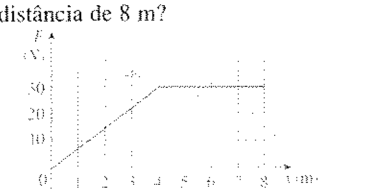
1. Calcule o trabalho feito para empurrar um carro de 8 m exercendo uma força constante de 900 N.

2. Quanto trabalho é feito por um levantador de pesos ao levantar uma barra de 60 kg do solo até uma altura de 2 m?

3. Uma partícula é movida ao longo do eixo x por uma força que mede $10/(1 + x)^2$ lb em um ponto x pés da origem. Calcule o trabalho realizado ao mover a partícula da origem até a distância de 9 pés.

4. Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $\cos(\pi x/3)$ newtons atua sobre ela. Quanto trabalho é feito ao mover a partícula de $x = 1$ até $x = 2$? Interprete a sua resposta considerando o trabalho feito de $x = 1$ a $x = 1{,}5$ e de $x = 1{,}5$ a $x = 2$.

5. A figura a seguir mostra o gráfico de uma função força (em newtons) que cresce até seu máximo valor e depois permanece constante. Quanto trabalho é realizado pela força ao mover um objeto a uma distância de 8 m?



6. A tabela a seguir mostra valores de uma função força $f(x)$, onde x é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o trabalho realizado pela força ao mover um objeto de $x = 4$ até $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5,8	7,0	8,8	9,6	8,2	6,7	5,2	4,1

7. Uma força de 10 lb é necessária para manter uma mola esticada 4 pol além do seu comprimento natural. Quanto trabalho é realizado para esticá-la do seu comprimento natural até 6 pol além do seu tamanho natural?

8. Uma mola tem o comprimento natural de 20 cm. Se uma força de 25 N é necessária para mantê-la esticada a um comprimento de 30 cm, qual o trabalho necessário para esticá-la de 20 cm a 25 cm?

9. Suponha que um trabalho de 2 J seja necessário para esticar uma mola de seu comprimento natural de 30 cm para 42 cm. Quanto trabalho é necessário para esticá-la de 35 cm para 40 cm?

10. Se o trabalho necessário para esticar uma mola 1 pé além do seu comprimento natural é de 12 lb-pé, qual o trabalho necessário para esticá-la 9 pol além do seu comprimento natural?

11. Qual a distância além de seu comprimento natural que uma força de 30 N consegue manter esticada a mola do Exercício 9?

12. Se um trabalho de 6 J é necessário para esticar uma mola de 10 cm para 12 cm e um trabalho de 10 J é necessário para esticá-la de 12 cm para 14 cm, qual é o comprimento natural da mola?

13–20 Mostre como aproximar o trabalho requerido por uma soma de Riemann. Em seguida, expresse o trabalho como uma integral e calcule-a.

13. Uma corda de 50 pés de comprimento pesa 0,5 lb/pé e está pendurada sobre a borda de um edifício com 120 pés de altura.
(a) Qual o trabalho necessário para puxar a corda até o topo do edifício?
(b) Qual o trabalho necessário para puxar metade da corda do edifício?

14. Uma corrente que se encontra sobre um piso tem 10 m de comprimento e sua massa é de 80 kg. Quanto trabalho é necessário para erguer uma de suas extremidades a uma altura de 6 m?

15. Um cabo que pesa 2 lb/pé é usado para erguer 800 lb de carvão por um poço de mina de 500 pés de profundidade. Encontre o trabalho realizado.

16. Um balde que pesa 4 lb e uma corda de massa desprezível são usados para tirar água de um poço com 80 pés de profundidade. O balde começa com 40 lb de água e é puxado a uma velocidade de 2 pés/s, mas a água vaza por um buraco no balde a uma taxa de 0,2 lb/s. Encontre o trabalho realizado para puxar o balde até o topo do poço.

17. Um balde, furado, de 10 kg é levantado do chão até uma altura de 12 m, com velocidade constante, com a ajuda de uma corda qua pesa 0,8 kg/m. Inicialmente o balde contêm 36 kg de água, mas a água vaza a uma taxa constante e o balde acaba ficando vazio justamente quando ele atinge os 12 m de altura. Quanto trabalho foi realizado?

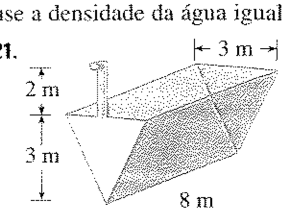
18. Uma corrente de 10 pés pesa 25 lb e está pendurada em um teto. Encontre o trabalho necessário para levantar a extremidade inferior da corrente até o teto de modo que ela se junte com a extremidade superior.

19. Um aquário de 2 m de comprimento, 1 m de largura e 1 m de profundidade está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear metade da água fora do aquário. (Use o fato de que a densidade da água é de 1.000 kg/m³.)

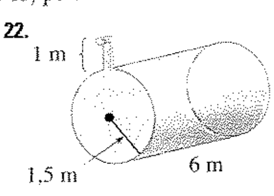
20. Uma piscina circular tem um diâmetro de 24 pés, os lados têm 5 pés de altura e a profundidade da água é de 4 pés. Quanto trabalho é necessário para bombear toda a água pelo lado da piscina? (Use o fato de que a densidade da água é de 62,5 lb/pé³.)

21–24 Um tanque está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear a água pela saída. Nos Exercícios 23 e 24 use a densidade da água igual a 62,5 lb/pé³.

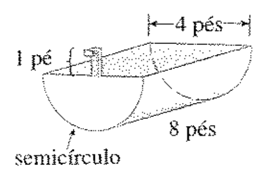
21.



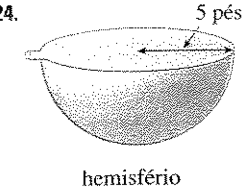
22.



23.



24.

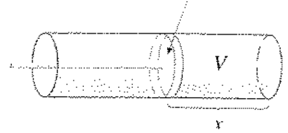


25. Suponha que para o tanque do Exercício 21 a bomba tenha quebrado após ter sido feito o trabalho de $4{,}7 \times 10^5$ J. Qual a profundidade da água que permaneceu no tanque?

26. Resolva o Exercício 22 se o tanque estiver com a metade de óleo, que tem densidade de $920\ \text{kg/m}^3$.

27. Quando um gás se expande em um cilindro de raio r, a pressão a um dado momento é uma função do volume: $P = P(V)$. A força exercida pelo gás no pistão (veja a figura) é o produto da pressão pela área: $F = \pi r^2 P$. Mostre que o trabalho feito pelo gás quando o volume expande de V_1 para V_2 é

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



28. Em uma máquina a vapor a pressão P e o volume V de vapor satisfazem a equação $PV^{1,4} = k$, onde k é uma constante. (Isso é verdade para uma expansão adiabática, que é uma expansão onde não ocorre a transferência de calor entre o cilindro e a sua vizinhança.) Use o Exercício 27 para calcular o trabalho feito pelo motor em um ciclo quando o vapor começa a uma pressão de 160 lb/pol^2 e um volume de 100 pol^3 e se expande até um volume de 800 pol^3.

29. A Lei de Newton da Gravitação Universal afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força de

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde r é a distância entre os corpos e G é a constante gravitacional. Se um dos corpos é fixo, encontre o trabalho necessário para mover o outro corpo de $r = a$ para $r = b$.

30. Use a Lei de Newton da Gravitação Universal para calcular o trabalho necessário para lançar verticalmente um satélite de 1000 kg a uma órbita de 1.000 km de altura. Você pode supor que a massa da Terra é $5{,}98 \times 10^{24}$ kg e está concentrada no seu centro. Use o raio da Terra igual a $6{,}37 \times 10^6$ m e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

6.5 Valor Médio de uma Função

É fácil calcular o valor médio de uma quantidade finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{méd}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

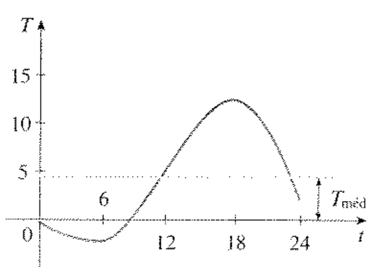


FIGURA 1

Mas como calcular a temperatura média durante o dia se infinitas leituras de temperatura são possíveis? A Figura 1 mostra o gráfico de uma função temperatura $T(t)$, onde t é medido em horas; T, em °C; e $T_{\text{méd}}$ é uma estimativa para a temperatura média.

Em geral tentamos calcular o valor médio da função $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Começamos dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Então escolhemos pontos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ em sucessivos subintervalos e calculamos a média dos números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por exemplo, se f representa a função temperatura e $n = 24$, isso significa que temos tomadas de temperatura a cada hora e então calculamos a média.) Como $\Delta x = (b - a)/n$, podemos escrever $n = (b - a)/\Delta x$, e o valor médio torna-se

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Se n aumenta, podemos calcular o valor médio de um grande número de valores igualmente espaçados. (Por exemplo, poderíamos calcular a média de medições de temperatura tomadas a cada minuto ou até a cada segundo.) O valor limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

pela definição de integral definida.

Portanto **definimos o valor médio** de f no intervalo $[a, b]$ como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 1 Encontre o valor médio da função $f(x) = 1 + x^2$ no intervalo $[-1, 2]$.

SOLUÇÃO Com $a = -1$ e $b = 2$, temos

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

A seguinte questão surge: existe um número c no qual o valor da função f é exatamente igual ao valor médio da função, isto é, $f(c) = f_{\text{méd}}$? O seguinte teorema mostra que isso é verdade para uma função contínua.

Teorema do Valor Médio para Integrais Se f é contínua em $[a, b]$, então existe um número c em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

O Teorema do Valor Médio para as Integrais é uma conseqüência do Teorema do Valor Médio para as derivadas e do Teorema Fundamental do Cálculo. A prova é descrita no Exercício 23.

A interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio para as Integrais é que, para as funções positivas f, existe um número c tal que o retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$ tem a mesma área que a região sob o gráfico de f de a a b. (Veja a Figura 2 e uma interpretação mais pictórica na nota da margem.)

Você sempre pode cortar o topo de uma montanha (bidimensional) a uma certa altura e usá-lo para preencher os vales de tal maneira que a montanha se torne completamente plana.

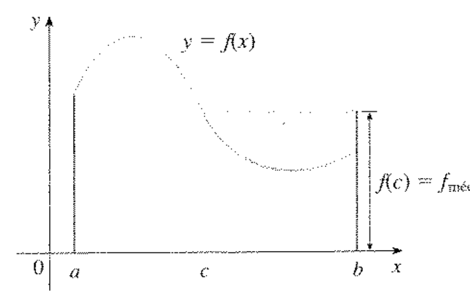


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Como $f(x) = 1 + x^2$ é contínua no intervalo $[-1, 2]$, o Teorema do Valor Médio para as Integrais diz que existe um número c em $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

Nesse caso específico, podemos calcular c explicitamente. Do Exemplo 1 sabemos que $f_{\text{méd}} = 2$, então o valor de c satisfaz

$$f(c) = f_{\text{méd}} = 2$$

Portanto $\qquad 1 + c^2 = 2 \qquad$ e assim $\qquad c^2 = 1$

Dessa forma, nesse caso, existem dois números $c = \pm 1$ no intervalo $[-1, 2]$ que satisfazem o Teorema do Valor Médio para Integrais.

Os Exemplos 1 e 2 estão ilustrados na Figura 3.

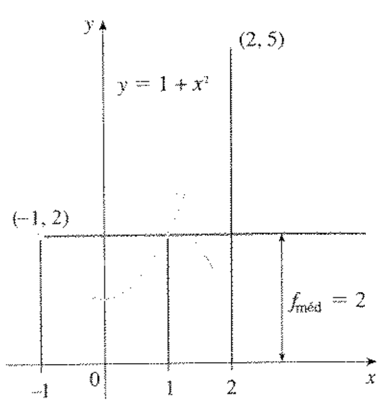


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Mostre que a velocidade média de um carro em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é a mesma que a média de suas velocidades durante a viagem.

SOLUÇÃO Se $s(t)$ é o deslocamento do carro no intervalo de tempo t, então, por definição a velocidade média do carro no intervalo é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por outro lado, o valor da função velocidade no intervalo é

$$\begin{aligned} v_{\text{méd}} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{pelo Teorema da Variação Total} \\ &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidade média} \end{aligned}$$

6.5 Exercícios

1–8 Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

1. $f(x) = x^2, \quad [-1, 1]$
2. $f(x) = 1/x, \quad [1, 4]$
3. $g(x) = \cos x, \quad [0, \pi/2]$
4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$
5. $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$
6. $f(\theta) = \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta, \quad [0, \pi/4]$
7. $h(x) = \cos^4 x\ \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$
8. $h(r) = 3/(1 + r)^2, \quad [1, 6]$

9–12

(a) Encontre o valor médio de f no intervalo dado.
(b) Encontre c tal que $f_{\text{méd}} = f(c)$.
(c) Esboce o gráfico de f e um retângulo cuja área é a mesma que a área sob o gráfico de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$
10. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$
11. $f(x) = 2\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$
12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2, \quad [0, 2]$

13. Se f é contínua e $\int_1^3 f(x)\, dx = 8$, mostre que f assume o valor 4 pelo menos uma vez no intervalo $[1, 3]$.

14. Encontre os valores de b tais que o valor médio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ no intervalo $[0, b]$ é igual a 3.

15. A tabela dá valores de uma função contínua. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor médio de f em $[20, 50]$.

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

16. O gráfico da velocidade de um carro acelerado está mostrado a seguir.
(a) Dê uma estimativa da velocidade média do carro nos 12 primeiros segundos.
(b) Em que instante a velocidade instantânea foi igual à velocidade média?

17. Em uma certa cidade a temperatura (em °F) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função

$$T(t) = 50 + 14\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{12}$$

Calcule a temperatura média durante o período entre 9 h e 21 h.

18. Se uma xícara de café tem uma temperatura de 95 °C em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 °C, de acordo com a Lei do Resfriamento de Newton, a temperatura do café após t minutos será

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é temperatura média do café durante a primeira meia hora?

19. A densidade linear de um bastão de 8 m de comprimento é $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, onde x é medido em metros da ponta do bastão. Encontre a densidade média do bastão.

20. Se um corpo em queda livre parte do repouso, então o seu deslocamento é dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Seja a velocidade após um tempo T igual a v_T. Mostre que, se calcularmos a média das velocidades em relação a t, obteremos $v_{\text{méd}} = \frac{1}{2}v_T$, mas se calcularmos a média das velocidades em relação a s, teremos $v_{\text{méd}} = \frac{2}{3}v_T$.

21. Use o resultado do Exercício 77 na Seção 5.5 para calcular o volume médio de ar inalado pelos pulmões em um ciclo respiratório.

22. A velocidade v do sangue que circula em uma veia com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central é

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

onde P é a diferença de pressão entre as extremidades da veia e η é a viscosidade do sangue (veja o Exemplo 7 da Seção 3.3). Encontre a velocidade média (em relação a r) no intervalo $0 \leq r \leq R$. Compare a velocidade média com a velocidade máxima.

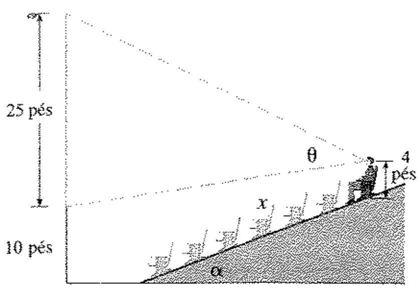
23. Prove o Teorema do Valor Médio para Integrais usando o Teorema do Valor Médio para derivadas (veja a Seção 4.2) para a função $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

24. Se $f_{\text{méd}}[a, b]$ denota o valor médio de f no intervalo $[a, b]$ e $a < c < b$, mostre que

$$f_{\text{méd}}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{\text{méd}}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{\text{méd}}[c, b]$$

Projeto Aplicado — CAS Onde Sentar nos Cinemas

Uma sala de cinema tem uma tela que está posicionada a 10 pés acima do chão e tem 25 pés de altura. A primeira fileira de poltronas está colocada a 9 pés da tela e as fileiras estão separadas por 3 pés. O chão da área com assentos está inclinado a um ângulo de $\alpha = 20°$ acima da linha horizontal e a distância da linha inclinada até o seu assento é x. A sala tem 21 fileiras de poltronas, portanto $0 \leq x \leq 60$. Suponha que você decida que o melhor lugar para sentar é a fileira onde o ângulo θ formado entre a tela e os seus olhos é o máximo. Admita que os seus olhos estão a 4 pés acima do solo, como mostrado na figura. (No Exercício 58 da Seção 4.7, vimos uma versão mais simples desse problema, onde o solo é horizontal, mas esse projeto envolve uma situação mais complicada e requer tecnologia.)



1. Mostre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

onde

$$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x \operatorname{sen}\alpha)^2$$

e

$$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x \operatorname{sen}\alpha - 6)^2$$

2. Use o gráfico de θ como uma função de x para estimar o valor de x que maximiza θ. Em qual fileira você deve sentar? Qual é o ângulo de visão θ nessa fileira?

3. Use seu sistema algébrico computacional para diferenciar θ e encontrar um valor numérico para a raiz da equação $d\theta/dx = 0$. Esse resultado confirma a sua resposta no Problema 2?

4. Use o gráfico de θ para estimar o valor médio de θ no intervalo $0 \leq x \leq 60$. Então use o seu CAS para computar o valor médio. Compare com os valores máximo e mínimo de θ.

6 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Desenhe duas curvas típicas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Mostre como aproximar a área entre essas curvas por uma soma de Riemann e esboce os correspondentes retângulos de aproximação. Então escreva uma aproximação para a área exata.
(b) Explique como a situação muda se as curvas têm equações $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$.

2. Suponha que Sueli fique à frente de Cátia em uma corrida de 1.500 m. Qual é o significado físico da área entre suas curvas de velocidade para os primeiros minutos de corrida?

3. (a) Suponha que S é um sólido com secções transversais conhecidas. Explique como se aproxima o volume de S por uma soma de Riemann. Então escreva uma expressão para o volume exato.
(b) Se S é um sólido de revolução, como você encontra as áreas das secções transversais?

4. (a) O que é volume de uma casca cilíndrica?
(b) Explique como usar cascas cilíndricas para encontrar o volume de um sólido de revolução.
(c) Por que você usaria o método das cascas em vez do de fatiamento?

5. Suponha que você empurre um livro sobre uma mesa de 6 m de comprimento exercendo uma força $f(x)$ a cada ponto de $x = 0$ a $x = 6$. O que $\int_0^6 f(x)\,dx$ representa? Se $f(x)$ é medida em newtons, quais são as unidades para a integral?

6. (a) Qual é o valor médio da função f no intervalo $[a, b]$?
(b) O que diz o Teorema do Valor Médio para Integrais? Qual é a sua interpretação geométrica?

EXERCÍCIOS

1–6 ▫ Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $y = x^2 - x - 6,\quad y = 0$

2. $y = 20 - x^2,\quad y = x^2 - 12$

3. $y = e^x - 1,\quad y = x^2 - x,\quad x = 1$

4. $x + y = 0,\quad x = y^2 + 3y$

5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2),\quad y = x^2 = 2x$

6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $x = 2$

7–11 ▫ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

7. $y = 2x$, $y = x^2$; ao redor do eixo x

8. $x = 1 + y^2$, $y = x - 3$; ao redor do eixo y

9. $x = 0$, $x = 9 - y^2$; ao redor de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$; ao redor de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ (onde $a > 0, h > 0$); ao redor do eixo y

12–14 ▫ Monte, mas não avalie, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

12. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 3\pi/2$, $x = 5\pi/2$; ao redor do eixo y

13. $y = x^3$, $y = x^2$; ao redor de $y = 1$

14. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$; ao redor de $x = 2$

15. Encontre os volumes dos sólidos obtidos pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ ao redor das seguintes retas:
(a) O eixo x (b) O eixo y (c) $y = 2$

16. Seja $\mathfrak{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$. Calcule as seguintes quantidades:
(a) A área de $\mathfrak{R}$.
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo x.
(c) O volume obtido pela rotação de $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo y.

17. Seja $\mathfrak{R}$ a região limitada pelas curvas $y = \operatorname{tg}(x^2)$, $x = 1$ e $y = 0$. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para estimar o que se segue:
(a) A área de $\mathfrak{R}$.
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo x.

18. Seja $\mathfrak{R}$ a região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^6 - x + 1$. Estime as seguintes quantidades:
(a) As coordenadas no eixo x dos pontos de interseção das curvas.
(b) A área de $\mathfrak{R}$.
(c) O volume gerado pela rotação de $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo x.
(d) O volume gerado pela rotação de $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo y.

19–22 ▫ Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$

20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x \, dx$

21. $\int_0^2 2\pi y(4 - y^2) \, dy$

22. $\int_0^1 \pi\left[(2 - x^2)^2 - (2 - \sqrt{x})^2\right] dx$

23. A base de um sólido é um disco circular de raio 3. Ache o volume do sólido se secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos retos isósceles com a hipotenusa estendida ao longo da base.

24. A base de um sólido é a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. Encontre o volume do sólido se as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados com um lado sobre a base.

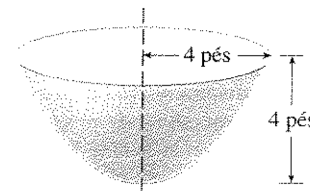
25. A altura de um monumento é de 20 m. Uma secção transversal horizontal a uma distância de x metros do topo é um triângulo eqüilátero com lado $x/4$ metros. Encontre o volume do monumento.

26. (a) A base de um sólido é um quadrado com vértices localizados em $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Cada secção transversal perpendicular ao eixo x é um semicírculo. Ache o volume do sólido.
(b) Mostre que cortando o sólido da parte (a) podemos rearranjá-lo para formar um cone. Assim, calcule seu volume mais simplesmente.

27. Uma força de 30 N é necessária para manter uma mola esticada do seu comprimento natural de 12 cm a um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é efetuado ao esticar a mola de 12 cm para 20 cm?

28. Um elevador de 1.600 lb é suspenso por um cabo de 200 pés que pesa 10 lb/pé. Quanto trabalho é necessário para suspender o elevador do porão para o terceiro andar a uma distância de 30 pés?

29. Um tanque cheio de água tem o formato de um parabolóide de revolução, como mostrado na figura; isto é, seu formato é obtido pela rotação de uma parábola ao redor de um eixo vertical.
(a) Se a sua altura é de 4 pés e o raio do topo, de 4 pés, ache o trabalho necessário para bombear a água para fora do tanque.
(b) Qual a profundidade da água remanescente no tanque depois de um trabalho de 4.000 pé-lb?



30. Ache o valor médio da função $f(t) = t\,\mathrm{sen}(t^2)$ no intervalo $[0, 10]$.

31. Se f é uma função contínua, qual é o limite quando $h \to 0$ do valor médio de f no intervalo $[x, x + h]$?

32. Seja $\mathfrak{R}_1$ a região limitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x = b$, onde $b > 0$. Seja $\mathfrak{R}_2$ a região limitada por $y = x^2$, $x = 0$ e $y = b^2$.
(a) Existe algum valor de b tal que $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ têm a mesma área?
(b) Existe algum valor de b tal que $\mathfrak{R}_1$ varre o mesmo volume quando girado ao redor do eixo x e do eixo y?
(c) Existe algum valor de b tal que $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ varrem o mesmo volume quando girados ao redor do eixo x?
(d) Existe algum valor de b tal que $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ varrem o mesmo volume quando girados ao redor do eixo y?

Problemas Quentes

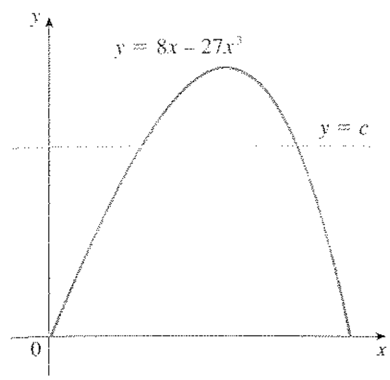


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

1. (a) Encontre uma função contínua positiva, f, tal que a área sob seu gráfico, de 0 a t é $A(t) = t^3$ para todo $t > 0$.

   (b) Um sólido é gerado pela rotação da região abaixo da curva $y = f(x)$, onde f é uma funçã positiva e $x \geqslant 0$, em torno do eixo x. O volume gerado pela parte da curva, de $x = 0$ até $x = b$, é b^2, para todo $b > 0$. Encontre a função f.

2. Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Qual é a inclinação dessa reta?

3. A figura mostra uma reta horizontal $y = c$ interceptando uma curva $y = 8x - 27x^3$. Ache o número c tal que as regiões sombreadas sejam iguais.

4. Um vidro cilíndrico de raio r e comprimento L é cheio com água e então inclinado até que a água remanescente no vidro cubra exatamente a sua base.

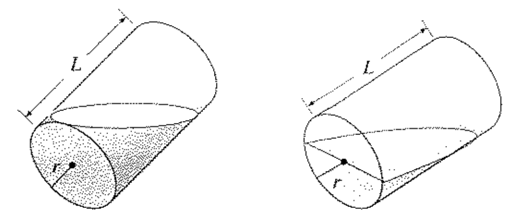
   (a) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas retangulares e então *monte* uma integral definida para o volume de água no vidro.

   (b) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas que são trapézios e então *monte* uma integral definida para o volume de água.

   (c) Encontre o volume de água no vidro avaliando uma das integrais na parte (a) ou (b).

   (d) Ache o volume de água no vidro a partir de considerações puramente geométricas.

   (e) Suponha que o vidro é inclinado até que a água cubra exatamente a metade da base. Em que direção você pode "fatiar" a água em secções transversais triangulares? As secções transversais retangulares? As secções transversais, que são segmentos de círculo? Encontre o volume de água no vidro.



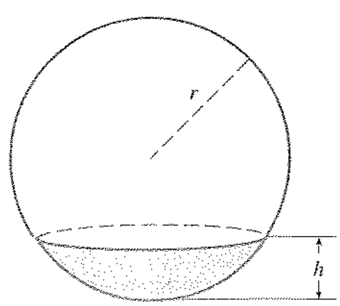


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

5. (a) Mostre que o volume de um segmento de altura h de uma esfera de raio r é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

   (b) Mostre que se uma esfera de raio 1 é fatiada por um plano a uma distância x do centro de maneira que o volume de um segmento é o dobro do volume do outro segmento, então x é uma solução da equação

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

   onde $0 < x < 1$. Use o Método de Newton para encontrar o valor de x com precisão de quatro casas decimais.

   (c) Usando a fórmula para o volume de um segmento de uma esfera, pode-se mostrar que a profundidade x na qual uma esfera flutuante de raio r afunda na água é uma raiz da equaçã

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

   onde s é o peso específico da esfera. Suponha que uma esfera de madeira de raio 0,5 m tenha um peso específico de 0,75. Calcule, com precisão de 4 casas decimais, a profundidade na qual a esfera afundará.

   (d) Uma tigela hemisférica tem raio de 5 pol e a água está enchendo a tigela a uma taxa de 0,2 pol³/s.

      (i) Com que rapidez o nível de água está subindo na tigela no instante em que a água ten profundidade de 3 pol?

      (ii) A um certo instante, a água está com uma profundidade de 4 pol. Quanto tempo vai levar para encher a tigela?

uma

6. O Princípio de Arquimedes estabelece que a força de empuxo em um objeto parcial ou totalmente submerso em um fluido é igual ao peso do fluido que o objeto desloca. Então, para um objeto de densidade ρ_0 boiando parcialmente submerso em um fluido de densidade ρ_f, a força de empuxo é dada por $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$, onde g é a aceleração da gravidade e $A(y)$, a área de uma secção transversal típica do objeto. O peso do objeto é dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$$

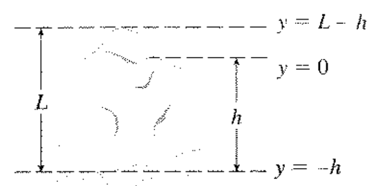
(a) Mostre que a porcentagem do volume do objeto acima do nível da superfície do fluido é dada por

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) A densidade do gelo é de 917 kg/m³, e a densidade da água do mar é de 1.030 kg/m³. Que porcentagem do volume de um *iceberg* está acima da água?

(c) Um cubo de gelo flutua em um copo completamente cheio com água. A água transbordará quando o gelo derreter?

(d) Uma esfera de raio 0,4 m e peso desprezível está flutuando em um grande lago de água doce. Qual o trabalho necessário para submergir a esfera completamente? A densidade da água é de 1.000 kg/m³.



7. A água em uma tigela aberta evapora a uma taxa proporcional à área da superfície da água. (Isso significa que a taxa de diminuição do volume é proporcional à área da superfície.) Mostre que a profundidade da água diminui a uma taxa constante, independentemente do formato da tigela.

8. Uma esfera de raio 1 intercepta uma esfera menor de raio r de maneira que a interseção é um círculo de raio r. (Em outras palavras, elas se interceptam em um círculo máximo da esfera pequena.) Encontre r de forma que o volume dentro da esfera pequena e fora da esfera grande seja o máximo possível.

9. A figura mostra uma curva C com a seguinte propriedade: para cada ponto P no meio da curva $y = 2x^2$, as áreas A e B são iguais. Ache uma equação para C.

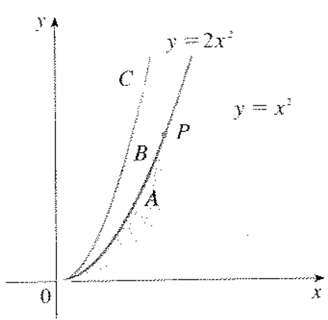
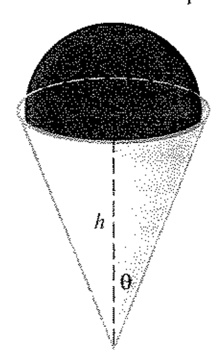


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

10. Um copo descartável cheio de água tem o formato de um cone com altura h e ângulo semivertical θ (veja a figura). Uma bola é colocada cuidadosamente no copo, causando um deslocamento de água e, portanto, derramando-a. Qual é o raio da bola que causa o maior transbordamento de água?



11. Uma *clepsidra*, ou relógio de água, é um frasco com um pequeno furo no fundo pelo qual a água passa. O relógio é calibrado para medir o tempo colocando-se marcas no frasco que correspondem ao nível de água a intervalos de tempo iguais. Seja $x = f(y)$ uma função contínua no intervalo $[0, b]$ e suponha que o frasco seja formado pela rotação do gráfico de f ao redor do eixo y. Seja V o volume de água e h a altura do nível de água no tempo t.

(a) Determine V como uma função de h.

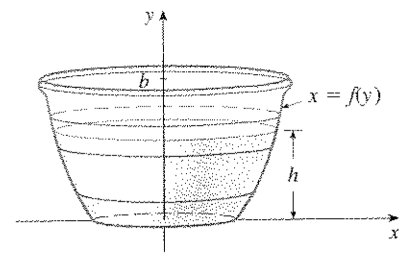
(b) Mostre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Suponha que A é a área do buraco no fundo do frasco. Da Lei de Torricelli, temos a taxa de mudança do volume de água dada por

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

onde k é uma constante negativa. Determine a fórmula para a função f tal que dh/dt é um constante C. Qual a vantagem em ter $dh/dt = C$?



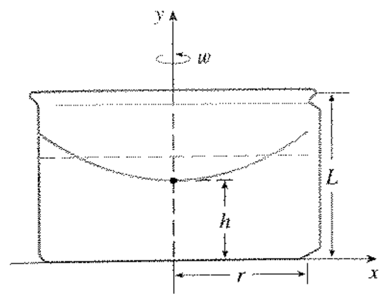


FIGURA PARA O PROBLEMA 12

12. Um frasco cilíndrico de raio r e altura L é parcialmente cheio com um líquido de volume V. Se o frasco é girado ao redor do seu eixo de simetria com uma velocidade angular ω, constante, então o frasco induzirá um movimento rotacional do líquido ao redor do mesmo eixo. Eventualmente, o líquido girará na mesma velocidade angular do frasco. A superfície do líquido se tornará convexa, como indicado na figura, porque a força centrífuga nas partículas do líquido aumenta com a distância do eixo do frasco. Pode-se mostrar que a superfície do líquido é um parabolóide de revolução gerado pela rotação da parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

ao redor do eixo y, onde g é a aceleração da gravidade.

(a) Determine h como uma função de ω.

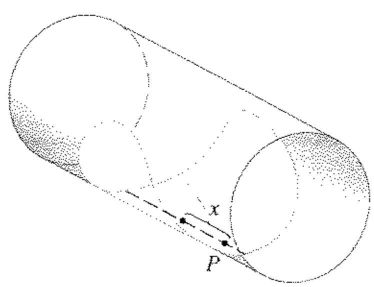
(b) A que velocidade angular a superfície do líquido tocará o fundo do frasco? A que velocidade o líquido entornará?

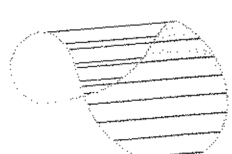
(c) Suponha que o raio do frasco é de 2 pés, a altura, de 7 pés e o frasco e o líquido estão girand com a mesma velocidade angular. A superfície do líquido está a 5 pés abaixo do topo do frasc no eixo central e está a 4 pés abaixo do topo do frasco, a 1 pé de distância do eixo central.

(i) Determine a velocidade angular do frasco e o volume do fluido.

(ii) A que distância da borda do tanque está o líquido na parede do frasco?

13. Se a tangente em um ponto P de uma curva $y = x^3$ intercepta a curva novamente no ponto Q seja A a área da região limitada pela curva e pelo segmento de reta PQ. Seja B a área da região definida da mesma maneira começando com Q em vez de P. Qual a relação entre A e B?





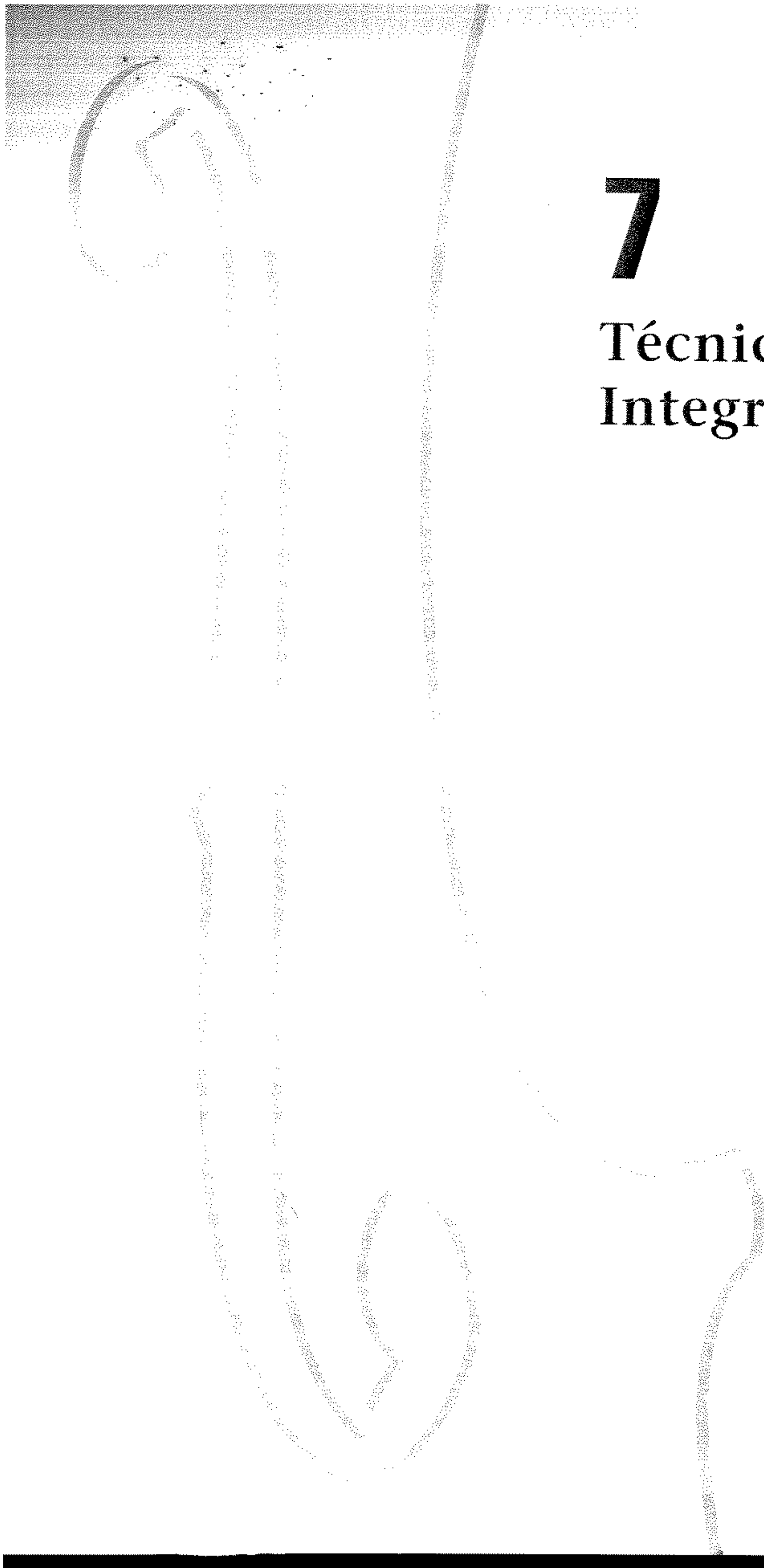
14. Suponha que estejamos planejando fazer tacos com uma tortilha arredondada com 8 polegad de diâmetro, curvando a tortilha como se fosse uma parte arredondada extraída da casca de um cilindro circular. Queremos rechear a tortilha até a borda (e não mais) com carne, queijo outros ingredientes. Nosso problema é decidir como curvar a tortilha a fim de maximizar o volume de comida que ela possa conter.

(a) Começamos posicionando um cilindro circular de raio r ao longo de um diâmetro da tortilha e envolvendo-a em torno do cilindro. Seja x a distância do centro da tortilha até um ponto P sobre o diâmetro. (veja a figura). Mostre que a área da secção transversal do taco recheado no plano passando por P e perpendicular ao eixo do cilindro é

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

e escreva uma expressão para o volume desse taco recheado.

(b) Determine (aproximadamente) o valor do r que maximiza o volume do taco. (Use uma aproximação gráfica do seu CAS).



7

Técnicas de Integração

As técnicas deste capítulo nos possibilitam estimar a altura de um foguete um minuto após o lançamento e calcular a sua velocidade de escape.

Com o Teorema Fundamental do Cálculo podemos integrar uma função se conhecermos uma antiderivada, isto é, uma integral indefinida. Aqui resumimos as integrais mais importantes aprendidas até agora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Neste capítulo desenvolveremos técnicas para usar essas fórmulas básicas de integração para obter as integrais indefinidas de funções mais complicadas. Aprendemos o método mais importante de integração, o Método da Substituição, na Seção 5.5. A outra técnica geral, integração por partes, é apresentada na Seção 7.1. Então aprenderemos métodos que são especiais para as classes particulares de funções, tais como funções trigonométricas e racionais.

A integração não é tão direta quanto a diferenciação; não existem regras que nos garantam a obtenção de uma integral indefinida de uma função. Portanto, na Seção 7.5, discutiremos uma estratégia para integração.

7.1 Integração por Partes

Cada regra de diferenciação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regı de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a diferenciaçã Aquela que corresponde à Regra do Produto para a diferenciação é chamada *integraçã por partes*.

A Regra do Produto estabelece que se f e g são funções diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para as integrais indefinidas essa equação torna-se

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou
$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \tag{1}$$

A Fórmula 1, denominada **fórmula de integração por partes**, é mais facilmente lembrada com a seguinte notação: sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula da integração por partes torna-se

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

EXEMPLO 1 Encontre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1 Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos escolher qualquer antiderivada de g'.) Assim, usando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

É sábio verificar a resposta derivando-a. Se fizermos assim, obteremos $x \operatorname{sen} x$, como esperado.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2 Seja

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

É útil usar o seguinte padrão:

$u = \square \qquad dv = \square$

$du = \square \qquad v = \square$

Então
$$du = dx\,. \qquad v = -\cos x$$

e desse modo

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

NOTA □ Nosso objetivo ao usar a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida. Assim, no Exemplo 1 iniciamos com $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x\,dx$. Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x\,dx$, então $du = \cos x\,dx$ e $v = x^2/2$; assim, a integração por partes daria

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x\,dx$ é uma integral muito mais difícil que aquela que começamos. Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada (ou ao menos não mais complicada), de maneira que $dv = g'(x)\,dx$ possa ser prontamente integrada para dado v.

EXEMPLO 2 Avalie $\int \ln x\,dx$.

SOLUÇÃO Não temos aqui muita escolha para u e dv. Seja

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Então $$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, temos

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\,\frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

É comum escrevermos $\int 1\,dx$ como $\int dx$.

Verifique a resposta derivando.

A integração por partes é eficaz nesse exemplo t porque a derivada da função $f(x) = \ln x$ é mais simples que f.

EXEMPLO 3 Encontre $\int t^2 e^t\,dt$.

SOLUÇÃO Note que t^2 se torna mais simples quando diferenciada (enquanto e^t permanece inalterada quando a derivamos ou a integramos). Assim, escolhemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

Então $$du = 2t\,dt \qquad v = e^t$$

A integração por partes resulta em

$$\int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\,dt \tag{3}$$

A integral que obtivemos, $\int te^t dt$ é mais simples que a integral original, mas ainda não é óbvia. Portanto usamos a integração por partes mais uma vez, mas agora com $u = t$ e $dv = e^t\,dt$. Então $du = dt$, $v = e^t$, e

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt$$

$$= te^t - e^t + C$$

Colocando isso na Equação 3, temos

$$\begin{aligned}\int t^2e^t\,dt &= t^2e^t - 2\int te^t\,dt \\ &= t^2e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{onde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

Um método mais fácil usando números complexos é dado no Exercício 48 do Apêndice G.

Avalie $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUÇÃO Nem e^x nem sen x torna-se mais simples quando derivada, mas tentamos escolher $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ de qualquer maneira. Então $du = e^x\,dx$ e $v = -\cos x$. Assim, integrando por partes obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

A integral que obtivemos, $\int e^x\cos x\,dx$, não é mais simples que a integral original, mas pelo menos não é mais complicada. Como tivemos sucesso no exemplo anterior integrando por partes duas vezes, insistiremos e integraremos por partes novamente. Dessa vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos x\,dx$. Então $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, e

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

A Figura 1 ilustra o Exemplo 4 mostrando os gráficos de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ e $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como uma verificação visual de nosso trabalho, note que $f(x) = 0$ quando F tem um máximo ou um mínimo.

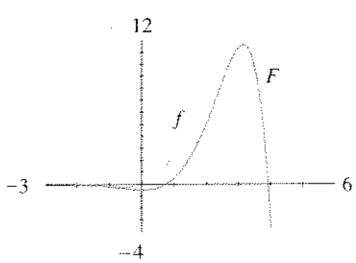


FIGURA 1

A princípio, parece que não conseguimos nada, já que chegamos a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, isto é, onde começamos. Contudo, se colocarmos a Equação 5 na Equação 4 obteremos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Isso pode ser considerado como uma equação para ser resolvida para a integral desconhecida. Adicionando $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ para ambos os lados, obtemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividindo por 2 e adicionando a constante de integração, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos avaliar as integrais definidas por partes. Avaliando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b, supondo f' e g' contínuas e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

EXEMPLO 5 □ Calcule $\int_0^1 \text{tg}^{-1}x\,dx$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \text{tg}^{-1}x \qquad dv = dx$$

Então

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Como a Fórmula 6 dá

$$\int_0^1 \text{tg}^{-1}x\;dx = x\,\text{tg}^{-1}x\,\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1 \cdot \text{tg}^{-1}\,1 - 0 \cdot \text{tg}^{-1}\,0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

□ Como $\text{tg}^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, a integral no Exemplo 5 pode ser interpretada como a área da região mostrada na Figura 2.

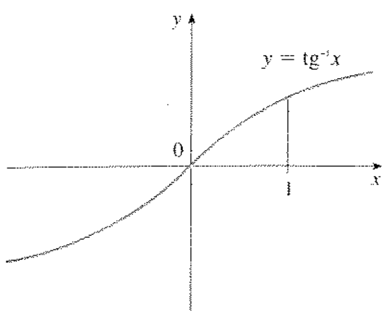


FIGURA 2

Para avaliar essa integral usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (porque u tem outro significado nesse exemplo). Então $dt = 2x\,dx$ e, assim, $x\,dx = dt/2$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Assim

$$\int_0^1 \text{tg}^{-1}x\;dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

□ A Equação 7 é chamada *fórmula de redução* porque o expoente n tem sido *reduzido* a $n-1$ e $n-2$.

EXEMPLO 6 □ Prove a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

SOLUÇÃO Seja $\quad u = \text{sen}^{n-1} \qquad dv = \text{sen}\,x\,dx$

Então $\quad du = (n-1)\,\text{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

assim a integração por partes resulta

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\;\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, temos

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\;\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, resolvemos essa equação para a integral desejada levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

ou

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

A fórmula de redução (7) é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x\, dx$ (se n é ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0\, dx = \int dx$ (se n é par).

7.1 Exercícios

1–2 Avalie a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x \ln x\, dx$; $u = \ln x$, $dv = x\, dx$

2. $\int \theta \sec^2\theta\, d\theta$; $u = \theta$, $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

3–32 Avalie a integral.

3. $\int x \cos 5x\, dx$

4. $\int x e^{-x}\, dx$

5. $\int r e^{r/2}\, dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t\, dt$

7. $\int x^2 \operatorname{sen} \pi x\, dx$

8. $\int x^2 \cos mx\, dx$

9. $\int \ln(2x + 1)\, dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

11. $\int \operatorname{arctg} 4t\, dt$

12. $\int p^5 \ln p\, dp$

13. $\int (\ln x)^2\, dx$

14. $\int t^3 e^t dt$

15. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

16. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\, d\theta$

17. $\int y \operatorname{senh} y\, dy$

18. $\int y \cosh ay\, dy$

19. $\int_0^\pi t \operatorname{sen} 3t\, dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx$

21. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

22. $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t\, dt$

23. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\, dy$

24. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{cossec}^2 x\, dx$

25. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\, dx$

26. $\int_0^1 x 5^x\, dx$

27. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

28. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\, dx$

29. $\int \cos(\ln x)\, dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\, dr$

31. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\, dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\, ds$

33–36 Primeiro faça uma substituição e então use a integração por partes para avaliar a integral.

33. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

34. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

36. $\int x^5 e^{x^2} dx$

37–40 Avalie a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável usando o gráfico da função e de sua antiderivada ($C = 0$).

37. $\int x \cos \pi x\, dx$

38. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

39. $\int (2x + 3)e^x dx$

40. $\int x^3 e^{x^2} dx$

41. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para avaliar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

42. (a) Prove a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para avaliar $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use as partes (a) e (b) para avaliar $\int \cos^4 x\, dx$.

43. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.
(b) Use a parte (a) para avaliar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

44. Prove que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

45–48 Use a integração por partes para provar a fórmula de redução.

45. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

46. $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$

47. $\int (x^2 + a^2)^n\, dx$

$$= \frac{x(x^2+a^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} \int (x^2+a^2)^{n-1}\, dx \quad \left(n \neq -\tfrac{1}{2}\right)$$

48. $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

49. Use o Exercício 45 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

50. Use o Exercício 46 para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

51–52 Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

51. $y = xe^{-0.4x}$, $y = 0$, $x = 5$

52. $y = 5 \ln x$, $y = x \ln x$

53–54 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas de x dos pontos de interseção das curvas dadas. Então ache (aproximadamente) a área da região limitada pelas curvas.

53. $y = x \operatorname{sen} x$, $y = (x-2)^2$

54. $y = \operatorname{arctg} 3x$, $y = x/2$

55–58 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

55. $y = \cos(\pi x/2)$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$; ao redor do eixo y

56. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$; ao redor do eixo y

57. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$; ao redor de $x = 1$

58. $y = e^x$, $x = 0$, $y = \pi$; ao redor do eixo x

59. Encontre o valor médio de $f(x) = x^2 \ln x$ no intervalo $[1, 3]$.

60. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo o combustível) seja m, que o combustível seja consumido a uma taxa r, e que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete a um tempo t é dado pela seguinte equação:

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

onde g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8$ m/s^2, $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3.000$ m/s, ache a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

61. Uma partícula que se move ao longo de uma linha reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

62. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' são contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x) g''(x)\, dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\, dx$$

63. Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e que f'' seja contínua. Determine o valor de $\int_1^4 x f''(x)\, dx$

64. (a) Use a integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)\, dx$$

(b) Se f e g são funções inversas e f' é contínua, prove que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

[*Sugestão*: Use a parte (a) e faça a substituição $y = f(x)$.]

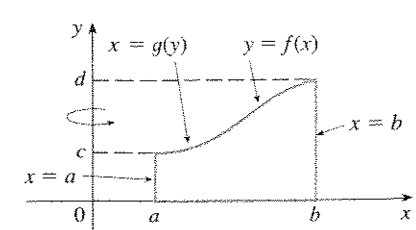
(c) No caso onde f e g são funções positivas e $b > a > 0$, desenh um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b)

(d) Use a parte (b) para avaliar $\int_1^e \ln x\, dx$.

65. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar a integração por partes para prová-la usando o método do fatiamento da Seção 6.2, ao menos para o caso onde f é um a um e, portanto, tem uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\, dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use a integração por parte na integral resultante para provar que $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$.



66. Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx$.
(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.
(b) Use o Exercício 44 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Utilize as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduza que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.
(d) Use a parte (c) e os Exercícios 43 e 44 para mostrar que

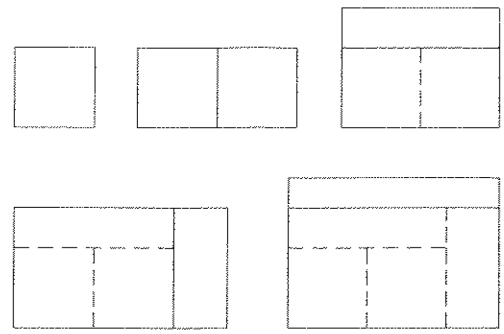
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

que é chamado *produto de Wallis*.

(e) Construímos os retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque os retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.



7.2 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 □ Avalie $\int \cos^3 x \, dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Para integrarmos as potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra $\operatorname{sen} x$. Similarmente, uma potência de seno precisaria de um fator extra $\cos x$. Dessa forma, podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x$$

Podemos então avaliar a integral substituindo $u = \operatorname{sen} x$, assim $du = \cos x \, dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

Em geral tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde temos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

EXEMPLO 2 □ Encontre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \text{sen}^2 x$, mas ficaríamos com uma expressão em termos de sen x sem um fator extra cos x. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\text{sen}^4 x$ restante em termos de cos x:

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x$$

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen}\, x\, dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$

□ A Figura 1 mostra os gráficos do integrando $\text{sen}^5 x \cos^2 x$ no Exemplo 2 e sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

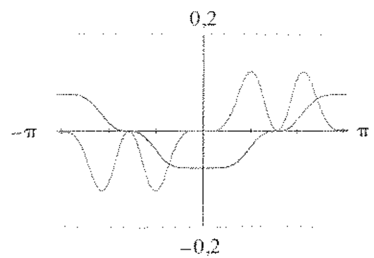


FIGURA 1

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha. Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade (veja as Equações 17b e 17a no Apêndice D

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

□ O Exemplo 3 mostra que a área da região exposta na Figura 2 é $\pi/2$.

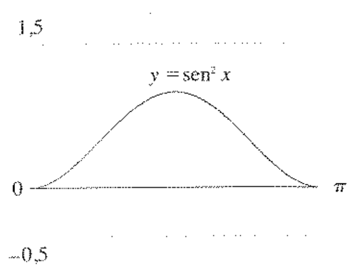


FIGURA 2

EXEMPLO 3 □ Avalie $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx$.

SOLUÇÃO Se escrevermos $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples para se avaliar. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\text{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\text{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\text{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Note que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos cos $2x$. Outro método para se avaliar essa integral foi dado no Exercício 41 na Seção 7.1.

EXEMPLO 4 □ Ache $\int \text{sen}^4 x\, dx$.

SOLUÇÃO É possível avaliar essa integral usando a fórmula de redução para $\int \text{sen}^n x\, dx$ (Equação 7.1.7) junto com o Exemplo 1 (como no Exercício 41 na Seção 7.1), entretanto, outro método é escrever $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$ e usar uma fórmula do ângulo-metade:

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^4 x\, dx &= \int (\text{sen}^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx\end{aligned}$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Isso resulta em

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int [1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C$$

Para resumir, listamos as regras a seguir quando avaliamos as integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, onde $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$ são inteiros.

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x\,(\cos^2 x)^k \cos x\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx$$

Nesse caso, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência de seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para expressar os fatores remanescentes em termos de cosseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

Então substitua $u = \cos x$. [Note que se ambos os fatores de seno e cosseno são ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

(c) Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Podemos empregar uma estratégia semelhante para avaliar as integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$. Como $(d/dx)\operatorname{tg} x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) de secante remanescente para uma expressão envolvendo a tangente utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx) \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$, podemos separar um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e converter a potência (par) de tangente remanescente para secante.

EXEMPLO 5 Avalie $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se separamos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator remanescente $\sec^2 x$ em termos de tangente usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Podemos então avaliar a integral substituindo $u = \operatorname{tg} x$ com $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \operatorname{tg}^6 x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\
&= \int u^6 (1 + u^2) \, du = \int (u^6 + u^8) \, du \\
&= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\
&= \tfrac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \tfrac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Ache $\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta \, d\theta$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2\theta$ como no exemplo anterior, ficaremos com um fator $\sec^5\theta$, que não é facilmente convertido para tangente. Contudo, se separarmos um fator $\sec \theta \operatorname{tg} \theta$, poderemos converter a potência remanescente de tangente para uma expressão envolvendo apenas a secante usando a identidade $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Poderemos então avaliar a integral substituindo $u = \sec \theta$, assim $du = \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta \, d\theta &= \int \operatorname{tg}^4 \theta \sec^6 \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2 \theta - 1)^2 \sec^6 \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11} \sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9} \sec^9\theta + \tfrac{1}{7} \sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores mostram as estratégias para avaliar as integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$ para dois casos, resumidos aqui.

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \operatorname{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx\end{aligned}$$

Assim, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx\end{aligned}$$

Então substitua $u = \sec x$.

Para outros casos as regras não são tão simples. Talvez seja necessário usar as identidades, a integração por partes e, ocasionalmente, um pouco de engenhosidade. Algumas vezes precisaremos integrar $\operatorname{tg} x$ utilizando a fórmula estabelecida em (5.5.5):

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Também precisaremos da integral indefinida de secante:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C}$$

Poderíamos verificar a Fórmula 1 diferenciando o lado direito, ou como a seguir. Primeiro multiplicamos numerador e denominador por $\sec x + \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \sec x \, \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx\end{aligned}$$

Se substituirmos $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, então $du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x) \, dx$, assim a integral torna-se $\int (1/u) \, du = \ln|u| + C$. Então, temos

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

EXEMPLO 7 □ Ache $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui apenas tg x ocorre; então usamos $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescrever um fator $\operatorname{tg}^2 x$ em termos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\, dx &= \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x\, dx \\ &= \int \operatorname{tg} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

Na primeira integral substituímos mentalmente $u = \operatorname{tg} x$ de modo que $du = \sec^2 x\, dx$.

Se uma potência par de tangente aparece com uma potência ímpar de secante, é útil expressar o integrando completamente em termos de sec x. As potências de sec x podem requerer a integração por partes, como mostrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 8 □ Ache $\int \sec^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui integramos por partes com

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$$
$$du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx \qquad v = \operatorname{tg} x$$

Então
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx\end{aligned}$$

Usando a Fórmula 1 e resolvendo a integral requerida, temos

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\right) + C$$

As integrais como as do Exemplo 8 podem parecer muito especiais, mas elas ocorrem freqüentemente nas aplicações de integração, como veremos no Capítulo 8. As integrais da forma $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\, dx$ podem ser encontradas por métodos similares por causa da identidade $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas:

□ Essas identidades envolvendo produtos estão analisadas no Apêndice D.

$\boxed{2}$ Para avaliar as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, use a identidade correspondente:

(a) $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

EXEMPLO 9 □ Avalie $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral pode ser avaliada utilizando-se integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a), como a seguir:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C\end{aligned}$$

7.2 Exercícios

1–47 □ Avalie a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x \, dx$

3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x \, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$

5. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^4 x \, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^3(mx) \, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta) \, d\theta$

9. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(3t) \, dt$

10. $\int_0^{\pi} \cos^6 \theta \, d\theta$

11. $\int (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$

12. $\int x \cos^2 x \, dx$

13. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$

14. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

15. $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$

16. $\int \cos \theta \cos^5(\operatorname{sen} \theta) \, d\theta$

17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x \, dx$

18. $\int \operatorname{cotg}^5 \theta \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta$

19. $\int \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x \, dx$

21. $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2) \, dt$

23. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

24. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$

25. $\int \sec^6 t \, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta \operatorname{tg}^4 \theta \, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x \, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^3(2x) \sec^5(2x) \, dx$

29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x \, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x \, dx$

31. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$

32. $\int \operatorname{tg}^6(ay) \, dy$

33. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\cos^4 \theta} \, d\theta$

34. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x \, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x \, dx$

37. $\int \operatorname{cotg}^3 \alpha \operatorname{cossec}^3 \alpha \, d\alpha$

38. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x \, dx$

39. $\int \operatorname{cossec} x \, dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x \, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x \, dx$

42. $\int \operatorname{sen} 3x \cos x \, dx$

43. $\int \cos 7\theta \cos 5\theta \, d\theta$

44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx$

45. $\int \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} \, dx$

46. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$

47. $t \sec^2(t^2) \operatorname{tg}^4(t^2) \, dt$

48. Se $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 x \sec x \, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8 x \sec x \, dx$ em termos de I.

49–52 □ Avalie a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua antiderivada (tome $C = 0$).

49. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$

50. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$

51. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x \, dx$

52. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2} \, dx$

53. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

54. Avalie $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ por quatro métodos: (a) a substituição $u = \cos x$, (b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$, (c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e (d) integração por partes. Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

55–56 Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

55. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

56. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 2\operatorname{sen}^2 x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

57–58 Use um gráfico do integrando para estimar o valor da integral. Então utilize os métodos desta seção para provar que sua estimativa estava correta.

57. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

58. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x \, dx$

59–62 Encontre o volume obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

59. $y = \operatorname{sen} x,\ x = \pi/2,\ x = \pi,\ y = 0$; ao redor de eixo x

60. $y = \operatorname{tg}^2 x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/4$; ao redor de eixo x

61. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$; ao redor de $y = -1$

62. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$; ao redor de $y = 1$

63. Uma partícula se move em uma linha reta com a função velocidade $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função de posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

64. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a −155 V com uma freqüência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155\operatorname{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Os voltímetros lêem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.

(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A\operatorname{sen}(120\pi t)$.

65–67 Prove a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

65. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

66. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

68. A *série finita de Fourier* é dada pela soma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

7.3 Substituição Trigonométrica

Para achar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se a integral fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Note a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual uma nova variável é uma função da velha) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável velha é uma função da nova).

Em geral podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificar nossos cálculos, presumimos que g tem uma função inversa, isto é, g é um a um. Nesse caso, se trocarmos u por x e x por t na Regra da Substituição (Equação 5.5.4) obteremos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esse tipo de substituição é chamado *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ desde que esta defina uma função um a um. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja um a um. (Estes são os mesmos intervalos usados no Apêndice D na definição de funções inversas.)

Tabela de Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

EXEMPLO 1 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta| = 3 \cos \theta$$

(Note que $\cos \theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Então a Regra de Substituição Inversa fornece

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2\theta}\, 3 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta \, d\theta \\
&= \int (\operatorname{cossec}^2\theta - 1)\, d\theta \\
&= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C
\end{aligned}$$

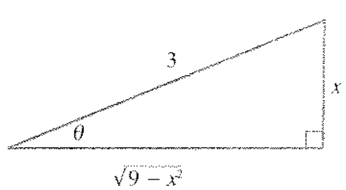


FIGURA 1
$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x}{3}$

Como esta é uma integral indefinida, devemos retornar à variável x original. Isso pode ser feito usando-se as identidades trigonométricas para expressar $\operatorname{cotg} \theta$ em termos de $\operatorname{sen} \theta = x/3$ ou pelo desenho de um diagrama, como na Figura 1, onde θ é interpretado como um ângulo de um triângulo retângulo. Como $\operatorname{sen} \theta = x/3$, denominamos o lado oposto e a hipotenusa como tendo comprimentos x e 3. Pelo Teorema de Pitágoras o comprimento do lado adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$, assim podemos ler o valor de $\operatorname{cotg} \theta$ diretamente da figura:

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Embora $\theta > 0$ no diagrama, essa expressão para $\operatorname{cotg} \theta$ é válida quando $\theta < 0$.) Como $\operatorname{sen} \theta = x/3$, temos $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$ e assim

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\!\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

EXEMPLO 2 Encontre a área limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Resolvendo a equação da elipse para y, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

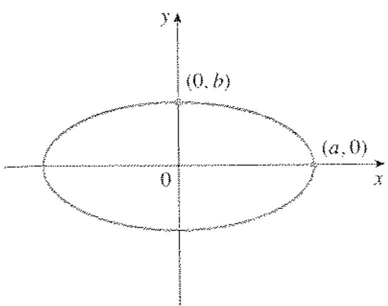


FIGURA 2

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Porque a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total A é quatro vezes a área do primeiro quadrante (veja a Figura 2). A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

e, dessa forma,
$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para avaliar essa integral substituímos $x = a \operatorname{sen}\theta$. Então $dx = a\cos\theta\,d\theta$. Para mudar os limites de integração notamos que quando $x = 0$, $\operatorname{sen}\theta = 0$, logo $\theta = 0$; quando $x = a$, $\operatorname{sen}\theta = 1$, assim $\theta = \pi/2$. Também

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta| = a\cos\theta$$

já que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Portanto

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Mostramos que a área de uma elipse com semi-eixos a e b é πab. Em particular, tomando $a = b = r$, provamos a famosa fórmula que diz que a área de um círculo de raio r é πr^2.

NOTA Como a integral no Exemplo 2 era a definida, mudamos os extremos c integração e não tivemos de convertê-los de volta à variável x original.

EXEMPLO 3 Ache $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 2\operatorname{tg}\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Então $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\operatorname{tg}^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\,|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Assim, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$$

Para avaliar essa integral trigonométrica colocamos tudo em termos de sen θ e cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\text{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição $u = \text{sen}\ \theta$, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\ \text{sen}\ \theta} + C$$

$$= -\frac{\text{cossec}\ \theta}{4} + C$$

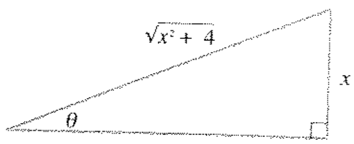


FIGURA 3
$\text{tg}\ \theta = \dfrac{x}{2}$

Usamos a Figura 3 para determinar que a cossec $\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ e assim

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

EXEMPLO 4 □ Ache $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seria possível usar a substituição trigonométrica $x = 2\ \text{tg}\ \theta$ aqui (como no Exemplo 3). Mas a substituição direta $u = x^2 + 4$ é mais simples, porque $du = 2x\,dx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

NOTA □ O Exemplo 4 ilustra o fato de que mesmo quando as substituições trigonométricas são possíveis, elas nem sempre dão a solução mais fácil. Você deve primeiro visualizar um método mais fácil.

EXEMPLO 5 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, onde $a > 0$.

SOLUÇÃO 1 Seja $x = a\sec\theta$, onde $0 < \theta < \pi/2$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$. Então $dx = a\sec\theta\ \text{tg}\ \theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\ \text{tg}^2\theta} = a|\text{tg}\ \theta| = a\ \text{tg}\ \theta$$

Portanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\ \text{tg}\ \theta}{a\ \text{tg}\ \theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \text{tg}\ \theta| + C$$

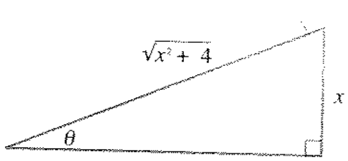


FIGURA 4
$\text{tg}\ \theta = \dfrac{x}{2}$

O triângulo da Figura 4 mostra que tg $\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, assim temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Escrevendo $C_1 = C - \ln a$, temos

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1$$

SOLUÇÃO 2 Para $x > 0$ a substituição hiperbólica $x = a\cosh t$ também pode ser usada. Usando a identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, temos

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \operatorname{senh} t$$

Como $dx = a \operatorname{senh} t \, dt$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} t \, dt}{a \operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Como $\cosh t = x/a$, temos $t = \cosh^{-1}(x/a)$ e

$$\boxed{2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Embora as Fórmulas 1 e 2 pareçam muito diferentes, elas são realmente equivalentes à Fórmula 3.9.4.

NOTA ▫ Como o Exemplo 5 ilustra, as substituições hiperbólicas podem ser utilizadas no lugar de substituições trigonométricas e elas, às vezes, nos levam a respostas mais simples. Mas geralmente usamos substituições trigonométricas, porque as identidades trigonométricas são mais familiares que as identidades hiperbólicas.

EXEMPLO 6 ▫ Encontre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Primeiro notamos que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2 + 9})^3$; logo, a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2 + 9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u = 2x$. Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta$, o que dá $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\operatorname{tg}^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Quando $x = 0$, $\operatorname{tg}\theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$, assim $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\operatorname{tg}^3\theta}{27\sec^3\theta}\, \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Agora substituímos $u = \cos\theta$ de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$.

Portanto

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \frac{3}{16}\int_1^{1/2}(1-u^{-2})\,du$$

$$= \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right)-(1+1)\right] = \frac{3}{32}$$

EXEMPLO 7 Avalie $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2+2x) = 3 + 1 - (x^2+2x+1)$$
$$= 4 - (x+1)^2$$

Isso sugere a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

A Figura 5 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 7 e de sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

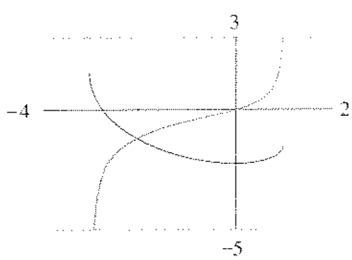


FIGURA 5

Agora substituímos $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$, dessa forma

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta$$

$$= -2\cos\theta - \theta + C$$

$$= -\sqrt{4-u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

7.3 Exercícios

1–3 Avalie a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e rotule o triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx;\quad x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx;\quad x = 3\,\text{sen}\,\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx;\quad x = 3\,\text{tg}\,\theta$

4–30 Avalie a integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt$

11. $\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\, dx$

14. $\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2 - 9}}$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$

20. $\int \frac{t}{\sqrt{25 - t^2}}\, dt$

21. $\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8}}\, dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

28. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{5/2}}$

29. $\int x\sqrt{1 - x^4}\, dt$

30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\, dt$

31. (a) Use a substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.9.3.

32. Avalie

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

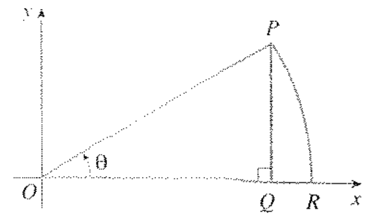
(a) pela substituição trigonométrica.

(b) pela substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Encontre a área da região limitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Prove a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Sugestão*: Suponha $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem; assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e a área da região PQR na figura.]



36. Avalie a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

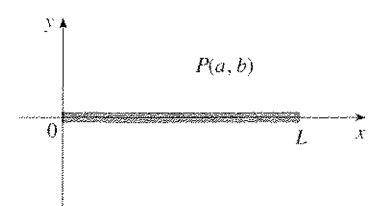
Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

37. Use o gráfico para aproximar as raízes da equação $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. Então aproxime a área limitada pela curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ e a reta $y = 2 - x$.

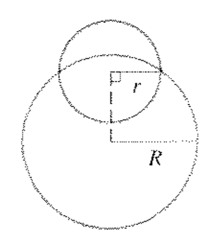
38. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

onde λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0, a permissividade do vácuo (veja a figura). Avalie a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.



39. Encontre a área da região em forma de *lua* crescente limitada pelos arcos dos círculos de raios r e R. (Veja a figura.)



40. Um tanque reservatório de água tem o formato de um cilindro com diâmetro de 10 pés. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 pés, qual porcentagem da capacidade total está sendo usada?

41. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume limitado pelo toro.

7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar. Para ilustrar o método, observe que levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x+2)$ a um denominador comum obtemos

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

Para ver como esse método de frações parciais funciona em geral, consideramos a função racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como uma soma de frações mais simples desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Essa função racional é denominada *própria*. Lembre-se de que se

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

onde $a_n\neq 0$, então o grau de P é n, e escrevemos $\deg(P)=n$.

Se f é imprópria, isto é, $\deg(P)\geqslant\deg(Q)$, então devemos ter uma etapa preliminar dividindo P por Q (por divisão longa) até o restante $R(x)$ ser obtido, tal que $\deg(R)<\deg(Q)$. A divisão é

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

onde S e R são polinômios também.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo o que precisamos.

EXEMPLO 1 Ache $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos fazer a divisão longa. Isso nos permite escrever

$$\int\frac{x^3+x}{x-1}\,dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. Pode ser mostrado que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorá-lo como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma de **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO I □ **O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.** Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é mútiplo constante do outro). Nesse casc o teorema das frações parciais estabelece que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tal que

2 $$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

EXEMPLO 2 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando (2) tem a forma

3 $$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

□ Outro método para achar A, B e C é dado na nota após este exemplo.

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obtendo

4 $$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma-padrão para os polinômios, temos

5 $$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

□ A Figura 1 mostra os gráficos do integrando e de sua integral indefinida (com $K = 0$), no Exemplo 2. Qual é qual?

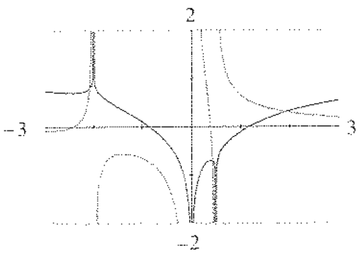


FIGURA 1

□ Podemos conferir nosso resultado tomando o denominador comum dos termos e depois somá-los.

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x + 2} \right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K \end{aligned}$$

Integrando o termo do meio fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = du/2$.

NOTA □ Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes A, B e C no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; isto é verdadeiro para cada valor de x. Vamos escolher valores de x que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, logo o segundo e o terceiro membros do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma maneira, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ dá $10C = -1$, assim $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. (Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ ou -2, então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores? De fato, a Equação 4 é válida para todos os valores de x, até para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ e -2. Veja o Exercício 67 para uma explicação.)

EXEMPLO 3 □ Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, onde $a \neq 0$.

SOLUÇÃO O método das frações parciais dá

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

e, portanto,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Usando o método da nota anterior, colocamos $x = a$ nesta equação e obtemos $A(2a) = 1$, assim $A = 1/(2a)$. Se pusermos $x = -a$, obteremos $B(-2a) = 1$ e, dessa forma, $B = -1/(2a)$. Então

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x - a| - \ln|x + a| \right) + C \end{aligned}$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escrever a integral como

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Veja os Exercícios 53–54 para duas maneiras de usar a Fórmula 6.

CASO II □ **$Q(x)$ é um produto de fatores lineares, mas alguns deles são repetidos.** Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes; isto é, $(a_1x + b_1$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação usaríamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Para ilustrar poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

mas preferimos entrar em detalhes em um exemplo simples.

EXEMPLO 4 □ Encontre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx$.

SOLUÇÃO A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão longa é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2 - 1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

□ Outro método para achar os coeficientes:
Faça $x = 1$ em (8): $B = 2$.
Faça $x = -1$: $C = -1$.
Faça $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Agora equacionamos os coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$, assim

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$

CASO III □ **$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.** Se $Q(x)$ tem o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

9 $$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

onde A e B são as constantes a ser determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

O termo dado em (9) pode ser integrado completando-se o quadrado e usando-se a fórmula

10 $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

EXEMPLO 5 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fracionado, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$
$$= (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Equacionando os coeficientes, obtemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Então $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$ e, dessa forma,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Para integrar o segundo termo o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Avaliamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(x/2) + K$$

EXEMPLO 6 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do denominador *não é menor que* o do numerador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Note que o termo quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.

Para integrar a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x-1)^2 + 2$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$. Então, $du = 2\,dx$ e $x = (u+1)/2$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}\right)dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2+2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

NOTA □ O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{onde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos o quadrado no denominador e então fazemos a substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Então a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de tg^{-1}.

CASO IV □ **$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.**
Se $Q(x)$ tem um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial (9), a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos de (11) pode ser integrado primeiro completando-se o quadrado.

□ Seria extremamente tedioso o cálculo manual dos valores numéricos dos coeficientes no Exemplo 7. A maioria dos sistemas algébricos computacionais, contudo, encontra os valores numéricos muito rapidamente. Por exemplo, o comando Maple

convert(f, parfrac, x)

ou o comando do Mathematica

Apart[f]

dão os seguintes valores:

$A = -1,\quad B = \frac{1}{8},\quad C = D = -1,$

$E = \frac{15}{8},\quad F = -\frac{1}{8},\quad G = H = \frac{3}{4},$

$I = -\frac{1}{2},\quad J = \frac{1}{2}$

EXEMPLO 7 □ Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$

EXEMPLO 8 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUÇÃO A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$\begin{aligned}
-x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\
&= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A
\end{aligned}$$

Se equacionarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tem a solução $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1$ e $E = 0$. Então

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

□ No 2º e 4º termos, fizemos mentalmente a substituição $u = x^2 + 1$.

Notamos que algumas vezes as frações parciais podem ser evitadas na integração d funções racionais. Por exemplo, embora a integral

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$$

possa ser avaliada pelo método do Caso III, é muito mais fácil observar que $u = x(x^2+3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2+3)\,dx$, e assim

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C$$

Substituições Racionalizantes

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por me de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma express da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos apar cem nos exercícios.

EXEMPLO 9 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, assim $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$.

Portanto

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du$$

Podemos avaliar essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u-2)(u+2)$ e usando as frações parciais ou a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

7.4 Exercícios

1–6 □ Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x+3)(3x+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. (a) $\dfrac{x-1}{x^3+x^2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x^3+x}$

3. (a) $\dfrac{2}{x^2+3x-4}$ (b) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2+4x+3}$ (b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$ (b) $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7–38 □ Avalie a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

36. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

39–48 □ Faça a substituição para expressar o integrando como uma função racional e então avalie a integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dx$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugestão:* Substitua $u=\sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ [*Sugestão:* Substitua $u=\sqrt[12]{x}$.]

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

49–50 □ Use a integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

49. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

50. $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^{-1}x\,dx$

51. Use um gráfico de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use as frações parciais para encontrar o valor exato.

52. Plote a função $y=1/(x^3-2x^2)$ e sua antiderivada na mesma tela.

53–54 □ Avalie a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

54. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

55. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) notou que a substituição $t=\mathrm{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen x cos x em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

56–59 Use a substituição do Exercício 55 para transformar o integrando em uma função racional de t e então avalie a integral.

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5\operatorname{sen} x}$

57. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx$

58. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}\,dx$

60–61 Encontre a área da região sob a curva dada de a até b.

60. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$, $a = 5$, $b = 10$

61. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $a = 2$, $b = 3$

62. Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ for girada ao redor do: (a) eixo x e (b) eixo y.

63. Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representa o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t por

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P - S]}\,dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10.000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Avalie a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Note que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)

64. Fatore $x^4 + 1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para avaliar $\int 1/(x^4 + 1)\,dx$.

65. (a) Use um sistema algébrico computacional para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) e compare com o resultado usando CAS para integrar f diretamente. Comente qualquer discrepância.

66. (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Utilize a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ e plote f e sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de f para descobrir as características principais do gráfico de $\int f(x)\,dx$.

67. Suponha que F, G e Q sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para todo x, exceto quando $Q(x) = 0$. Prove que $F(x) = G(x)$ para todo x. (*Sugestão*: Use a continuidade.)

68. Se f é uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

é uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

7.5 Estratégias de Integração

A integração é mais desafiante que a diferenciação. Para achar a derivada de uma função é óbvio qual fórmula de diferenciação devemos aplicar. Porém não é necessariamente óbvio qual técnica devemos aplicar para integrar uma dada função.

Até agora as técnicas individuais têm sido aplicadas em cada seção. Por exemplo, usamos geralmente a substituição no Exercício 5.5, a integração por partes no Exercício 7.1 e as frações parciais no Exercício 7.4. Mas nesta seção apresentamos uma coleção de integrais misturadas aleatoriamente, e o principal desafio é reconhecer que técnica ou fórmula devem ser usadas. As regras fáceis e rápidas para a aplicação de um dado método em uma determinada situação não são fornecidas, contudo, damos alguns conselhos sobre estratégias que você pode achar útil.

Um pré-requisito para a seleção da estratégia é o conhecimento das fórmulas básicas de integração. Na tabela seguinte juntamos as integrais de nossas listas anteriores com várias fórmulas adicionais que aprendemos neste capítulo. Muitas delas deveriam ser memorizadas. É útil conhecê-las todas, mas aquelas marcadas com asterisco não necessitam ser memorizadas, porque podem ser facilmente deduzidas. A Fórmula 19 pode ser evitada usando-se frações parciais e as substituições trigonométricas podem ser utilizadas no lugar da Fórmula 20.

Tabela de Fórmulas de Integração As constantes de integração foram omitidas.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$	**8.** $\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x$
9. $\int \sec x\ \operatorname{tg} x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert \sec x + \operatorname{tg} x\rvert$	**12.** $\int \operatorname{cossec} x\,dx = \ln\lvert \operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x\rvert$
13. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln\lvert \sec x\rvert$	**14.** $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$

Uma vez que estiver armado com essas fórmulas básicas de integração, se não vir imediatamente como atacar uma dada integral, você poderá tentar a seguinte estratégia de quatro etapas.

1. Se possível, simplifique o integrando Algumas vezes o uso de manipulação algébrica ou identidades trigonométricas simplifica o integrando e torna o método de integração óbvio. Aqui estão alguns exemplos:

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int \left(\sqrt{x}+x\right)dx$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int (1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x) \, dx$$

2. Procure por uma substituição óbvia Tente encontrar alguma função $u = g(x)$ no integrando cuja diferencial $du = g'(x)\,dx$ também ocorra, separadamente da constante. Por exemplo, na integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$$

notamos que, se $u = x^2 - 1$, então $du = 2x\,dx$. Portanto, usamos a substituição $u = x^2 - 1$ em vez do método das frações parciais.

3. Classifique o integrando de acordo com sua forma Se as Etapas nº 1 e 2 não levaram a uma solução, então olhamos para a forma do integrando $f(x)$.

(a) *Funções trigonométricas*. Se $f(x)$ é um produto de potências de sen x e cos x, de tg x e sec x ou de cotg x e cossec x, então utilizaremos as substituições recomendadas na Seção 7.2.

(b) *Funções racionais*. Se f é uma função racional, usamos o procedimento da Seção 7.4 envolvendo as frações parciais.

(c) *Integração por partes*. Se $f(x)$ é um produto de uma potência de x (ou um polinômio) e uma função transcendental (como uma função trigonométrica, exponencial ou logarítmica), então tentamos a integração por partes, escolhendo u e dv de acordo com o conselho dado na Seção 7.1. Se você olhar as funções nos Exercícios 7.1, verá que a maioria é do tipo descrito.

(d) *Radicais*. Tipos particulares de substituição são recomendados quando certos radicais aparecem.

(i) Se $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ ocorre, utilizamos a substituição trigonométrica de acordo com a tabela da Seção 7.3.

(ii) Se $\sqrt[n]{ax+b}$ ocorre, usamos a substituição racionalizante $u = \sqrt[n]{ax+b}$. Isso funciona mais comumente para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Tente novamente Se as três etapas anteriores não derem resultado, lembre-se de que existem basicamente apenas dois métodos de integração: substituição e por partes.

(a) *Tente a substituição*. Mesmo que nenhuma substituição seja óbvia (Etapa nº 2), alguma inspiração ou engenhosidade (ou até mesmo desespero) pode sugerir uma substituição apropriada.

(b) *Tente por partes*. Embora a integração por partes seja usada na maioria das vezes nos produtos da forma descrita na Etapa nº 3(c), algumas vezes é eficaz em funções simples. Olhando na Seção 7.1 vemos que ela funciona em $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\operatorname{sen}^{-1}x$ e $\ln x$. Todas são funções inversas.

(c) *Manipule o integrando*. As manipulações algébricas (talvez racionalizando o denominador ou usando as identidades trigonométricas) podem ser úteis na transformação da integral em uma forma mais fácil. Essas manipulações podem ser mais substanciais que na Etapa nº 1 e podem envolver alguma engenhosidade. Aqui está um exemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \, dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int \left(\operatorname{cossec}^2 x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx$$

(d) *Relacione o problema àqueles anteriores*. Quando tiver adquirido alguma experiência em integração, você poderá usar um método em uma dada integral similar ao método já usado em uma integral anteriormente. Ou até será capaz de expressar a integral dada em termos de uma integral anterior. Por exemplo, a integral $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$ é desafiadora, mas se utilizamos a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, poderemos escrever

$$\int \operatorname{tg}^2 x \ \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

e se $\int \sec^3 x \, dx$ tiver sido previamente avaliada (veja o Exemplo 8 na Seção 7.2), então os cálculos poderão ser usados no problema presente.

(e) *Use vários métodos*. Algumas vezes dois ou três métodos são necessários para se avaliar uma integral. A avaliação pode envolver várias substituições sucessivas ou diferentes tipos ou até combinar a integração por partes com uma ou mais substituições.

Nos exemplos a seguir indicamos o método de ataque, mas não trabalhamos totalmente as integrais.

EXEMPLO 1 □ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx$

Na Etapa nº 1 reescrevemos a integral:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$$

A integral é agora da forma $\int \operatorname{tg}^m x \ \sec^n x \, dx$ com m ímpar; então usamos o conselho dado na Seção 7.2.

Alternativamente, se na Etapa nº 1 tivéssemos escrito

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} \, dx$$

então poderíamos ter continuado como se segue com a substituição $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6} (-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6} \, du = \int (u^{-4} - u^{-6}) \, du$$

EXEMPLO 2 □ $\int e^{\sqrt{x}} dx$

De acordo com a Etapa nº 3(d)(ii) substituímos $u = \sqrt{x}$. Então $x = u^2$, assim $dx = 2u \, du$ e

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int u e^u \, du$$

O integrando é agora um produto de u e da função transcendental e^u e, dessa forma, pode ser integrado por partes.

EXEMPLO 3 $\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

Nenhuma simplificação algébrica ou substituição é óbvia, por isso as Etapas n$^{\text{os}}$ 1 e 2 não se aplicam aqui. O integrando é uma função racional, então aplicamos o procedimento da Seção 7.4, lembrando que a primeira etapa é dividir.

EXEMPLO 4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aqui a Etapa nº 2 é tudo o que é necessário. Substituímos $u = \ln x$ porque sua diferencial é $du = dx/x$, que ocorre na integral.

EXEMPLO 5 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Embora a substituição racionalizante

$$u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

funcione aqui [Etapa nº 3(d)(ii)], isso leva a uma função racional muito complicada. Um método mais fácil é fazer alguma manipulação algébrica [como na Etapa nº 1 ou na Etapa nº 4(c)]. Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{1-x}$, temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx &= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Podemos Integrar Todas as Funções Contínuas?

A questão surge: nossa estratégia de integração nos permitirá encontrar a integral para toda função contínua? Por exemplo, podemos usar nossa estratégia para avaliar $\int e^{x^2}dx$? A resposta é não, ao menos não em termos das funções que nos são familiares.

As funções com as quais temos lidado neste livro são chamadas **funções elementares**. Essas são as funções polinomiais, as racionais, as de potência (x^a), as exponenciais (a^x), as logarítmicas, as trigonométricas e suas inversas, as hiperbólicas e suas inversas e todas aquelas que podem ser obtidas pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e composição. Por exemplo, a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x-1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

é uma função elementar.

Se f é uma função elementar, então f' é uma função elementar, mas $\int f(x)\,dx$ não é necessariamente uma função elementar. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Como f é contínua, sua integral existe e definimos a função F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

então sabemos pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Então, $f(x) = e^{x^2}$ tem uma antiderivada F, mas pode-se provar que F não é uma função elementar. Isso significa que não importa o quanto tentamos, nunca teremos sucesso em avaliar $\int e^{x^2}dx$ em termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11 do Volume II, contudo, veremos como expressar $\int e^{x^2}dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das integrais a seguir:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem antiderivadas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 Exercícios

1–80 □ Avalie a integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 \theta\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}\,dy$

6. $\displaystyle\int x \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx$

7. $\displaystyle\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$

8. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos^5 \theta\,d\theta$

12. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}}\,dt$

19. $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$

20. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

21. $\displaystyle\int t^3 e^{-2t}\,dt$

22. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\,dx$

24. $\displaystyle\int \ln(x^2-1)\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\,dt$

29. $\displaystyle\int_0^5 \frac{3w-1}{w+2}\,dw$

30. $\displaystyle\int_{-2}^2 |x^2-4x|\,dx$

31. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\operatorname{cotg} x}{4-\operatorname{cotg} x}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^8 \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5\theta \sec^3\theta\,d\theta$

39. $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\displaystyle\int \theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

42. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{tg}^{-1} x\,dx$

43. $\displaystyle\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$

44. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

45. $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{x+a}{x^2+a^2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\displaystyle\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\int \frac{1}{x+4+4\sqrt{x+1}}\,dx$

56. $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int x^2 \ln(1+x)\,dx$

59. $\int \frac{1}{e^{3x}-e^x}\,dx$

60. $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

61. $\int \frac{x^4}{x^{10}+16}\,dx$

62. $\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}}\,dx$

63. $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

64. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

66. $\int_2^3 \frac{u^3+1}{u^3-u^2}\,du$

67. $\int_1^3 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dx$

68. $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

69. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

70. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\int \frac{x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

72. $\int \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt[3]{t}}\,dt$

73. $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

75. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\,dx$

76. $\int (x^2-bx)\operatorname{sen} 2x\,dx$

77. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

78. $\int \frac{\sec x \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \sec x}\,dx$

79. $\int x \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

80. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}\,dx$

81. As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2 + 1)\,e^{x^2}$ tem. Calcule $\int (2x^2 + 1)\,e^{x^2}\,dx$.

7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas Algébricos Computacionais

Nesta seção descrevemos como usar as tabelas e os sistemas algébricos computacionais para integrar as funções que têm antiderivadas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas algébricos computacionais não podem achar fórmulas explícitas para as antiderivadas de funções do tipo e^{x^2} ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

Tabelas de Integrais

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil para se avaliar manualmente e não temos acesso a um sistema algébrico computacional. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. As tabelas mais extensas podem ser encontradas no *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30. ed., por Daniel Zwillinger, Boca Raton, FL: CRC Press, 1995 (581 entradas) ou no Gradshteyn and Ryzhik's *Table of Integrals, Series and Products* (Nova York, Academic Press, 2000), que contêm centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais não ocorrem freqüentemente da maneira exata como são listadas nas tabelas. Geralmente temos de usar substituições ou manipulações algébricas para transformar uma integral dada em uma das formas da tabela.

EXEMPLO 1 A região limitada pelas curvas $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$ e $x = 1$ é girada ao redor do eixo y. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO Usando o método das cascas cilíndricas vemos que o volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x \operatorname{arctg} x\,dx$$

A Tabela de Integrais aparece no fim do livro.

Na seção da Tabela de Integrais com o título *Formas Trigonométricas Inversas* localizamos a Fórmula 92:

$$\int u \operatorname{tg}^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\operatorname{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

Então, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 x \ \mathrm{tg}^{-1}x \ dx = 2\pi\left[\frac{x^2+1}{2} \ \mathrm{tg}^{-1}x - \frac{x}{2}\right]_0^1$$
$$= \pi[(x^2+1) \ \mathrm{tg}^{-1}x - x]_0^1 = \pi(2 \ \mathrm{tg}^{-1} 1 - 1)$$
$$= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi$$
□

EXEMPLO 2 □ Use a Tabela de Integrais para achar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção da tabela intitulada *Formas envolvendo* $\sqrt{a^2 - u^2}$, veremos que a entrada mais próxima é a de número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Isso não é exatamente o que temos, mas poderemos usá-la se fizermos primeiro a substituição $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\, du$$

Nesse caso, usamos a Fórmula 34 com $a^2 = 5$ (assim $a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\, du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2}\mathrm{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$
$$= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16}\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$
□

EXEMPLO 3 □ Utilize a Tabela de Integrais para achar $\int x^3 \,\mathrm{sen}\, x\, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção intitulada *Formas Trigonométricas*, veremos que nenhuma das entradas explicitamente inclui um fator u^3. Contudo, podemos usar a fórmula de redução na entrada 84 com $n = 3$:

$$\int x^3 \,\mathrm{sen}\, x\, dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x\, dx$$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \,\mathrm{sen}\, u - n\int u^{n-1}\,\mathrm{sen}\, u\, du$

Precisamos agora avaliar $\int x^2 \cos x\, dx$. Podemos usar a fórmula de redução na entrada 85 com $n = 2$, seguida pela entrada 82:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \,\mathrm{sen}\, x - 2\int x \,\mathrm{sen}\, x\, dx$$
$$= x^2 \,\mathrm{sen}\, x - 2(\mathrm{sen}\, x - x\cos x) + K$$

Combinando esses cálculos, temos

$$\int x^3 \,\mathrm{sen}\, x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \,\mathrm{sen}\, x + 6x\cos x - 6\,\mathrm{sen}\, x + C$$

onde $C = 3K$.

Use a Tabela de Integrais para encontrar $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUÇÃO Como a tabela fornece formas envolvendo $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$, mas não $\sqrt{ax^2+bx+c}$, primeiro completamos o quadrado:

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3$$

Se fizermos a substituição $u=x+1$ (assim $x=u-1$), o integrando envolverá o padrão $\sqrt{a^2+u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx=\int (u-1)\sqrt{u^2+3}\,du$$

$$=\int u\sqrt{u^2+3}\,du-\int\sqrt{u^2+3}\,du$$

A primeira integral é avaliada utilizando-se a substituição $t=u^2+3$:

$$\int u\sqrt{u^2+3}\,du=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t^{3/2}=\tfrac{1}{3}(u^2+3)^{3/2}$$

21. $\int\sqrt{a^2+u^2}\,du=\dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$

Para a segunda integral usamos a Fórmula 21 com $a=\sqrt{3}$:

$$\int\sqrt{u^2+3}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3}+\tfrac{3}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+3}\right)$$

Então

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2}-\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+4}-\tfrac{3}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+C$$

Sistemas Algébricos Computacionais

Vimos que o uso de tabelas envolve combinar a forma de um dado integrando com as formas de integrandos nas tabelas. Os computadores são particularmente bons para reconhecer padrões. E do mesmo jeito que usamos as substituições junto com as tabelas, um CAS pode fazer substituições que transformam uma integral dada em uma daquelas que ocorrem em suas fórmulas armazenadas. Então não é surpresa que um sistema algébrico computacional é muito bom com a integração. Isso não significa que a integração manual é uma habilidade obsoleta. Veremos que os cálculos manuais algumas vezes produzem uma integral indefinida em uma forma que é mais conveniente que a resposta do computador.

Para começar, vamos ver o que acontece quando pedimos para uma máquina integrar uma função relativamente simples $y=1/(3x-2)$. Usando a substituição $u=3x-2$, um cálculo manual fácil nos fornece

$$\int\frac{1}{3x-2}\,dx=\tfrac{1}{3}\ln|3x-2|+C$$

enquanto Derive, Mathematica e Maple retornam a resposta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x-2)$$

A primeira coisa a notar é que o sistema algébrico computacional omite a constante de integração. Em outras palavras, eles produzem uma antiderivada *particular*, não a mais geral. Portanto, quando usarmos uma integração feita por máquina, teremos de adicionar uma constante. Segundo, os símbolos do valor absoluto são omitidos na resposta da máquina. Isso é aceitável se o nosso problema envolve apenas os valores de x maiores que $\frac{2}{3}$. Mas se estivermos interessados em outros valores de x, então teremos de inserir o símbolo do valor absoluto.

No próximo exemplo reconsideramos a integral do Exemplo 4, mas, dessa vez, perguntamos a uma máquina a resposta.

EXEMPLO 5 Use um sistema algébrico computacional para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple responde com

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x)$$

Isso parece diferente da resposta que encontramos no Exemplo 4, mas é equivalente, porque o terceiro termo pode ser reescrito utilizando-se a identidade

□ Esta é a Equação 3.9.3.

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) &= \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + x)^2 + 1}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + x + \sqrt{(1 + x)^2 + 3}\right)\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\end{aligned}$$

O termo extra resultante $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ pode ser absorvido na constante de integração.

O Mathematica dá a resposta

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right)$$

O Mathematica combinou os dois primeiros termos do Exemplo 4 (e o resultado do Maple) em um único termo por fatoração.

O Derive dá a resposta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1\right)$$

O primeiro termo é igual ao primeiro termo da resposta do Mathematica e o segundo termo é idêntico ao último termo no Exemplo 4.

EXEMPLO 6 Use um CAS para avaliar $\int x(x^2 + 5)^8\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple e o Mathematica dão a mesma resposta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1.750}{3}x^{12} + 4.375x^{10} + 21.875x^8 + \tfrac{218.750}{3}x^6 + 156.250x^4 + \tfrac{390.625}{2}x^2$$

Está claro que ambos os sistemas devem ter expandido $(x^2 + 5)^8$ pelo Teorema Binomial e então integrado cada termo.

Se em vez disso integrarmos manualmente, usando a substituição $u = x^2 + 5$, obteremos

:: O Derive e o TI-89/92 também dão essa resposta.

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para a maioria dos propósitos, essa é uma forma mais conveniente de resposta.

EXEMPLO 7 :: Use um CAS para encontrar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2 na Seção 7.2, encontramos que

$$\boxed{1} \qquad \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

O Derive e o Maple dão a resposta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x\cos^3 x - \tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

ao passo que o Mathematica responde

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

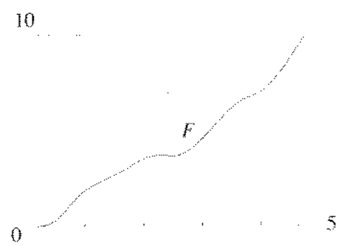


FIGURA 1

Suspeitamos que existem identidades trigonométricas que mostram que essas três respostas são equivalentes. De fato, se pedirmos para o Derive, o Maple e o Mathematica simplificarem suas expressões usando as identidades trigonométricas, eles finalmente produzirão a mesma forma da resposta, como na Equação 1.

EXEMPLO 8 :: Se $f(x) = x + 60\operatorname{sen}^4 x\cos^5 x$, encontre uma antiderivada F de f tal qu $F(0) = 0$. Desenhe F para $0 \leqslant x \leqslant 5$. Onde F tem valores extremos e pontos de inflexão

SOLUÇÃO A antiderivada de f produzida por Maple é

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{20}{3}\operatorname{sen}^3 x\cos^6 x - \tfrac{20}{7}\operatorname{sen} x\cos^6 x + \tfrac{4}{7}\cos^4 x\operatorname{sen} x + \tfrac{16}{21}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \tfrac{32}{21}\operatorname{sen} x$$

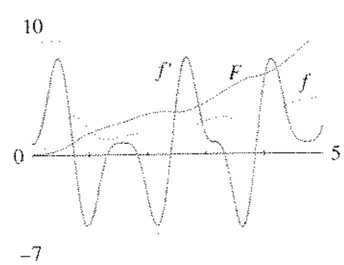


FIGURA 2

e notamos que $F(0) = 0$. Essa expressão provavelmente pode ser simplificada, mas isso não é necessário, pois um sistema algébrico computacional pode plotar essa versão de F tão facilmente como qualquer outra versão. Um gráfico de F é mostrado na Figura 1. Para localizar os valores extremos de F, desenhamos o gráfico de sua derivada $F' = f$ n Figura 2 e observamos que F tem um máximo local quando $x \approx 2{,}3$ e um mínimo local quando $x \approx 2{,}5$. O gráfico de $F'' = f'$ na Figura 2 mostra que F tem pontos de inflexão quando $x \approx 0{,}7$; $1{,}3$; $1{,}8$; $2{,}4$; $3{,}3$; e $3{,}9$.

7.6 Exercícios

1–4 :: Use a entrada indicada da Tabela de Integrais no fim do livro para avaliar a integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{x^2}\,dx$; entrada 33

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{3 - 2x}}\,dx$; entrada 55

3. $\displaystyle\int \sec^3(\pi x)\,dx$; entrada 71

4. $\displaystyle\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$; entrada 98

5–30 :: Utilize a Tabela de Integrais no fim do livro para avaliar a integral.

5. $\displaystyle\int_0^1 2x\cos^{-1} x\,dx$

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\,dx$

7. $\int e^{-3x}\cos 4x\,dx$

8. $\int \operatorname{cossec}^3(x/2)\,dx$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+9}}$

10. $\int \dfrac{\sqrt{2y^2-3}}{y^2}\,dy$

11. $\int_{-1}^{0} t^2 e^{-t}\,dt$

12. $\int_0^{\pi} x^2\cos 3x\,dx$

13. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3(1/z)}{z^2}\,dz$

14. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$

15. $\int e^x \operatorname{sech}(e^x)\,dx$

16. $\int x\operatorname{sen}(x^2)\cos(3x^2)\,dx$

17. $\int y\sqrt{6+4y-4y^2}\,dy$

18. $\int \dfrac{x^5}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$

19. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

20. $\int \dfrac{dx}{e^x(1+2e^x)}$

21. $\int \dfrac{e^x}{3-e^{2x}}\,dx$

22. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2-x^4}\,dx$

23. $\int \sec^5 x\,dx$

24. $\int \operatorname{sen}^6 2x\,dx$

25. $\int \dfrac{\sqrt{4+(\ln x)^2}}{x}\,dx$

26. $\int_0^1 x^4 e^{-x}\,dx$

27. $\int \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

28. $\int e^t\operatorname{sen}(\alpha t-3)\,dt$

29. $\int \dfrac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$

30. $\int \dfrac{\sec^2\theta\operatorname{tg}^2\theta}{\sqrt{9-\operatorname{tg}^2\theta}}\,d\theta$

31. Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = x\sqrt{4-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ é girada ao redor do eixo y.

32. A região sob a curva $y = \operatorname{tg}^2 x$ de 0 a $\pi/4$ é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

33. Verifique a Fórmula 53 na Tabela de Integrais (a) por diferenciação e (b) pela substituição $t = a + bu$.

34. Verifique a Fórmula 31 (a) por diferenciação e (b) pela substituição $u = a\operatorname{sen}\theta$.

35–42 Use um sistema algébrico computacional para avaliar a integral. Compare a resposta com o resultado usando as tabelas. Se as respostas forem diferentes, mostre que elas são equivalentes.

35. $\int x^2\sqrt{5-x^2}\,dx$

36. $\int x^2(1+x^3)^4\,dx$

37. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$

38. $\int \operatorname{tg}^2 x\sec^4 x\,dx$

39. $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$

40. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

41. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$

42. $\int x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$

43. Os sistemas algébricos computacionais algumas vezes precisam de uma mão dos seres humanos. Peça a seu CAS para avaliar

$$\int 2^x\sqrt{4^x-1}\,dx$$

Se ele não responder, peça para tentar

$$\int 2^x\sqrt{2^{2x}-1}\,dx$$

Você acha que ele teve sucesso com essa forma de integrando?

44. Tente avaliar

$$\int (1+\ln x)\sqrt{1+(x\ln x)^2}\,dx$$

com um sistema algébrico computacional. Se ele não retornar uma resposta, faça uma substituição que mude a integral para uma daquelas que o CAS *pode* avaliar.

45–48 Use um CAS para encontrar uma antiderivada F de f tal que $F(0) = 0$. Desenhe f e F e localize aproximadamente as coordenadas x dos pontos extremos e de inflexão de F.

45. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$

46. $f(x) = xe^{-x}\operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

47. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x\cos^6 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

48. $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^6+1}$

Projeto Descoberta

Padrões em Integrais

Neste projeto um sistema algébrico computacional é usado para investigar as integrais indefinidas de famílias de funções. Observando os padrões que ocorrem nas integrais de vários membros da família, primeiro você vai sugerir e, então, provar uma fórmula geral para qualquer membro da família.

1. (a) Use um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$$

se $a \neq b$. O que acontece se $a = b$?

(c) Verifique sua estimativa pedindo para seu CAS avaliar a integral na parte (b). Então prove-a usando as frações parciais.

2. (a) Utilize um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos 2x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x\,dx$

(b)) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx$$

(c) Verifique sua sugestão com um CAS. Então prove-a usando as técnicas da Seção 7.2. Para quais valores de a e b isso é válido?

3. (a) Use um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ (iii) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$

(iv) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$ (v) $\displaystyle\int x^7\ln x\,dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de

$$\int x^n \ln x\,dx$$

(c) Utilize integração por partes para provar a conjectura que você fez na parte (b). Para quais valores de n isso é válido?

4. (a) Use um sistema algébrico computacional para avaliar as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ (iii) $\displaystyle\int x^3e^x\,dx$

(iv) $\displaystyle\int x^4e^x\,dx$ (v) $\displaystyle\int x^5e^x\,dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de $\int x^6e^x\,dx$. Então use seu CAS para verificar sua sugestão.

(c) Baseado nos padrões das partes (a) e (b), faça uma conjectura sobre o valor da integral

$$\int x^n e^x\,dx$$

quando n é um inteiro positivo.

(d) Use a indução matemática para provar a conjectura que você fez na parte (c).

7.7 Integração Aproximada

Existem duas situações nas quais é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.

A primeira situação surge do fato de que para avaliar $\int_a^b f(x)\,dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo precisamos conhecer uma antiderivada de f. Algumas vezes, contudo, é difícil, ou até impossível, encontrar uma antiderivada (veja a Seção 7.5). Por exemplo, é impossível avaliar as seguintes integrais exatamente:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$$

A segunda situação surge quando a função é determinada por um experimento científico por meio de leituras de instrumentos ou dados coletados. Pode não haver fórmula para a função (veja o Exemplo 5).

Em ambos os casos precisamos encontrar valores aproximados para as integrais definidas. Já conhecemos um método desse tipo. Lembre-se de que a integral definida é estabelecida como o limite das somas de Riemann; assim, qualquer soma de Riemann pode ser usada como uma aproximação para a integral: se dividirmos $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$, então temos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

onde x_i^* é um ponto qualquer no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se x_i^* é escolhido como o extremo esquerdo do intervalo, então $x_i^* = x_{i-1}$ e temos

1 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então a integral representa uma área e (1), uma aproximação dessa área pelos retângulos mostrados na Figura 1(a). Se escolhermos x_i^* como o extremo direito, então $x_i^* = x_i$ e temos

2 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[Veja a Figura 1(b).] As aproximações L_n e R_n definidas pelas Equações 1 e 2 são chamadas **aproximação por extremo esquerdo** e **aproximação por extremo direito**, respectivamente.

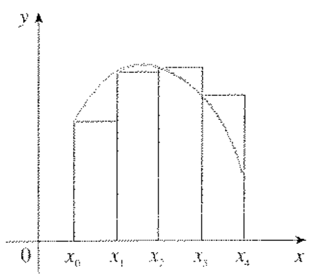
Na Seção 5.2 também consideramos o caso onde x_i^* é escolhido para ser o ponto médio $\bar{x}_i$ do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A Figura 1(c) mostra a aproximação do ponto médio M_n, que parece ser melhor que L_n ou R_n.

Regra do Ponto Médio

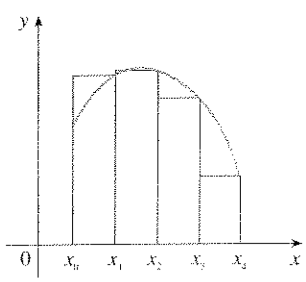
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

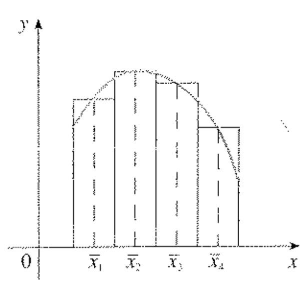
e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i]$$



(a) Aproximação por extremo esquerdo



(b) Aproximação por extremo direito



(c) Aproximação por ponto médio

FIGURA 1

Outra aproximação, denominada Regra do Trapézio, resulta da média das aproximações nas Equações 1 e 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

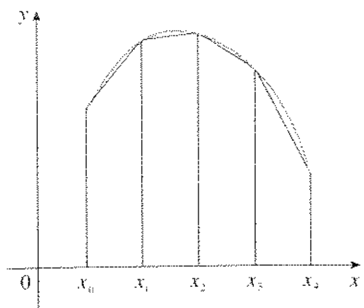


FIGURA 2
Aproximação por trapézios

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

A razão para o nome Regra do Trapézio pode ser vista na Figura 2, que ilustra o caso $f(x) \geqslant 0$. A área do trapézio que está acima do i-ésimo subintervalo é

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

e se adicionarmos as áreas de todos os trapézios teremos o lado direito da Regra do Trapézio.

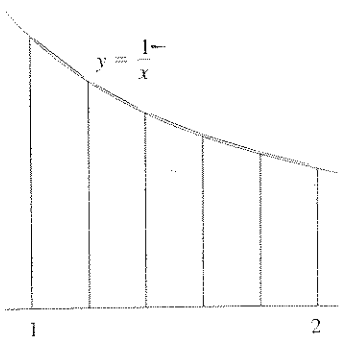


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Use (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar a integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO

(a) Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$, e então a Regra do Trapézio dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)\right]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Essa aproximação é ilustrada na Figura 3.

(b) Os pontos médios dos cinco subintervalos são 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; e 1,9; assim, a Regra do Ponto Médio dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\left[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908$$

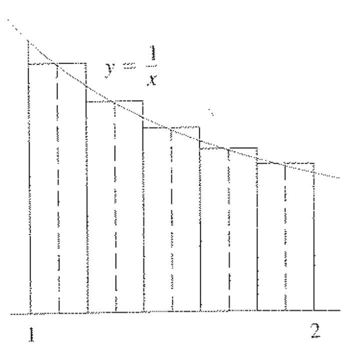


FIGURA 4

Essa aproximação é ilustrada na Figura 4.

No Exemplo 1 escolhemos deliberadamente uma integral cujo valor pode ser computado explicitamente de maneira que possamos ver quão acuradas são as Regras do Trapézio e do Ponto Médio. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147\ldots$$

O **erro** no uso de uma aproximação é definido como a quantidade que precisa ser adicionada à aproximação para torná-la exata. Pelos valores do Exemplo 1 vemos que os erros nas aproximações pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio para $n = 5$ são

$$E_T \approx -0{,}002488 \qquad \text{e} \qquad E_M \approx 0{,}001239$$

Em geral, temos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{e} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

As tabelas que se seguem mostram os resultados de cálculos similares àqueles no Exemplo 1, mas para $n = 5, 10$ e 20 e para as aproximações por extremos esquerdos e direitos, assim como as Regras do Trapézio e do Ponto Médio.

n	[illegible]	R_n	T_n	M_n
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Erros correspondentes

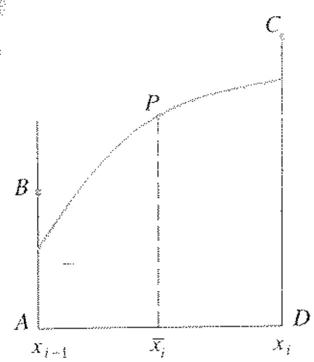
n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0,052488	0,047512	−0,002488	0,001239
10	−0,025624	0,024376	−0,000624	0,000312
20	−0,012656	0,012344	−0,000156	0,000078

Podemos fazer várias observações a partir dessas tabelas:

1. Em todos os métodos obtemos as aproximações mais precisas quando aumentamos o valor de n. (Mas valores muito grandes de n resultam em tantas operações aritméticas que temos de tomar cuidado com os erros de arredondamento acumulados.)
2. Os erros nas aproximações por extremos esquerdos e direitos têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 2 quando dobramos o valor de n.
3. As Regras do Trapézio e do Ponto Médio são muito mais precisas que as aproximações por extremos.
4. Os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 4 quando dobramos o valor de n.
5. O tamanho do erro na Regra do Ponto Médio é cerca de metade do tamanho do erro na Regra do Trapézio.

Essas observações são verdadeiras na maioria dos casos.

A Figura 5 mostra por que geralmente podemos esperar maior precisão na Regra do Ponto Médio do que na Regra do Trapézio. A área de um retângulo típico na Regra do Ponto Médio é a mesma que a do trapézio $ABCD$ cujo lado superior é a tangente ao gráfico de P. A área desse trapézio é mais próxima à área sob o gráfico que a área do trapézio $AQRD$ usado na



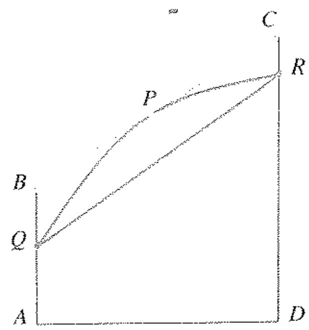


FIGURA 5

Regra do Trapézio. (O erro do ponto médio, área sombreada em cinza é menor que o erro do trapézio, área sombreada em azul.)

Essas observações são corroboradas nas seguintes estimativas de erros, que são provadas em livros de análise numérica. Note que a Observação 4 corresponde a n^2 em cada denominador, porque $(2n)^2 = 4n^2$. O fato de que as estimativas dependem do tamanho da derivada segunda não surpreende se você olhar a Figura 5, pois $f''(x)$ mede quanto o gráfico está curvado. [Lembre-se de que $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $y = f(x)$ muda.]

3 Estimativas de Erro Suponha $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se E_T e E_M são os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio, então

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{e} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Vamos aplicar essa estimativa de erro na aproximação pela Regra do Trapézio no Exemplo 1. Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$. Como $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, assim

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$ na estimativa de erro (3), vemos que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

Comparando essa estimativa de erro de 0,006667 com o erro real de 0,002488 vemos que pode acontecer de o erro real ser substancialmente menor que a estimativa de erro dada por (3).

□ K pode ser qualquer número maior que todos os valores de $|f''(x)|$, mas menores valores para K dão melhores limites para o erro.

EXEMPLO 2 □ Quão grande devemos tomar n para garantir que as aproximações de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio tenham precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Vimos no cálculo precedente que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$; assim, podemos tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ em (3). A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto escolhemos n de maneira que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001$$

Resolvendo a desigualdade para n, temos

$$n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

ou

$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

Então, $n = 41$ garantirá a precisão desejada.

□ É bem possível que um valor de n mais baixo seja suficiente, mas 41 é o menor valor para o qual a fórmula de estimativa de erro pode nos *garantir* a precisão de 0,0001.

Para a mesma precisão com a Regra do Ponto Médio escolhemos n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0{,}0001$$

o que resulta
$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0012}} \approx 29$$

EXEMPLO 2

(a) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

(b) Dê um limite superior para o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Como $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$, a Regra do Ponto Médio dá

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \Delta x\,[f(0{,}05) + f(0{,}15) + \cdots + f(0{,}85) + f(0{,}95)]\\ &= 0{,}1[e^{0{,}0025} + e^{0{,}0225} + e^{0{,}0625} + e^{0{,}1225} + e^{0{,}2025} + e^{0{,}3025}\\ &\qquad + e^{0{,}4225} + e^{0{,}5625} + e^{0{,}7225} + e^{0{,}9025}]\\ &\approx 1{,}460393\end{aligned}$$

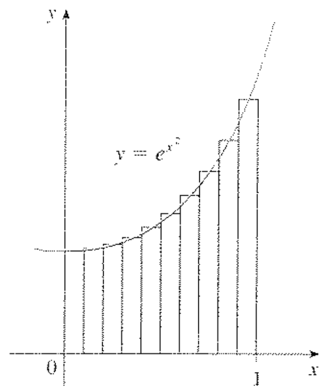


FIGURA 6

Estimativas de erro são limitantes superiores para o erro. Estas dão, teoricamente, os piores cenários. O erro real, nesse caso, é de cerca de 0,0023.

A Figura 6 ilustra essa aproximação.

(b) Como $f(x) = e^{x^2}$, temos $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. Também, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos $x^2 \leqslant 1$ e assim

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ na estimativa de erro (3), vemos que um limite superior para o erro é

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0{,}007$$

Regra de Simpson

Outra regra para aproximar os resultados de integração consiste no uso de parábolas em vez de segmentos de reta para aproximar uma curva. Como anteriormente, dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de iguais comprimentos, $h = \Delta x = (b - a)/n$, mas dessa vez assumimos que n é um número *par*. Então, em cada par consecutivo de intervalos aproximamos a curva $y = f(x) \geqslant 0$ por uma parábola, como mostrado na Figura 7. Se $y_i = f(x_i)$, então $P_i(x_i, y_i)$ é o ponto da curva acima de x_i. Uma parábola típica passa por três pontos consecutivos P_i, P_{i+1} e P_{i+2}.

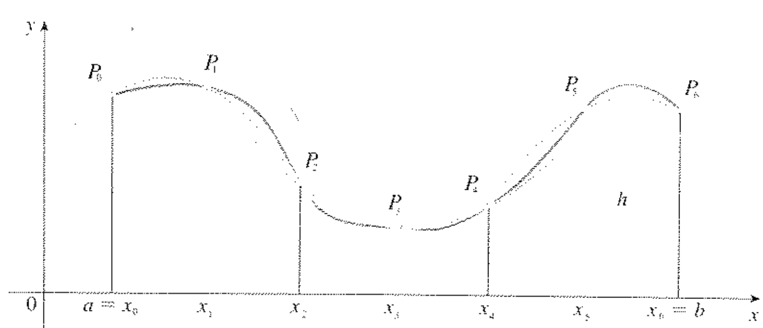


FIGURA 7

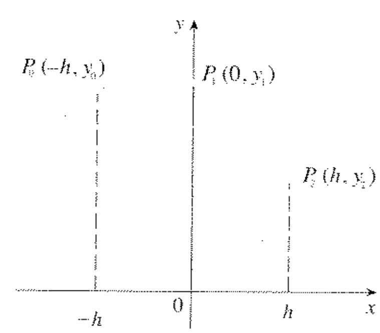


FIGURA 8

Aqui usamos o Teorema 5.5.7. Note que $Ax^2 + C$ é par e Bx é ímpar.

Para simplificar os nossos cálculos, primeiro consideramos o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, e $x_2 = h$. (Veja a Figura 8.) Sabemos que a equação da parábola que passa por P_0, P_1 e P_2 tem a forma $y = Ax^2 + Bx + C$, e assim a área sob a parábola de $x = -h$ até $x = h$ é

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

Mas, como a parábola passa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ e $P_2(h, y_2)$, temos

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

e, portanto, $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Por isso podemos reescrever a área sob a parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Agora, movendo essa parábola horizontalmente, não mudamos a área sob ela. Isso significa que a área sob a parábola através de P_0, P_1 e P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ na Figura 7 ainda é

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Similarmente, a área sob a parábola através de P_2, P_3 e P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ é

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Se calcularmos as áreas sob todas as parábolas dessa forma e adicionarmos os resultados, obteremos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

Embora tenhamos derivado essa aproximação para o caso no qual $f(x) \geqslant 0$, essa é uma aproximação razoável para qualquer função contínua f e é chamada Regra de Simpson, por causa do matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761). Note o padrão dos coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1.

Thomas Simpson era um tapeceiro que aprendeu sozinho matemática e tornou-se um dos melhores matemáticos ingleses do século XVIII. O que chamamos Regra de Simpson já era conhecido por Cavalieri e Gregory no século XVII, mas Simpson popularizou-a em seu livro de cálculo, muito vendido, chamado *A New Treatise of Fluxions*.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde n é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

EXEMPLO 4 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO Colocando $f(x) = 1/x$, $n = 10$ e $\Delta x = 0{,}1$ na Regra de Simpson, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10}$$

$$= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{4}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{4}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\approx 0{,}693150$$

Note que, no Exemplo 4, a Regra de Simpson nos dá uma aproximação *muito* melhor ($S_{10} \approx 0{,}693150$) para o valor verdadeiro da integral ($\ln 2 \approx 0{,}693147\ldots$) do que a aproximação pela Regra do Trapézio ($T_{10} \approx 0{,}693771$) ou pela Regra do Ponto Médio ($M_{10} \approx 0{,}692835$). As aproximações pela Regra de Simpson são médias ponderadas das aproximações pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio (veja o Exercício 48):

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Lembre-se de que E_T e E_M geralmente têm sinais opostos, e $|E_M|$ é de cerca de metade de $|E_T|$.)

Em muitas aplicações de cálculo precisamos avaliar uma integral mesmo quando nenhuma fórmula explícita é conhecida para y como função de x. Uma função pode ser dada graficamente ou como uma tabela de dados coletados. Se existe evidência de que os valores não estão mudando rapidamente, então a Regra do Trapézio ou de Simpson pode ainda ser usada para calcular um valor aproximado para $\int_a^b y\,dx$, a integral de y em relação a x.

EXEMPLO 5 A Figura 9 mostra o tráfego de dados através de uma linha direta conectando os Estados Unidos à SWITCH, a Rede Acadêmica e de pesquisa da Suíça, no dia 10 de fevereiro de 1998. $D(t)$ fornece os dados em processamento, medidos em megabits por segundo (Mb/s). Use a Regra de Simpson para dar uma estimativa da quantidade total de dados transmitidos através dessa linha até às 12 horas daquele dia.

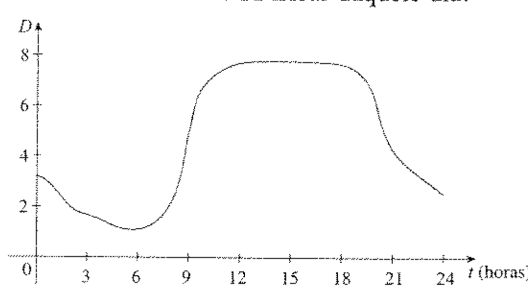


FIGURA 9

SOLUÇÃO Como queremos consistência entre as unidades e $D(t)$ é medido em megabits por segundo, as unidades para t serão transformadas de horas para segundos. Chamando $A(t)$ a quantidade de dados (em megabits) transmitidas no tempo t, onde t é medido em segundos, então $A'(t) = D(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total (veja a Seção 5.4), a quantidade total de dados transmitidos até as 12 horas (quando $12 \times 60^2 = 43.200$) é

$$A(43.200) = \int_0^{43.200} D(t)\,dt$$

A partir do gráfico, fizemos as estimativas para os valores de $D(t)$, com intervalos de hora em hora, e os compilamos na tabela a seguir.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	[illegible]	3.2	[illegible]	[illegible]	1.3
1	3.600	2.7	8	28.800	2.8
2	7.200	1.9	9	32.400	5.7
3	10.800	1.7	10	36.000	7.1
4	14.400	1.3	11	39.600	7.7
5	18.000	1.0	12	43.200	7.9
6	21.600	1.1			

Então usamos a Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3.600$ para estimar a integral:

$$\int_0^{43.200} A(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3.600) + 2D(7.200) + \ldots + 4D(39.600) + D(43.200)]$$

$$\approx \frac{3.600}{3}[3{,}2 + 4(2{,}7) + 2(1{,}9) + 4(1{,}7) + 2(1{,}3) + 4(1{,}0)$$

$$+ 2(1{,}1) + 4(1{,}3) + 2(2{,}8) + 4(5{,}7) + 2(7{,}1) + 4(7{,}7) + 7{,}9]$$

$$= 143.880$$

Assim, a quantidade total de dados transmitidos até o meio dia é aproximadamente 144.000 Mb ou equivalentemente 144 gigabits.

Nos Exercícios 27 e 28 pedimos para você demonstrar, em casos particulares, que o erro na Regra de Simpson diminui por um fator de cerca de 16 quando n é duplicado. Isso é consistente com o aparecimento de n^4 no denominador da seguinte estimativa de erro para a Regra de Simpson. Ela é similar às estimativas dadas em (3) para as Regras do Trapézio e do Ponto Médio, mas usa a quarta derivada de f.

4 Estimativa de Erro para a Regra de Simpson Suponha que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se E_S é o erro envolvido no uso da Regra de Simpson, então

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Muitas calculadoras e sistemas algébricos computacionais têm um algoritmo embutido que calcula uma aproximação de uma integral definida. Algumas dessas máquinas usam a Regra de Simpson; outras utilizam as técnicas mais sofisticadas, como a integração numérica *adaptante*. Isso significa que se uma função flutua muito mais em uma certa parte do intervalo do que em outro lugar, então essa parte é dividida em mais subintervalos. Essa estratégia reduz o número de cálculos necessários para alcançar a precisão prefixada desejada.

EXEMPLO 6 Qual o tamanho de n que devemos tomar para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ tenha uma precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Se $f(x) = 1/x$, então $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Como $x \geqslant 1$, temos $1/x \leqslant 1$ e assim

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Portanto, podemos tomar $K = 24$ em (4). Por isso, para um erro menor que 0,0001 devemos escolher n de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0{,}0001$$

Isso dá
$$n^4 > \frac{24}{180(0{,}0001)}$$

ou
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}00075}} \approx 6{,}04$$

Portanto, $n = 8$ (n deve ser par) dá a precisão desejada. (Compare esse resultado com o Exemplo 2, onde obtivemos $n = 41$ para a Regra do Trapézio e $n = 29$ para a Regra do Ponto Médio.)

(a) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime o erro envolvido nessa aproximação.

□ A Figura 10 ilustra os cálculos no Exemplo 7. Note que os arcos de parábola estão tão próximos do gráfico de $y = e^{x^2}$ que eles são praticamente indistinguíveis do gráfico.

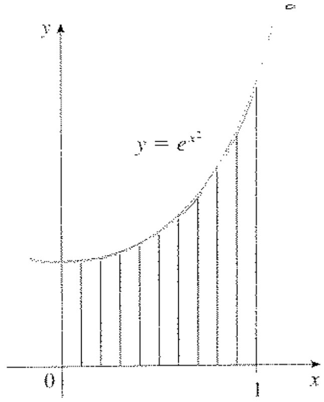


FIGURA 10

SOLUÇÃO
(a) Se $n = 10$, então $\Delta x = 0{,}1$ e a Regra de Simpson dá

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + \cdots + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\,[e^0 + 4e^{0{,}01} + 2e^{0{,}04} + 4e^{0{,}09} + 2e^{0{,}16} + 4e^{0{,}25} + 2e^{0{,}36} + 4e^{0{,}49} + 2e^{0{,}64} + 4e^{0{,}81} + e^1]$$

$$\approx 1{,}462681$$

(b) A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ em (4) vemos que o erro é no máximo

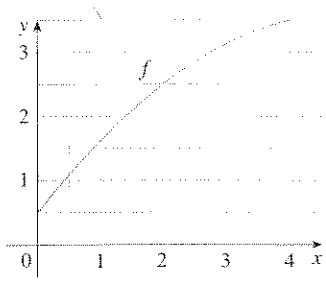
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000115$$

(Compare esse resultado com o Exemplo 3.) Por isso, com precisão em três casas decimais temos

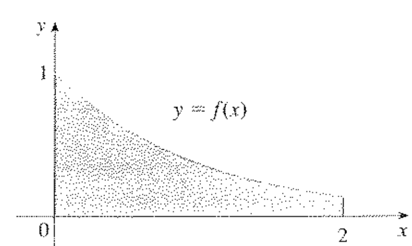
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1{,}463$$

7.7 Exercícios

1. Seja $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado.
   (a) Use o gráfico para encontrar L_2, R_2 e M_2.
   (b) Estas são as estimativas por baixo ou por cima de I?
   (c) Use o gráfico para achar T_2. Como isso se compara com I?
   (d) Para qualquer valor de n, liste os números L_n, R_n, M_n, T_n e I na ordem crescente.



2. As aproximações pelo extremo esquerdo, extremo direito, Trapézio e Ponto Médio foram usadas para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, onde f é uma função cujo gráfico é mostrado. As estimativas foram 0,7811, 0,8675, 0,8632 e 0,9540 e o mesmo número de subintervalos foi usado em cada caso.
   (a) Qual regra produz qual estimativa?
   (b) Entre quais aproximações está o valor verdadeiro de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ usando (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio, cada qual com $n = 4$. A partir de um gráfico do integrando, decida se suas estimativas são subestimadas ou superestimadas. O que você pode concluir sobre o valor verdadeiro da integral?

4. Desenhe o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x^2/2)$ na janela retangular $[0, 1]$ por $[0, 0{,}5]$ e seja $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Use o gráfico para decidir se L_2, R_2, M_2 e T_2 subestimam ou superestimam I.
(b) Para qualquer valor de n, liste os números L_n, R_n e M_n, T_n e I na ordem crescente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 e T_5. A partir do gráfico, qual você acha que dá a melhor estimativa de I?

5–6 Use (a) a Regra do Ponto Médio e (b) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor de n especificado. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais.) Compare seu resultado com o valor real para determinar o erro em cada aproximação.

5. $\int_0^\pi x^2 \,\text{sen}\, x\, dx, \quad n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\, dx, \quad n = 6$

7–18 Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor especificado de n. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais.)

7. $\int_0^2 \sqrt[4]{1+x^2}\,dx, \ n = 8$

8. $\int_0^{1/2} \text{sen}(x^2)\,dx, \ n = 4$

9. $\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x}\,dx, \ n = 10$

10. $\int_0^3 \frac{dt}{1+t^2+t^4}, \ n = 6$

11. $\int_0^{1/2} \text{sen}(e^{t/2})\,dt, \ n = 8$

12. $\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx, \ n = 8$

13. $\int_1^2 e^{1/x}\,dx, \ n = 4$

14. $\int_0^4 \sqrt{x}\,\text{sen}\, x\,dx, \ n = 8$

15. $\int_1^5 \frac{\cos x}{x}\,dx, \ n = 8$

16. $\int_4^6 \ln(x^3+2)\,dx, \ n = 10$

17. $\int_0^3 \frac{1}{1+y^5}\,dy, \quad n = 6$

18. $\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx, \quad n = 10$

19. (a) Calcule as aproximações T_{10} e M_{10} para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$.
(b) Estime os erros nas aproximações na parte (a).
(c) Qual o tamanho de n que devemos escolher para que as aproximações T_n e M_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,00001?

20. (a) Ache as aproximações T_8 e M_8 para $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
(b) Estime os erros envolvidos nas aproximações da parte (a).
(c) Qual o tamanho de n que devemos escolher de modo que as aproximações T_n e M_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,00001?

21. (a) Calcule as aproximações T_{10} e S_{10} para $\int_0^1 e^x\,dx$ e os erros correspondentes E_T e E_S.
(b) Compare os erros reais na parte (a) com as estimativas de erro dadas por (3) e (4).
(c) Qual o tamanho de n que devemos escolher para que as aproximações T_n, M_n e S_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,00001?

22. Quão grande deve ser n para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson de $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tenha uma precisão de 0,00001

23. O problema com as estimativas de erro é que freqüentemente muito difícil calcular as quatro derivadas e obter um bom limi tante superior K para $|f^{(4)}(x)|$ manualmente. Mas os sistemas algébricos computacionais não têm problemas para calcular $f^{(4)}$ e desenhá-la; assim podemos facilmente encontrar um valor de K a partir de um gráfico de uma máquina. Este exerc cio trabalha com aproximações para a integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x) = e^{\cos x}$.
(a) Use um gráfico para obter um bom limitante superior par $|f''(x)|$.
(b) Use M_{10} para aproximar I.
(c) Use a parte (a) para estimar o erro na parte (b).
(d) Use a capacidade de integração numérica de seu CAS par aproximar I.
(e) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (c
(f) Use um gráfico para obter um bom limitante superior par $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Use S_{10} para aproximar I.
(h) Use a parte (f) para estimar o erro na parte (g).
(i) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (h)
(j) Qual o tamanho de n necessário para garantir que o tamanho do erro usando S_n seja menor que 0,0001?

24. Repita o Exercício 23 para a integral $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^3}\,dx$.

25–26 Calcule as aproximações L_n, R_n, T_n e M_n para $n = 4$, 8 e 16. Então calcule os erros correspondentes E_L, E_R, E_T e E_M. (Arredonde seus resultados para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema algébrico computacional.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontec aos erros quando n é dobrado?

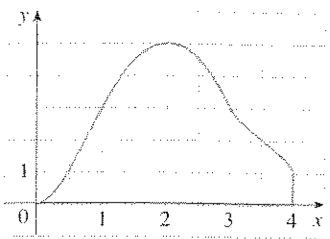
25. $\int_0^1 x^3\,dx$

26. $\int_0^2 e^x\,dx$

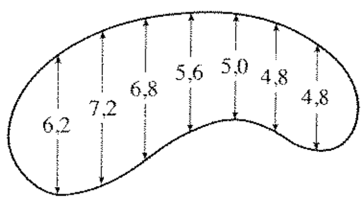
27–28 Ache as aproximações T_n, M_n e S_n para $n = 6$ e 12. Então calcule os erros correspondentes E_T, E_M e E_S. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema algébrico computacional.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontece quand n é dobrado?

27. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$ **28.** $\int_{-1}^2 xe^x\, dx$

29. Estime a área sob o gráfico na figura usando (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson, cada qual com $n = 4$.



30. Os comprimentos (em metros) de uma piscina com o formato de um rim são medidos a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra de Simpson para estimar a área da piscina.



31. (a) Use a Regra do Trapézio e os dados a seguir para estimar o valor da integral $\int_4^{3,2} f(x)\, dx$.

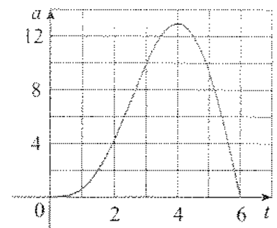
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	6.8	2.0	7.6
0.4	6.5	2.4	8.4
0.8	6.3	2.8	8.8
1.2	6.4	3.2	9.0
[illegible]	[illegible]		

(b) Se sabemos que $-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1$ para todo x, estime o erro envolvido na aproximação da parte (a).

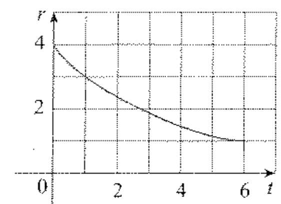
32. Um radar foi usado para medir a velocidade de um corredor durante os primeiros 5 segundos de uma corrida (veja a tabela). Use a Regra de Simpson para estimar a distância que o corredor cobriu durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

33. O gráfico da aceleração $a(t)$ de um carro, medida em pés/s^2, é mostrado. Use a Regra de Simpson para estimar o aumento da velocidade do carro durante o intervalo de 6 segundos.



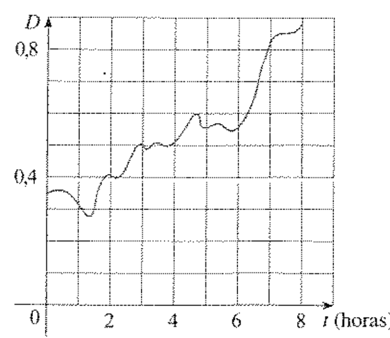
34. A água vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora, onde o gráfico de r é como mostrado. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de água que vazou durante as primeiras seis horas.



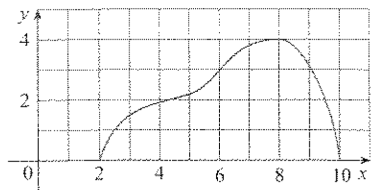
35. A tabela (fornecida pela San Diego Gas and Electric) dá a demanda de potência em megawatts no Distrito de São Francisco da meia-noite até às 6 horas da manhã em 8 de dezembro de 1999. Use a Regra de Simpson para estimar a energia usada durante aquele período. (Utilize o fato de que a potência é a derivada da energia.)

t	P	t	P
0:00	1.814	3:30	1.611
0:30	1.735	4:00	1.621
1:00	1.686	4:30	1.666
1:30	1.646	5:00	1.745
2:00	1.637	5:30	1.886
2:30	1.609	6:00	2.052
3:00	1.604		

36. O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na Internet entre meia-noite e às 8 horas da manhã. D denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.



37. Se a região mostrada na figura a seguir é girada ao redor do eixo y formando um sólido, use a Regra de Simpson, com $n = 8$, para estimar o volume do sólido.



38. A tabela mostra os valores de uma função força $f(x)$ onde x é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra de Simpson para estimar o trabalho realizado por essa força para mover um objeto a uma distância de 18 m.

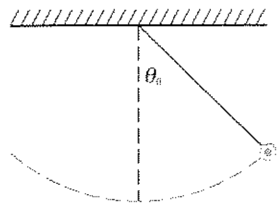
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9,8	9,1	8,5	8,0	7,7	7,5	7,4

39. A região limitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ é girada ao redor do eixo x. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o volume do sólido resultante.

40. A figura mostra um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo θ_0 com a vertical. Usando a Segunda Lei de Newton pode ser mostrado que o período T (o tempo para um ciclo completo) é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

onde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e g é a aceleração da gravidade. Se $L = 1$m e $\theta_0 = 42°$, use a Regra de Simpson com $n = 10$ para calcular o período.



41. A intensidade de luz com comprimento de onda λ viajando através de uma grade de difração com N aberturas a um ângulo θ é dada por $I(\theta) = N^2 \operatorname{sen}^2 k/k^2$, onde $k = (\pi N d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ e d é a distância entre cada abertura. Um laser de hélio-neônio com comprimento de onda $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ m está emitindo uma banda estreita de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, através de uma grade com 10.000 aberturas separadas por 10^{-4} m. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar a intensidade de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$ emergindo da grade.

42. Use a Regra do Trapézio com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\, dx$. Compare seu resultado com o valor real. Você pode explicar a discrepância?

43. Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a Regra do Trapézio, com $n = 2$, seja mais apropriada que a Regra do Ponto Médio.

44. Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a aproximação pelo ponto final à direita com $n = 2$ seja mais apropriada que a Regra de Simpson.

45. Se f é uma função positiva e $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, mostre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\, dx < M_n$$

46. Mostre que se f é um polinômio de grau três ou menor, então a Regra de Simpson dá o valor exato de $\int_a^b f(x)\, dx$.

47. Mostre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

48. Mostre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

7.8 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ trabalhamos com uma função f definida em um intervalo limitado $[a, b]$ e assumimos que f não tem uma descontinuidade infinita (veja a Seção 5.2). Nesta seção estendemos o conceito de integral definida para o caso onde o intervalo é infinito e também para o caso onde f tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$. Em ambos os casos, a integral é chamada integral *imprópria*. Uma das aplicações mais importantes dessa idéia, a distribuição de probabilidades, será estudada na Seção 8.5.

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Considere a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$. Você poderia pensar que como S tem extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto. A área da parte de S que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreado na Figura 1) é

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

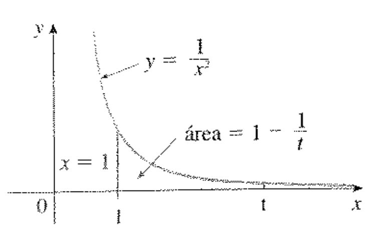


FIGURA 1

Note que $A(t) < 1$ não importando quão grande seja t.

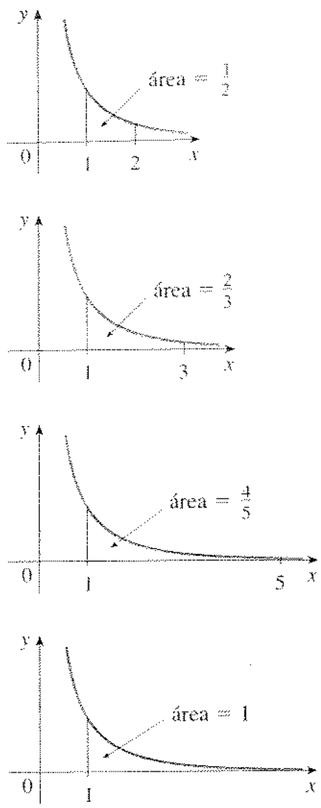


FIGURA 2

Também observamos que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$ (veja a Figura 2); assim, dizemos que a área da região infinita S é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

1 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 1

(a) Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geqslant a$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

(b) Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \leqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem, e **divergentes** se os limites não existem.

(c) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Na parte (c) qualquer número real a pode ser usado (veja o Exercício 74).

Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que f seja uma função positiva. Por exemplo, no caso (a), se $f(x) \geqslant 0$ e a integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então definimos a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ na Figura 3 como sendo

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

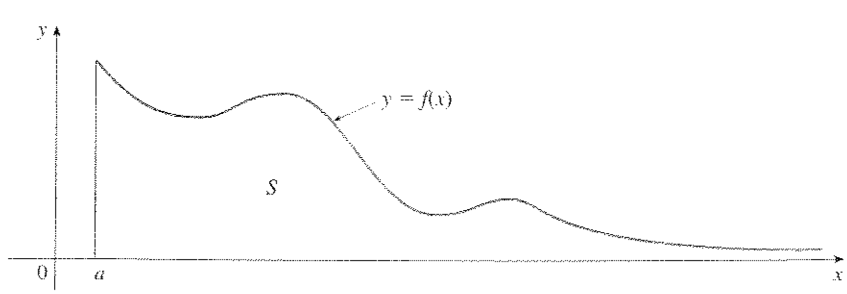


FIGURA 3

Isso é apropriado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é o limite quando $t \to \infty$ da área sob o gráfico de f de a a t.

EXEMPLO 1 Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty$$

O limite não existe como um número e, assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente.

Vamos comparar o resultado do Exemplo 1 com o exemplo dado no início desta seção:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

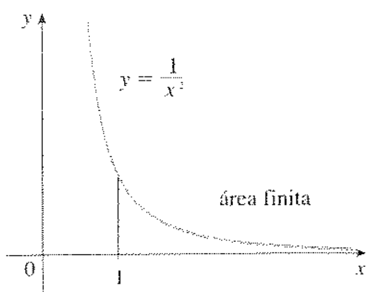


FIGURA 4

Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ pareçam muito similares para $x > 0$, a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ (a região sombreada na Figura 4) tem uma área finita, enquanto a correspondente região sob $y = 1/x$ (na Figura 5) tem uma área infinita. Note que $1/x^2$ e $1/x$ aproximam-se de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ aproxima-se de 0 mais rápido que $1/x$. Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.

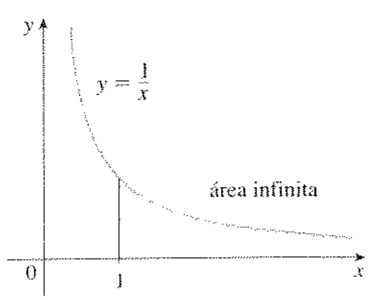


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Avalie $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUÇÃO Usando a parte (b) da Definição 1, temos

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx$$

Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$, e pela Regra de L'Hôspital temos

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

EXEMPLO 3 Avalie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO É conveniente escolher $a = 0$ na Definição 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Precisamos avaliar as integrais no lado direito separadamente:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \to \infty} \operatorname{tg}^{-1}x \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t \to \infty} \operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \to -\infty} \operatorname{tg}^{-1}x \Big]_t^0$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (\operatorname{tg}^{-1}0 - \operatorname{tg}^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

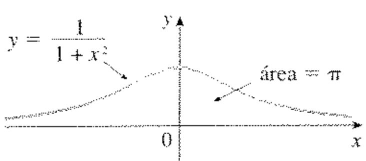


FIGURA 6

Como $1/(1 + x^2) > 0$, a integral imprópria dada pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = 1/(1 + x^2)$ e acima do eixo x (veja a Figura 6).

EXEMPLO 4 Para quais valores de p a integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos do Exemplo 1 que se $p = 1$, a integral é divergente. Vamos então presumir que $p \neq 1$. Então

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$; assim, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $1/t^{p-1} \to 0$. Portanto

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{se} \qquad p > 1$$

e, nesse caso, a integral converge. Mas se $p < 1$, então $p - 1 < 0$ e assim

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{quando } t \to \infty$$

e a integral diverge.

Resumimos o resultado do Exemplo 4 para referência futura:

2 $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ é convergente se } p > 1 \text{ e divergente se } p \leqslant 1.$$

Tipo 2: Integrandos Descontínuos

Suponha que f seja uma função positiva contínua definida no intervalo finito $[a, b)$, mas com a assíntota vertical em b. Seja S a região ilimitada sob o gráfico de f e acima do eixo x entre a e b. (Para as integrais do Tipo 1, a região se estende indefinidamente em uma direção horizontal. Aqui a região é infinita em uma direção vertical.) A área da parte de S entre a e t (a região sombreada na Figura 7) é

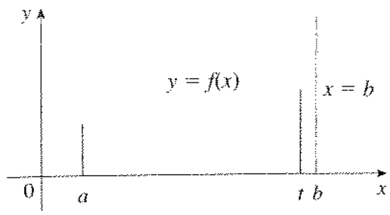


FIGURA 7

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Se acontecer de $A(t)$ aproximar um número definido A quando $t \to b^-$, então dizemos que a área da região S é A e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2 mesmo quando f não é uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que f tenha em b.

As partes (b) e (c) da Definição 3 são mostradas nas Figuras 8 e 9 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e f tem uma assíntota vertical em a e c, respectivamente.

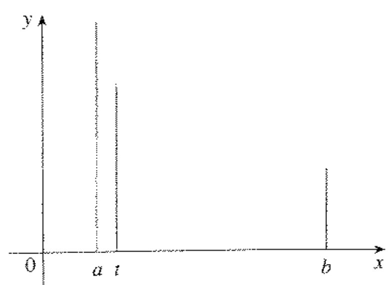


FIGURA 8

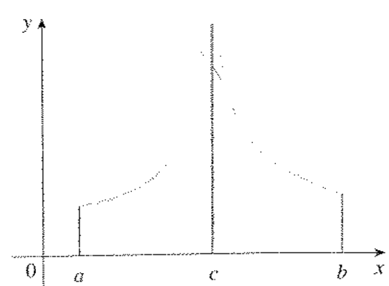


FIGURA 9

3 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 2

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

(c) Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 5 Calcule $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Notamos primeiro que essa integral é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem uma assíntota vertical $x = 2$. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de $[2, 5]$, usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

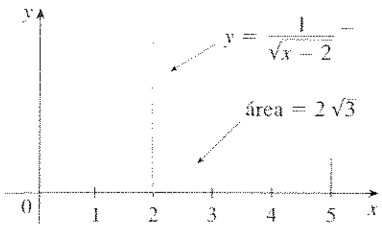


FIGURA 10

Então a integral imprópria dada é convergente, e, como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura 10.

EXEMPLO 6 Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Note que a integral fornecida é imprópria, porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Usando a parte (a) da Definição 3 e a Fórmula 14 da Tabela de Integrais, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\,\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] \\ &= \infty\end{aligned}$$

porque $\sec t \to \infty$ e $\operatorname{tg} t \to \infty$ quando $t \to (\pi/2)^-$. Então, a integral imprópria dada é divergente.

EXEMPLO 7 Avalie $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ se for possível.

SOLUÇÃO Observe que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do integrando. Como essa ocorre no meio do intervalo $[0, 3]$, devemos usar a parte (c) da Definição 3 com $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\,\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right) \\ &= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty\end{aligned}$$

porque $1 - t \to 0^+$ quando $t \to 1^-$. Então, $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente. Isso implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente. [Não precisamos avaliar $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

ATENÇÃO Se não tivéssemos notado a assíntota $x = 1$ no Exemplo 7 e em vez disso tivéssemos confundido essa integral com uma integral ordinária, então poderíamos ter feito erroneamente o seguinte cálculo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Isto é errado, porque a integral é imprópria e deve ser calculada em termos de limite.

De agora em diante quando você se deparar com o símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ deverá decidir olhando a função f no intervalo $[a, b]$, se ela é uma integral definida ordinária ou uma integral imprópria.

EXEMPLO 8 Avalie $\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUÇÃO Sabemos que função $f(x) = \ln x$ tem uma assíntota vertical em 0 porque $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Assim, a integral dada é imprópria e temos

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Agora, usamos a integral por partes com $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ e $v = x$:

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x\,dx &= x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx\\ &= 1\ln 1 - t\ln t - (1 - t)\\ &= -t\ln t - 1 + t\end{aligned}$$

Para calcular o limite do primeiro termo usamos a Regra de L'Hôspital:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} t\ln t &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2}\\ &= \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0\end{aligned}$$

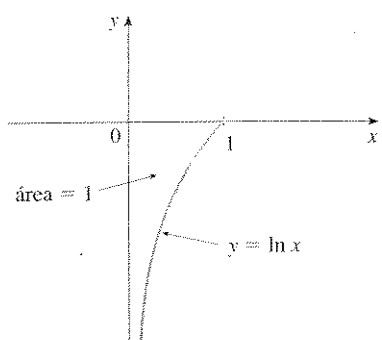


FIGURA 11

Portanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t)\\ &= -0 - 1 + 0 = -1\end{aligned}$$

A Figura 11 mostra a interpretação geométrica desse resultado. A área da região sombreada acima de $y = \ln x$ e abaixo do eixo x é 1.

Um Teste de Comparação para as Integrais Impróprias

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas aind assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Nesses casos, o seguinte teo rema é útil. Apesar de afirmarmos isso para as integrais do Tipo 1, um teorema similar verdadeiro para as integrais do Tipo 2.

Teorema da Comparação Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(b) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

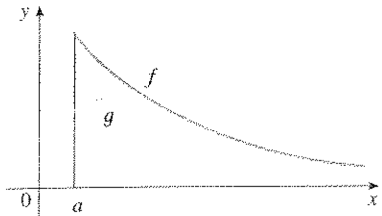


FIGURA 12

Omitimos a prova do Teorema da Comparação, mas a Figura 12 o faz parecer plausível. Se a área sob a curva superior $y = f(x)$ for finita, então a área sob a curva inferior $y = g(x)$ também é finita. E se a área sob $y = g(x)$ for infinita, então a área sob $y = f(x)$ também é infinita. [Note que o inverso não é necessariamente verdadeiro: se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ pode ser ou não convergente, e se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ pode ser ou não divergente.]

EXEMPLO 9 Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

SOLUÇÃO Não podemos avaliar a integral diretamente porque a antiderivada de e^{-x^2} não é uma função elementar (como explicado na Seção 7.5). Escrevemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

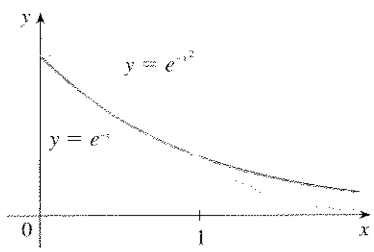


FIGURA 13

e observamos que a primeira integral do lado direito é apenas uma integral definida ordinária. Na segunda integral usamos o fato de que para $x \geqslant 1$ temos $x^2 \geqslant x$, assim $-x^2 \leqslant -x$ e, portanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Veja a Figura 13.) A integral de e^{-x} é avaliada facilmente:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Então, tomando $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ no Teorema da Comparação, vemos que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente. Segue que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente.

TABELA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0,7468241328
2	0,8820813908
3	0,8862073483
4	0,8862269118
5	0,8862269255
6	0,8862269255

No Exemplo 9 mostramos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente sem calcular seu valor. No Exercício 70 indicamos como mostrar que seu valor é aproximadamente 0,8862. Na teoria de probabilidade é importante saber o valor exato dessa integral imprópria, como veremos na Seção 8.5; usando os métodos do cálculo em diversas variáveis pode ser mostrado que o valor exato é $\sqrt{\pi}/2$. A Tabela 1 ilustra a definição de integral imprópria revelando como os valores (gerados por computador) de $\int_0^t e^{-x^2}dx$ aproximam $\sqrt{\pi}/2$ quando t se torna grande. De fato, esses valores convergem bem depressa, porque $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente quando $x \to \infty$.

EXEMPLO 10 A integral $\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por (2) com $p = 1$].

A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10. Note que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

TABELA 2

t	[illegible]
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1.000	7.1271392134
10.000	9.4297243064

7.8 Exercícios

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.

(a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5}\,dx$

2. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

(a) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x-1}\,dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x-1)\,dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e avalie-a para $t = 10$, 100 e 1.000. Então encontre a área total abaixo dessa curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Plote as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares $[0, 10]$ por $[0, 1]$ e $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encontre as áreas sob os gráficos de f e g de $x = 1$ a $x = t$ e avalie para $t = 10, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}$ e 10^{20}.
(c) Calcule a área total sob cada curva $x \geqslant 1$, se ela existir.

5–40 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x-5}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}\,dw$

8. $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$

9. $\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (2-v^4)\,dv$

13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$

14. $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx$

15. $\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

16. $\int_0^\infty \cos^2\alpha\,d\alpha$

17. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

18. $\int_2^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$

19. $\int_0^\infty se^{-5s}\,ds$

20. $\int_{-\infty}^6 re^{r/3}\,dr$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

24. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

25. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

27. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$

30. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\int_0^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y-1}\,dy$

35. $\int_0^\pi \sec x\,dx$

36. $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

37. $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

38. $\int_0^2 \frac{x-3}{2x-3}\,dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41–46 Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant -2, 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2+9)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant x/(x^2+9)\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\}$

47. (a) Se $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1.000$ e 10.000. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.
(c) Ilustre a parte (b) plotando f e g na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1.000$ e 10.000. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.
(c) Ilustre a parte (b) colocando em um gráfico f e g na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

49–54 □ Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1 + x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x + e^{2x}}$

52. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1 + x^6}}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \operatorname{sen} x}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

55. A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Avalie-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como a seguir:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Avalie

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

57–59 □ Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie a integral para aqueles valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Avalie a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.
(b) Estime o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando n é um inteiro positivo arbitrário.
(c) Prove sua estimativa usando a indução matemática.

61. (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.
(b) Mostre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

onde M é o peso molecular do gás; R, a constante do gás; T, a temperatura do gás; e v, a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x obtemos um sólido com volume finito.

64. Use a informação e os dados dos Exercícios 29 e 30 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um satélite de 1.000 kg fora do campo gravitacional da Terra.

65. Calcule a *velocidade de escape* v_0 necessária para lançar um foguete de massa m fora do campo gravitacional de um planeta com massa M e raio R. Use a Lei de Newton da Gravitação (veja o Exercício 29 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ supre o trabalho necessário.

66. Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade de estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade das estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,x(r)\,dr$$

Se a densidade real de estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, ache a densidade aparente $y(s)$.

67. Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâmpadas

queimam mais rapidamente que outras: Seja $F(t)$ a fração de lâmpadas da companhia que queimam antes de t horas: assim $F(t)$ está entre 0 e 1.

(a) Faça um esboço de como você acha que o gráfico de F deve parecer.

(b) Qual o significado da derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) Qual é o valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? Por quê?

68. Como veremos na Seção 9.4, uma substância radioativa decai exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k, uma constante negativa. A *vida média* M de um átomo na substância é

$$M = -k\int_0^\infty te^{kt}\,dt$$

Para o isótopo radioativo de carbono, ^{14}C, usado para a datação, o valor de k é $-0{,}000121$. Calcule a vida média de um átomo de ^{14}C.

69. Determine o quão grande tem de ser o número a de modo que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0{,}001$$

70. Estime o valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ escrevendo a integral como uma soma de $\int_0^4 e^{-x^2}\,dx$ e $\int_4^\infty e^{-x^2}\,dx$. Aproxime a primeira integral usando a Regra de Simpson com $n = 8$ e mostre que a segunda integral é menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\,dx$, que é menor que 0,0000001.

71. Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Mostre que se $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ para $t \geq 0$, onde M e a são constantes, então a Transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponha que $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ e $0 \leq f'(t) \leq Ke^{at}$ para $t \geq 0$, onde f' é contínua. Se a Transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e a Transformada de Laplace de $f'(t)$ é $G(s)$, mostre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Se $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ é convergente e a e b são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

75. Mostre que $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

76. Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy$ interpretando as integrais como áreas.

77. Calcule o valor da constante C para o qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right)dx$$

converge. Avalie a integral para esse valor de C.

78. Ache o valor da constante C para o qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx$$

converge. Avalie a integral para esse valor de C.

7 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Escreva a regra de integração por partes. Na prática, como você a usa?
2. Como você avalia $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ se m é ímpar? O que acontece se n é ímpar? O que acontece se m e n são pares?
3. Se a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece em uma integral, que substituição você pode tentar? O que acontece se $\sqrt{a^2 + x^2}$ aparece? O que acontece se $\sqrt{x^2 - a^2}$ aparece?
4. Qual é a forma da expansão em frações parciais de uma função racional $P(x)/Q(x)$ se o grau de P é menor que o grau de Q e $Q(x)$ tem apenas os fatores lineares distintos? O que acontece se um fator linear é repetido? O que acontece se $Q(x)$ tem um fator quadrático irredutível (não repetido)? O que acontece se o fator quadrático é repetido?
5. Escreva as regras para a aproximação da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ com a Regra do Ponto Médio, a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. De qual você espera a melhor estimativa? Como você aproxima o erro para cada regra?
6. Defina as seguintes integrais impróprias.
   (a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$
7. Defina a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada um dos seguintes casos.
   (a) f tem uma descontinuidade infinita em a.
   (b) f tem uma descontinuidade infinita em b.
   (c) f tem uma descontinuidade infinita em c, onde $a < c < b$.
8. Escreva o Teorema da Comparação para as integrais impróprias.

TESTES FALSO–VERDADEIRO

Determine se o que está escrito é verdadeiro ou falso. Se for verdadeiro, explique o porquê. Se for falso, explique o porquê ou dê um contra-exemplo.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.
2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.
3. $\dfrac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.
4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.
5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$
6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ é convergente.
7. Se f for contínua, então $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.
8. A Regra do Ponto Médio é sempre mais precisa que a Regra do Trapézio.
9. (a) Toda função elementar tem uma derivada elementar.
   (b) Toda função elementar tem uma antiderivada elementar.
10. Se f é contínua em $[0, \infty]$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ é convergente.
11. Se f é uma função contínua, decrescente em $[1, \infty]$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente.
12. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas convergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é convergente.
13. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas divergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é divergente.
14. Se $f(x) \leqslant g(x)$ e $\int_0^\infty g(x)\,dx$ divergem, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ também diverge.

EXERCÍCIOS

Nota: Uma prática adicional nas técnicas de integração é fornecida nos Exercícios 7.5.

1–30 Avalie a integral.

1. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x+10}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^5 ye^{-0,6y}\,dy$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{(2t+1)^3}$
5. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x \sec^3 x\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{y^2-4y-12}\,dy$
7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
9. $\displaystyle\int_1^4 x^{3/2}\ln x\,dx$
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$
12. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta\cos^5\theta\,d\theta$
16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$
17. $\displaystyle\int x\sec x\operatorname{tg} x\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t+\cos 2t}$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$
22. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}}\,dx$
23. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^4 4x\,dx$
24. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - x^2 + 6x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \,\mathrm{sen}\, 2x\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5 \sec x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

34. $\displaystyle\int (\mathrm{arcsen}\,x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1-\mathrm{tg}\,\theta}{1+\mathrm{tg}\,\theta}\,d\theta$

37. $\displaystyle\int (\cos x + \mathrm{sen}\,x)^2 \cos 2x\,dx$

38. $\displaystyle\int x(\mathrm{tg}^{-1}x)^2\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,\theta}}{\mathrm{sen}\,2\theta}\,d\theta$

41–50 Avalie a integral ou mostre que ela é divergente.

41. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2-1}\,dt$

43. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

44. $\displaystyle\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2-x-2}$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{tg}^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Avalie a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável plotando a função e sua antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Desenhe a função $f(x) = \cos^2 x\,\mathrm{sen}^3 x$ e use o gráfico para estimar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Então avalie a integral para confirmar sua estimativa.

54. (a) Como você avaliaria $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ manualmente? (Não faça a integração.)
(b) Como você avaliaria $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ usando tabelas? (Não faça isso de fato.)
(c) Use um CAS para avaliar $\int x^5 e^{-2x}\,dx$.
(d) Desenhe o integrando e a integral indefinida na mesma tela.

55–58 Use a Tabela de Integrais no fim do livro para avaliar a integral.

55. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

56. $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^5 t\,dt$

57. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{cotg}\,x}{\sqrt{1+2\,\mathrm{sen}\,x}}\,dx$

59. Verifique a Fórmula 33 na Tabela de Integrais (a) por diferenciação e (b) usando uma substituição trigonométrica.

60. Verifique a Fórmula 62 da Tabela de Integrais.

61. É possível encontrar um número n tal que $\int_0^{\infty} x^n\,dx$ seja convergente?

62. Para quais valores de a $\int_0^{\infty} e^{ax}\cos x\,dx$ é convergente? Avalie a integral para aqueles valores de a.

63–64 Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral dada. Arredonde seus resultados para seis casas decimais.

63. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

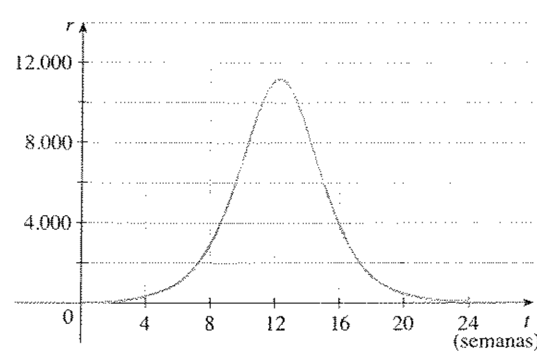
65. Estime os erros envolvidos no Exercício 63, partes (a) e (b). Quão grande deve ser n em cada caso para garantir um erro menor que 0,00001?

66. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área sob a curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. O velocímetro marcando (v) em um carro foi observado a intervalos de 1 minuto e os dados foram anotados na tabela a seguir. Use a Regra de Simpson para estimar a distância percorrida pelo carro.

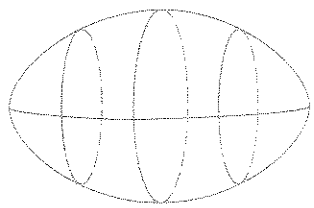
t (min)	v (mi/h)	t (min)	v (mi/h)
0	40	6	56
1	42	7	57
2	45	8	57
3	49	9	55
4	52	10	56
5	54		

68. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana (o gráfico de r é mostrado). Use a Regra de Simpson com 6 subintervalos para estimar o aumento da população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.



69. (a) Se $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, utilize um gráfico para encontrar um limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ e use a parte (a) para estimar o erro.
(c) Quão grande deve ser n para garantir que o tamanho do erro ao usar S_n seja menor que 0,00001?

70. Suponha que lhe peçam para estimar o volume de uma bola de futebol americano. Você mede e descobre que a bola tem 28 cm de comprimento. Você usa um barbante e mede a circunferência no ponto mais largo como 53 cm. A circunferência a 7 cm de cada extremo é 45 cm. Use a Regra de Simpson para fazer sua estimativa.



71. Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + 2}\,dx$$

é convergente ou divergente.

72. Encontre a área da região limitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e a reta $y = 3$.

73. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

74. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ e $x = 1$.

75. A região sob a curva $y = \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, é girada ao redor do eixo x. Calcule o volume do sólido resultante.

76. A região do Exercício 75 é girada ao redor do eixo y. Calcule o volume do sólido resultante.

77. Se f' é contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, mostre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$$

78. Podemos estender nossa definição de valor médio de uma função contínua a um intervalo infinito definindo o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\,dx$$

(a) Calcule o valor médio de $y = \text{tg}^{-1} x$ no intervalo $[0, \infty)$.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$ e $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, mostre que o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ é $\lim_{x \to \infty} f(x)$, se o limite existir.
(c) Se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, qual o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$?
(d) Calcule o valor médio de $y = \text{sen}\, x$ no intervalo $[0, \infty)$.

79. Use a substituição $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\,dx = 0$$

80. A grandeza da força de repulsão entre duas cargas pontuais com o mesmo sinal, uma com carga 1 e outra com carga q, é

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

onde r é a distância entre as cargas e ε_0, uma constante. O *potencial* V no ponto P devido à carga q é definido como o trabalho realizado para trazer uma carga unitária até P do infinito ao longo de uma linha reta que liga q e P. Encontre uma fórmula para V.

Problemas Quentes

Cubra a solução do exemplo e tente resolvê-lo sozinho.

Exemplo

(a) Prove que se f é uma função contínua, então

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos os números n positivos.

Solução

Os princípios de resolução de problemas foram discutidos na página 79.

(a) À primeira vista a equação fornecida parece um tanto difícil de entender. Como é possível ligar o lado esquerdo ao lado direito? As associações, com freqüência, podem ser feitas por meio de um dos princípios de resolução de problemas: *introduza alguma coisa extra*. Aqui o ingrediente extra é uma nova variável. Freqüentemente pensamos na introdução de uma nova variável quando usamos a Regra de Substituição para integrar uma função específica. Mas aquela regra ainda é útil na presente circunstância, em que temos uma função geral f.

Quando pensamos em fazer uma substituição, a forma do lado direito sugere que esta deve ser $u = a - x$. Então $du = -dx$. Quando $x = 0$, $u = a$; quando $x = a$, $u = 0$. Logo,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

No entanto, essa integral do lado direito é apenas outra maneira de escrever $\int_0^a f(x)\,dx$. Assim, a equação dada é provada.

Os gráficos feitos por computador na Figura 1 fazem parecer plausível que todas as integrais do exemplo têm o mesmo valor. O gráfico de cada integrando está anotado com o respectivo valor de n.

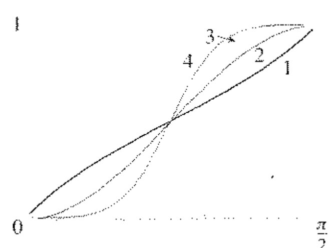


FIGURA 1

(b) Se considerarmos a integral dada como I e aplicarmos a parte (a) com $a = \pi/2$, obteremos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Uma identidade trigonométrica bem conhecida nos diz que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ e $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, assim temos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

Note que as duas expressões para I são muito parecidas. De fato, os integrandos têm o mesmo denominador. Isso sugere que devemos adicionar as duas expressões. Se fizermos dessa forma, obteremos

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $I = \pi/4$.

Problemas

1. Três estudantes de Matemática pediram uma pizza de 14". Em vez de fatiá-la da maneira tradicional, eles decidiram fatiá-la com cortes paralelos, como mostrado na figura. Sendo estudantes de Matemática, eles foram capazes de determinar onde fatiar de maneira que a cada um coubesse a mesma quantidade de pizza. Onde foram feitos os cortes?

2. Avalie $\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$.

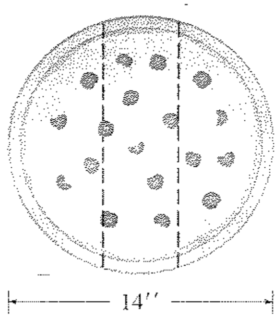
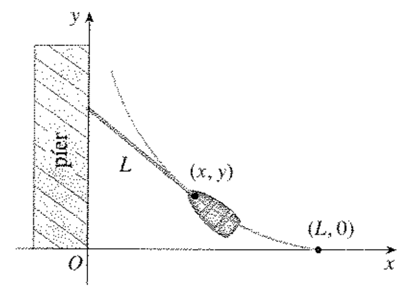


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

O ataque direto seria começar com frações parciais, mas isso seria brutal. Tente uma substituição.

3. Avalie $\int_0^1 (\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3})\, dx$.

4. Um homem inicialmente parado em um ponto O anda ao longo de um píer puxando uma canoa por uma corda de comprimento L. O homem mantém a corda reta e esticada. O caminho percorrido pela canoa é uma curva chamada *tractriz* (involuta de uma catenária) e esta tem a propriedade de que a corda é sempre tangente à curva (veja a figura).



(a) Mostre que se o caminho seguido pela canoa é o gráfico da função $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

(b) Determine a função $y = f(x)$.

5. Uma função f é definida por

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\, dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Ache o valor mínimo de f.

6. Se n é um inteiro positivo, prove que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

7. Mostre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

Sugestão: Comece mostrando que se I_n denota uma integral, então

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

8. Suponha que f seja uma função positiva tal que f' é contínua.

(a) Como é o gráfico de $y = f(x)$ sen nx relacionado ao gráfico de $y = f(x)$? O que acontece quando $n \to \infty$?

(b) Faça uma estimativa para o valor do limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

baseado nos gráficos do integrando.

(c) Usando integração por partes, confirme a estimativa que você fez na parte (b). [Use o fato de que, como f' é contínua, existe uma constante M tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

9. Se $0 < a < b$, calcule $\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t\, dx \right\}^{1/t}$.

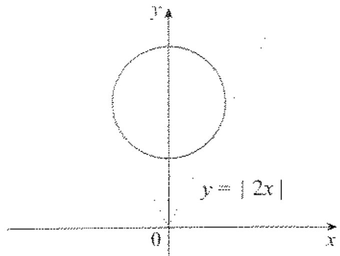


FIGURA PARA O PROBLEMA 11

10. Desenhe $f(x) = \text{sen}(e^x)$ e use o gráfico para estimar o valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ é um máximo. Então calcule o valor exato de t que maximiza a integral.

11. A circunferência de raio 1 mostrada na figura toca a curva de $y = |2x|$ duas vezes. Determine a área da região que se encontra entre as duas curvas.

12. Um foguete é lançado verticalmente, consumindo combustível a uma taxa constante de b quilogramas por segundo. Seja $v = v(t)$ a velocidade do foguete no instante t e suponha que a velocidade de emissão de gases u seja constante. Considere $M = M(t)$ como a massa do foguete no tempo t e observe que M decresce quando o combustível é consumido. Desprezando a resistência do ar, segue da Segunda Lei de Newton que

$$F = M\frac{dv}{dt} - ub$$

em que a força $F = -Mg$. Assim

$$\boxed{1} \qquad M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sejam M_1 a massa do foguete sem combustível, M_2 a massa inicial de combustível e $M_0 = M_1 + M_2$. Então, até ele ficar sem combustível no tempo $t = M_2 b$, sua massa é $M = M_0 - bt$.

(a) Substitua $M = M_0 - bt$ na Equação 1 e resolva a equação resultante para v. Use a condição inicial $v(0) = 0$ para determinar a constante.

(b) Determine a velocidade do foguete no instante $t = M_2/b$. Esta é chamada *velocidade terminal*.

(c) Estabeleça a altura $y = y(t)$ do foguete no tempo terminal.

(d) Determine a altura do foguete no tempo t qualquer.

13. Use integração por partes para mostrar que, para todo $x > 0$,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\text{sen}\, t}{\ln(1 + x + t)}\,dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

14. Os **polinômios de Chebyshev** T_n são definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \text{ arccos } x) \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

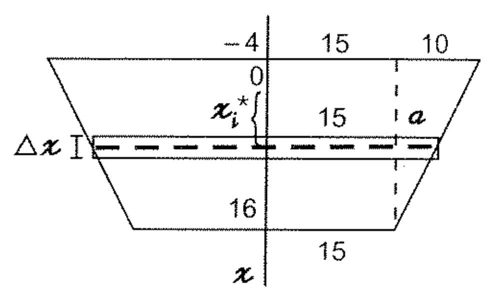
(a) Qual é o domínio e a imagem dessas funções?
(b) Sabemos que $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$. Expresse T_2 explicitamente como um polinômio quadrático e T_3 como um polinômio cúbico.
(c) Mostre que para $n \geqslant 1$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

(d) Utilize a parte (c) para mostrar que T_n é um polinômio de grau n.
(e) Use as partes (b) e (c) para expressar T_4, T_5, T_6 e T_7 explicitamente como polinômios.
(f) Quais são os zeros de T_n? Em quais valores T_n tem um valor máximo local e um valor mínimo local?
(g) Desenhe T_2, T_3, T_4 e T_5 na mesma tela.
(h) Desenhe T_5, T_6 e T_7 na mesma tela.
(i) Baseado em suas observações das partes (g) e (h), como estão relacionados os zeros de T_n com os zeros de T_{n+1}? Quais são os valores máximo e mínimo das coordenadas x?
(j) Baseado em seus gráficos da partes (g) e (h), o que você pode dizer sobre $\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$ quando n é ímpar e quando n é par?
(k) Use a substituição $u = \text{arccos } x$ para avaliar a integral da parte (j).
(l) A família de funções $f(x) = \cos(c \text{ arccos } x)$ é definida mesmo quando c não é um inteiro (mas assim f não é um polinômio). Descreva como o gráfico de f muda quando c aumenta.

8

Mais Aplicações de Integração



A integração nos capacita calcular a força exercida pela água em uma represa.

No Capítulo 6, vimos algumas aplicações de integrais, como: áreas, volumes, trabalho e valores médios. Aqui exploraremos algumas das muitas outras aplicações geométricas da integração — o comprimento de uma curva, a área de uma superfície —, assim como as quantidades de interesse na física, engenharia, biologia, economia e estatística. Por exemplo, investigaremos o centro de gravidade de um prato, a força exercida pela pressão da água em uma represa, a circulação de sangue do coração humano e o tempo médio esperado na linha durante uma chamada telefônica.

8.1 Comprimento de Arco

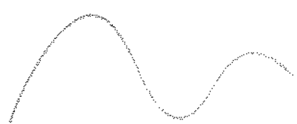


FIGURA 1

O que queremos dizer com o comprimento de uma curva? Podemos pensar em colocar um pedaço de barbante sobre a curva, como na Figura 1, e então medir o comprimento do barbante com uma régua. Mas isso pode ser difícil de fazer com muita precisão se tivermos uma curva complicada. Precisamos de uma definição exata para o comprimento de um arco de uma curva, da mesma maneira como desenvolvemos definições para os conceitos de área e volume.

Se a curva é um polígono, podemos facilmente encontrar seu comprimento; apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que formam o polígono. (Podemos usar a fórmula de distância para encontrar a distância entre os extremos de cada segmento.) Definiremos o comprimento de uma curva geral primeiro aproximando-a por um polígono e então tomando o limite quando o número de segmentos do polígono aumenta. Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos (veja a Figura 2).

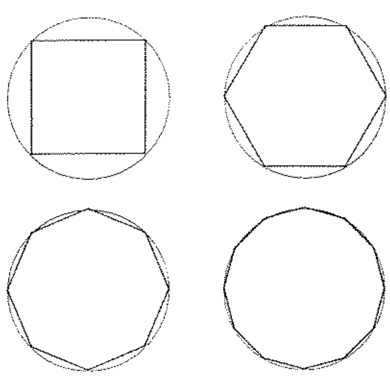


FIGURA 2

Agora suponha que uma curva C seja definida pela equação $y = f(x)$, onde f é contínua e $a \leqslant x \leqslant b$. Obtemos um polígono de aproximação para C dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com os extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e com larguras iguais a Δx. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e o polígono com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrado na Figura 3, é uma aproximação para C. O comprimento L de C é aproximadamente o mesmo desse polígono e a aproximação fica melhor quando n aumenta. (Veja a Figura 4, onde o arco da curva entre P_{i-1} e P_i foi ampliado e as aproximações com sucessivos valores menores para Δx são mostradas.) Portanto definimos o **comprimento** L da curva C com a equação

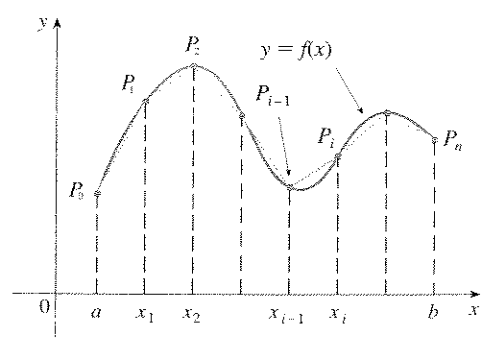


FIGURA 3

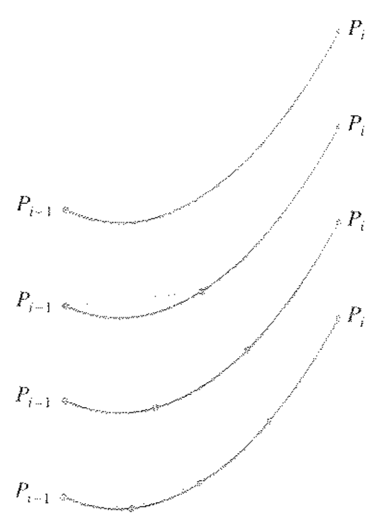


FIGURA 4

$y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, como o limite dos comprimentos desses polígonos inscritos (se o limite existir):

$$\boxed{1} \qquad \boxed{L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|}$$

Note que o procedimento para a definição de comprimento de arco é muito similar àquele que usamos para definir a área e o volume: dividimos a curva em um grande número de partes pequenas. Então encontramos os comprimentos aproximados das partes pequenas e os somamos. Finalmente, tomamos o limite quando $n \to \infty$.

A definição de comprimento de arco dada pela Equação 1 não é muito conveniente para os propósitos computacionais, mas podemos derivar uma fórmula integral para L no caso onde f tem uma derivada contínua. [Essa função f é chamada **suave**, porque uma pequena mudança em x produz uma pequena mudança em $f'(x)$.]

Se tomarmos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, então

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, descobrimos que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Então temos

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(porque } \Delta x > 0\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 1,

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Reconhecemos essa expressão como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

pela definição de integral definida. Essa integral existe porque a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua. Então provamos o seguinte teorema:

$\boxed{2}$ **Fórmula do Comprimento de Arco** Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Se usarmos a notação de Leibniz para as derivadas, poderemos escrever a fórmula do comprimento de arco como a seguir:

3
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

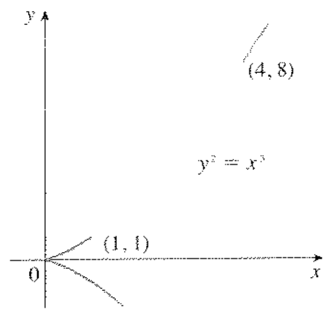


FIGURA 5

Quando verificamos nossa resposta no Exemplo 1, notamos a partir da Figura 5 que isso deve ser um pouquinho maior que a distância de $(1, 1)$ a $(4, 8)$, que é

$$\sqrt{58} \approx 7{,}615773$$

De acordo com os nossos cálculos no Exemplo 1, temos

$$L = \tfrac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7{,}633705$$

Seguramente, isso é um pouco maior que o comprimento do segmento de reta.

EXEMPLO 1 Calcule o comprimento de arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(4, 8)$ (veja a Figura 5).

SOLUÇÃO Para a porção superior da curva, temos

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

e assim a fórmula do comprimento de arco dá

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx$$

Se substituirmos $u = 1 + 9x/4$, então $du = 9\,dx/4$. Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Portanto

$$L = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$
$$= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$$
$$= \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$$

Se uma curva tem a equação $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ e $g'(y)$ é contínua, então, pela mudança dos papéis de x e y na Fórmula 2 ou na Equação 3, obtemos a seguinte fórmula para seu comprimento:

4
$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy}$$

EXEMPLO 2 Calcule o comprimento de arco da parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

SOLUÇÃO Como $x = y^2$, temos $dx/dy = 2y$ e a Fórmula 4 dá

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Fazemos a substituição trigonométrica $y = \frac{1}{2}\ \mathrm{tg}\ \theta$, que resulta em $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\theta} = \sec\theta$. Quando $y = 0$, $\mathrm{tg}\ \theta = 0$, logo $\theta = 0$; quando $y = 1$, $\mathrm{tg}\ \theta = 2$, assim $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\ 2 = \alpha$. Então

$$L = \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\ \mathrm{tg}\ \theta + \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\ \theta|\right]_0^\alpha \qquad \text{(do Exemplo 8 na Seção 7.2)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\sec\alpha\ \mathrm{tg}\ \alpha + \ln|\sec\alpha + \mathrm{tg}\ \alpha|\right)$$

(Poderíamos ter usado a Fórmula 21 da Tabela de Integrais.) Como $\operatorname{tg} \alpha = 2$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 5$, assim $\sec \alpha = \sqrt{5}$ e

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

:: A Figura 6 mostra o arco de uma parábola cujo comprimento é calculado no Exemplo 2, junto com as aproximações poligonais tendo $n = 1$ e $n = 2$ segmentos de reta, respectivamente. Para $n = 1$ o comprimento aproximado é $L_1 = \sqrt{2}$, a diagonal de um quadrado. A tabela mostra as aproximações L_n que obtemos dividindo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais. Note que cada vez que duplicamos o número de lados do polígono nos aproximamos do comprimento exato, que é

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1{,}478943$$

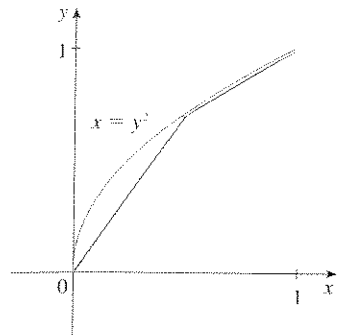


FIGURA 6

n	L_n
1	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,476
32	1,478
64	1,479

Por causa da presença da raiz quadrada nas Fórmulas 2 e 4, os cálculos de comprimento de um arco freqüentemente nos levam a integrais muito difíceis ou mesmo impossíveis de se avaliar explicitamente. Então algumas vezes temos de nos contentar em achar uma aproximação do comprimento da curva, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 ::

(a) Monte uma integral para o comprimento de arco de uma hipérbole $xy = 1$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

e assim o comprimento de arco é

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

(b) Usando a Regra de Simpson (veja a Seção 7.7) com $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ e $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, obtemos

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)\right]$$

$$\approx 1{,}1321$$

:: Verificando o valor da integral definida com uma aproximação mais exata, produzida por um sistema algébrico computacional, vemos que a aproximação usando a Regra de Simpson é precisa até quatro casas decimais.

Função Comprimento de Arco

É útil termos uma função que mede o comprimento de arco de uma curva a partir de um ponto inicial particular até outro ponto qualquer na curva. Então, se a curva suave C tem a equação $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, seja $s(x)$ a distância ao longo de C do ponto inicial $P_0(a, f(a))$ ao ponto $Q(x, f(x))$. Então s é uma função, chamada **função comprimento de arco**, e, pela Fórmula 2,

$$\boxed{5} \qquad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Mudamos a variável de integração para t de modo que x não tenha dois significados.) Podemos usar a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para diferenciar a Equação 5 (uma vez que o integrando é contínuo):

$$\boxed{6} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

A Equação 6 mostra que a taxa de mudança de s em relação a x é sempre pelo menos 1 e é igual a 1 quando $f'(x)$, a inclinação da curva, é 0. A diferencial do comprimento de arco é

$$\boxed{7} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

e essa equação é escrita algumas vezes na forma simétrica

$$\boxed{8} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

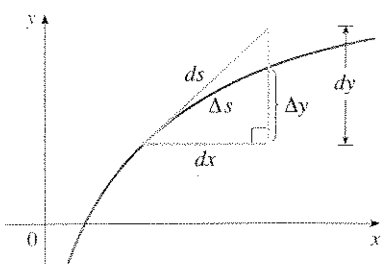


FIGURA 7

A interpretação geométrica da Equação 8 é mostrada na Figura 7. Isso pode ser usado como um artifício mnemônico para se lembrar das Fórmulas 3 e 4. Se escrevermos $L = \int ds$, então, a partir da Equação 8, poderemos resolver para obter (7), o que dá (3), ou poderemos resolver para obter

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

o que dá (4).

EXEMPLO 4 □ Ache a função comprimento de arco para a curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando $P_0(1, 1)$ como o ponto inicial.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, então

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Assim, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8} \ln t \Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8} \ln x - 1$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de $(1, 1)$ a $(3,\ f(3))$ é

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8} \ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8{,}1373$$

A Figura 8 mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4. A Figura 9 mostra o gráfico de sua função comprimento de arco. $s(x)$ é negativo quando x é menor que 1?

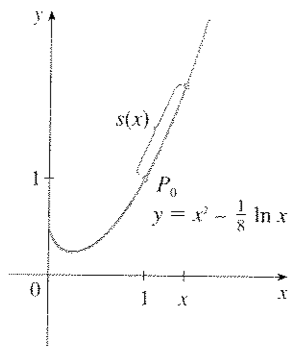


FIGURA 8

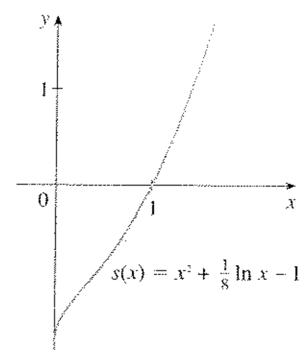


FIGURA 9

8.1 Exercícios

1. Use a Fórmula 3 do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2 - 3x$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique o seu resultado notando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Utilize a fórmula do comprimento de arco para achar o comprimento da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um quarto de círculo.

3–4 □ Desenhe a curva e visualmente estime o seu comprimento. Depois ache o seu comprimento exato.

3. $y = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

4. $y = \dfrac{x^3}{1} + \dfrac{1}{2x}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

5–16 □ Ache o comprimento da curva.

5. $y = 1 + 6x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

6. $y^2 = 4(x + 4)^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y > 0$

7. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

8. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, $2 \leqslant x \leqslant 4$

9. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3)$, $1 \leqslant y \leqslant 9$

10. $y = \ln(\cos x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

11. $y = \ln(\sec x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

12. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

13. $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

14. $y^2 = 4x$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

15. $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

16. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a > 0$

17–20 Escreva, mas não avalie, uma integral para o comprimento da curva.

17. $y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

18. $y = 2^x,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$

19. $x = y + y^3,\ 1 \leqslant y \leqslant 4$

20. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

21–24 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco da curva. Compare a sua resposta com o valor da integral produzido pela sua calculadora.

21. $y = xe^{-x},\ 0 \leqslant x \leqslant 5$

22. $x = y + \sqrt{y},\ 1 \leqslant y \leqslant 2$

23. $x = \sec x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

24. $y = x \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$

25. (a) Desenhe a curva $y = x\sqrt[3]{4 - x},\ 0 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Calcule os comprimentos dos polígonos inscritos com $n = 1, 2$ e 4 lados. (Divida o intervalo em subintervalos iguais.) Ilustre esboçando esses polígonos (como na Figura 6).
(c) Monte uma integral para o comprimento da curva.
(d) Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. Compare com as aproximações na parte (b).

26. Repita o Exercício 25 para a curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

27. Use um sistema algébrico computacional ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $x = \ln(1 - y^2)$ que está entre os pontos $(0, 0)$ e $\left(\ln \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

28. Use um sistema algébrico computacional ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $y = x^{4/3}$ que está entre os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Se seu CAS tiver problemas para avaliar a integral, faça uma substituição que mude a integral em uma que o CAS possa avaliar.

29. Esboce a curva com a equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ e use a simetria para achar seu comprimento.

30. (a) Esboce a curva $y^3 = x^2$.
(b) Use as Fórmulas 3 e 4 para montar duas integrais para o comprimento de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que uma dessas integrais é uma integral imprópria e avalie ambas as integrais.
(c) Ache o comprimento de arco dessa curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

31. Ache a função comprimento de arco para a curva $y = 2x^{3/2}$ com o ponto inicial $P_0(1, 2)$.

32. (a) Desenhe a curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 1/(4x),\ x > 0$.
(b) Encontre a função comprimento de arco para essa curva com o ponto inicial $P_0\left(1, \frac{7}{12}\right)$.
(c) Desenhe a função comprimento de arco.

33. Um falcão voando a 15 m/s a uma altitude de 180 m acidentalmente derruba sua presa. A trajetória parabólica de sua presa caindo é descrita pela equação

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

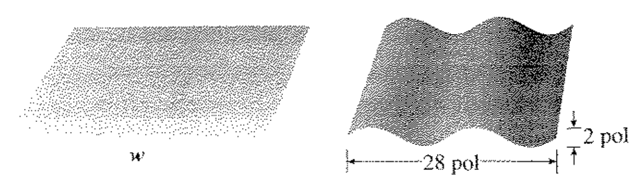
até que ela atinja o solo, onde y é a altura acima do solo e x, a distância horizontal percorrida em metros. Calcule a distância percorrida pela presa do momento em que ela é derrubada até o momento em que ela atinge o solo. Expresse sua resposta com precisão de um décimo de metro.

34. Um vento contínuo sopra uma pipa a oeste. A altura da pipa acima do solo a partir de uma posição horizontal $x = 0$ até $x = 80$ pés é dada por

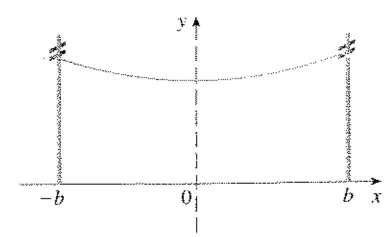
$$y = 150 - \tfrac{1}{40}(x - 50)^2$$

Ache a distância percorrida pela pipa.

35. Um fabricante de telhados metálicos corrugados quer produzir painéis que têm 28" de largura e 2" de espessura processando folhas planas de metal como mostrado na figura. O perfil do telhado tem o formato de uma onda senoidal. Verifique que a senóide tem a equação $y = \operatorname{sen}(\pi x/7)$ e calcule a largura w de uma folha metálica plana que é necessária para fazer um painel de 28". (Use sua calculadora para avaliar a integral correta a quatro dígitos significantes.)



36. (a) A figura mostra um fio de telefone pendurado entre dois postes em $x = -b$ e $x = b$. Este tem o formato de uma catenária com a equação $y = c + a\cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio.
(b) Suponha que os dois postes telefônicos estejam separados a uma distância de 50 pés e que o comprimento do fio entre os postes seja de 51 pés. Se o ponto mais baixo do fio deve estar 20 pés acima do solo, a qual altura o fio deve ser preso no poste?



37. Calcule o comprimento da curva $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

38. As curvas com as equações $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, são chamadas **círculos gordos**. Desenhe as curvas com $n = 2, 4, 6, 8$ e 10 para ver o porquê. Monte uma integral para o comprimento L_{2k} do círculo gordo com $n = 2k$. Sem tentar avaliar essa integral, estabeleça o valor de

$$\lim_{k \to \infty} L_{2k}$$

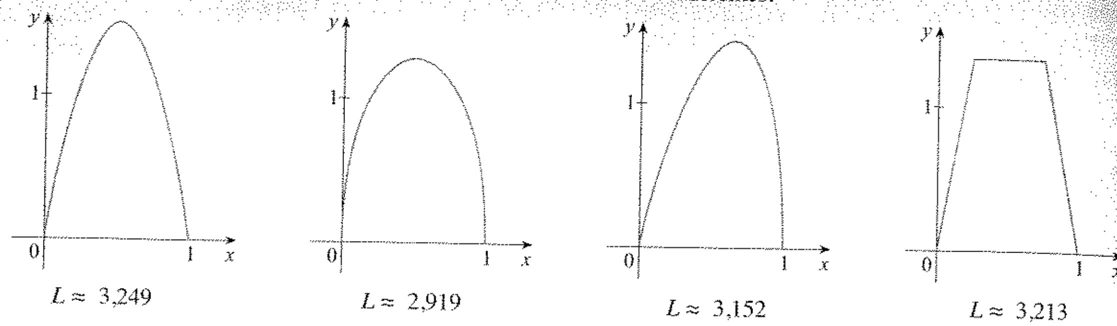
Projeto Descoberta

Torneio de Comprimento de Arcos

As curvas mostradas a seguir são exemplos de funções f contínuas e que têm as seguintes propriedades.

1. $f(x) = 0$ e $f(1) = 0$
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$
3. A área abaixo do gráfico de f entre 0 e 1 é igual a 1

Contudo, os comprimentos L dessas curvas são diferentes.



Tente descobrir as fórmulas de duas funções que satisfaçam as condições 1, 2 e 3. (Seus gráficos devem ser similares aos mostrados anteriormente ou podem ser totalmente diferentes.) Agora calcule o comprimento de arco de cada gráfico. O vencedor será aquele que obtiver o menor comprimento.

8.2 Área de uma Superfície de Revolução

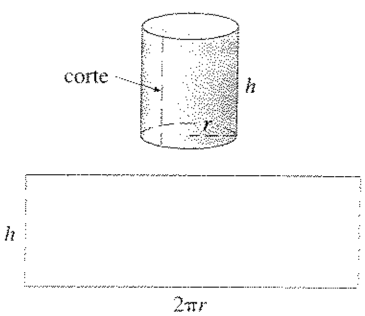


FIGURA 1

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução do tipo discutido nas Seções 6.2 e 6.3.

Queremos definir a área da superfície de revolução de maneira que ela corresponda à nossa intuição. Se a área da superfície for A, podemos pensar que para pintar a superfície seria necessário a mesma quantidade de tinta que para pintar uma região plana com área A.

Vamos começar com algumas superfícies simples. A área da superfície lateral de um cilindro circular com raio r e altura h é tomada como $A = 2\pi rh$ porque podemos nos imaginar cortando o cilindro e desenrolando-o (como na Figura 1) para obter um retângulo com as dimensões $2\pi r$ e h.

Da mesma maneira, podemos tomar um cone circular com a base de raio r e a geratriz l, cortá-lo ao longo da linha pontilhada na Figura 2 e achatá-lo para formar o setor de um círculo com raio l e ângulo central $\theta = 2\pi r/l$. Sabemos que, em geral, a área de um setor de um círculo com raio l e ângulo θ é $\frac{1}{2}l^2\theta$ (veja o Exercício 35 na Seção 7.3); assim, nesse caso a área é

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Portanto definimos a área da superfície lateral de um cone como $A = \pi rl$.

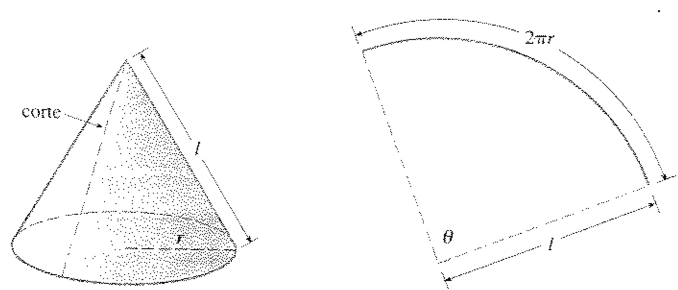


FIGURA 2

Que tal superfícies de revolução mais complicadas? Se seguirmos a estratégia que usamos com o comprimento de arco, poderemos aproximar a curva original por um polí-

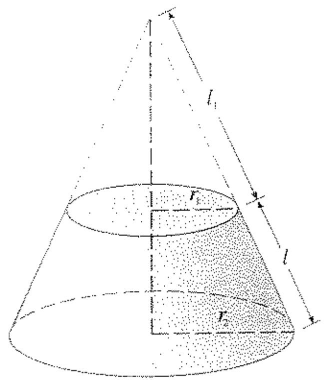


FIGURA 3

gono. Quando esse polígono é girado ao redor de um eixo, ele cria uma superfície mais simples, cuja área da superfície se aproxima da área da superfície real. Tomando o limite podemos determinar a área exata da superfície.

A superfície aproximadora, então, consiste em *faixas*, cada qual formada pela rotação de um segmento de reta ao redor de um eixo. Para encontrar a área da superfície, cada uma dessas faixas pode ser considerada como uma porção de um cone circular, como mostrado na Figura 3. A área da faixa (ou tronco de um cone) mostrada na Figura 3, com geratriz l e raios superioı e inferior r_1 e r_2, respectivamente, é calculada pela subtração das áreas dos dois cones:

$$\boxed{1} \qquad A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Pela similaridade de triângulos temos

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

o que resulta em

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{ou} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

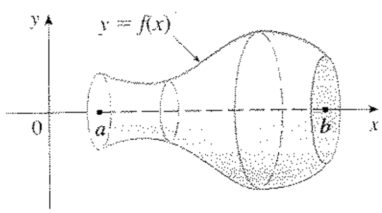
Colocando isso na Equação 1 obtemos

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

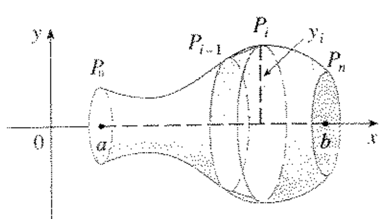
ou

$$\boxed{2} \qquad \boxed{A = 2\pi r l}$$

onde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ é o raio médio da faixa.



(a) Superfície de revolução



(b) Faixa de aproximação

FIGURA 4

Agora aplicamos essa fórmula à nossa estratégia. Considere a superfície mostrada n: Figura 4, obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, ao redor do eixo x, onde f (positiva e tem uma derivada contínua. Para definir sua área de superfície, dividimos (intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com os extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx como fizemos para determinar o comprimento de arco. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre a curva. A parte da superfície entre x_{i-1} e x_i pode ser aproximad: tomando-se o segmento de reta $P_{i-1}P_i$ e girando-o ao redor do eixo x. O resultado é um: faixa (um tronco de cone) com geratriz $l = |P_{i-1}P_i|$ e raio médio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$; assim pela Fórmula 2, a área da superfície é

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como na prova do Teorema 8.1.2, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

onde x_i^* é algum número em $[x_{i-1}, x_i]$. Quando Δx é pequeno, temos $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ também $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, uma vez que f é contínua. Portanto

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

e então uma aproximação para o que pensamos ser a área da superfície completa d revolução é

$$\boxed{3} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

Essa aproximação torna-se melhor quando $n \to \infty$ e, reconhecendo (3) como uma soma d Riemann para a função $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Portanto, no caso onde f é positiva e tem uma derivada contínua, definimos a **área d superfície** obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, ao redor do eixo x como

4
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Com a notação de Leibniz para as derivadas, essa fórmula torna-se

5
$$S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Se a curva é descrita como $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, então a fórmula para a área da superfície torna-se

6
$$S = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

e as Fórmulas 5 e 6 podem ser resumidas simbolicamente usando-se a notação para o comprimento de arco dada na Seção 8.1 como

7
$$S = \int 2\pi y\,ds$$

Pela rotação ao redor do eixo y, a fórmula da área da superfície se torna

8
$$S = \int 2\pi x\,ds$$

onde, como anteriormente, podemos usar

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Essas fórmulas podem ser lembradas pensando-se em $2\pi y$ ou $2\pi x$ como a circunferência de um círculo traçada pelo ponto (x, y) na curva e girada ao redor do eixo x ou eixo y, respectivamente (veja a Figura 5).

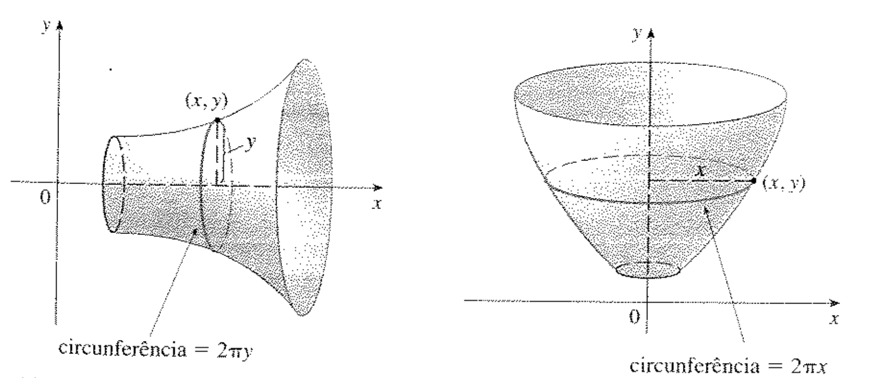


FIGURA 5 (a) Rotação ao redor do eixo x: $S = \int 2\pi y\,ds$ (b) Rotação ao redor do eixo y: $S = \int 2\pi x\,ds$

A Figura 6 mostra a porção de uma esfera cuja área da superfície é computada no Exemplo 1.

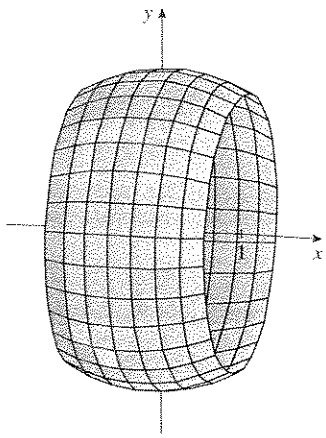


FIGURA 6

A Figura 7 mostra a superfície de revolução cuja área é computada no Exemplo 2.

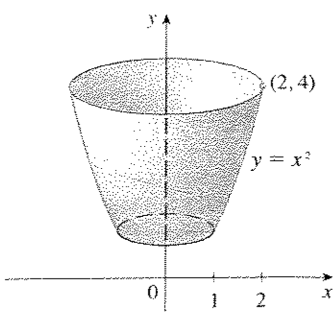


FIGURA 7

Para verificar nossa resposta no Exemplo 2, veja pela Figura 7 que a área da superfície deve ser próxima à de um cilindro circular com a mesma altura e raio na metade entre o raio superior e o inferior da superfície: $2\pi(1{,}5)(3) \approx 28{,}27$. Calculamos que a área da superfície era

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30{,}85$$

o que parece razoável. Alternativamente, a área da superfície deve ser ligeiramente maior que a área de um tronco de um cone com as mesmas bordas superior e inferior. Da Equação 2, isso é $2\pi(1{,}5)(\sqrt{10}) \approx 29{,}80$.

EXEMPLO 1 A curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, é um arco do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encontre a área da superfície obtida pela rotação desse arco ao redor do eixo x. (A superfície é uma porção de uma esfera de raio 2. (Veja a Figura 6.)

SOLUÇÃO Temos

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

e assim, pela Fórmula 5, a área da superfície é

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 O arco da parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ para $(2, 4)$ é girado ao redor do eixo y. Encontre a área da superfície resultante.

SOLUÇÃO 1 Usando

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

temos, da Fórmula 8,

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi x\, ds = \int_{1}^{2} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{1}^{2} x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx \end{aligned}$$

Substituindo $u = 1 + 4x^2$, temos $du = 8x\, dx$. Lembrando-nos de mudar os limites de integração, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4}\int_{5}^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_5^{17} \\ &= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Usando

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

temos

$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

EXEMPLO 3 □ Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ao redor do eixo x.

□ Outro método: Use a Fórmula 6 com $x = \ln y$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 5 com

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

temos

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta$$

□ Ou use a Fórmula 21 na Tabela de Integrais.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta \ \mathrm{tg}\ \theta + \ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\ \theta\right|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(pelo Exemplo 8 na Seção 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \ \mathrm{tg}\ \alpha + \ln(\sec\alpha + \mathrm{tg}\ \alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

Como $\mathrm{tg}\ \alpha = e$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + e^2$ e

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

8.2 Exercícios

1–4 □ Escreva, mas não avalie, uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo dado.

1. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; eixo x
2. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; eixo x
3. $y = \sec x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; eixo y
4. $y = e^x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$; eixo y

5–12 □ Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x.

5. $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$
6. $9x = y^2 + 18$, $2 \leqslant x \leqslant 6$
7. $y = \sqrt{x}$, $4 \leqslant x \leqslant 9$

8. $y = \cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

9. $y = \cosh x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

11. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

13–16 A curva dada é girada ao redor do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant a/2$

16. $x = a\cosh(y/a), \quad -a \leqslant y \leqslant a$

17–20 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x. Compare o seu resultado com o valor da integral obtido em sua calculadora.

17. $y = \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

18. $y = x + \sqrt{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

19. $y = \sec x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

20. $y = \sqrt{1 + e^x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

21–22 Use um CAS ou uma tabela de integrais para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

21. $y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

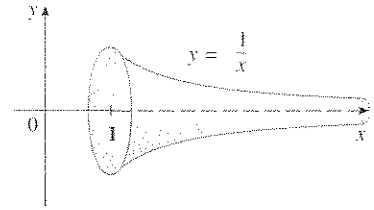
22. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

23–24 Use um CAS para calcular a área exata da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo y. Se seu CAS tiver problemas para avaliar a integral, expresse a área da superfície como uma integral na outra variável.

23. $y = x^3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

24. $y = \ln(x + 1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

25. Se a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ é girada ao redor do eixo x, o volume do sólido resultante é finito (veja o Exercício 63 na Seção 7.8). Mostre que a área da superfície é infinita. (A superfície é mostrada na figura e é conhecida como **trombeta de Gabriel**.)



26. Se a curva infinita $y = e^{-x}, x \geqslant 0$, é girada ao redor do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

27. (a) Se $a > 0$, ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ em torno do eixo x.

(b) Encontre a área da superfície se a rotação for em torno do eixo y.

28. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$ ao redor do eixo y. Se a antena tiver 10 pés de diâmetro e uma profundidade máxima de 2 pés, encontre o valor de a e a área da superfície da antena.

29. A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

é girada ao redor do eixo x para formar uma superfície chamada *elipsóide*. Calcule a área da superfície desse elipsóide.

30. Ache a área da superfície do toro no Exercício 61 na Seção 6.2.

31. Se a curva $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, gira ao redor da reta horizontal $y = c$, onde $f(x) \leqslant c$, encontre a fórmula para a área da superfície resultante.

32. Use o resultado do Exercício 31 para montar uma integral para encontrar a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 4$, ao redor da reta $y = 4$. Então use um CAS para avaliar a integral.

33. Calcule a área da superfície obtida pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ ao redor da reta $y = r$.

34. Mostre que a área da superfície de uma zona de uma esfera que está entre dois planos paralelos é $S = \pi dh$, onde d é o diâmetro da esfera e h, a distância entre os planos. (Note que S depende apenas da distância entre os planos e não de sua localização, desde que ambos os planos interceptem a esfera.)

35. A Fórmula 4 é válida apenas quando $f(x) \geqslant 0$. Mostre que quando $f(x)$ não é necessariamente positiva, a fórmula para a área da superfície torna-se

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

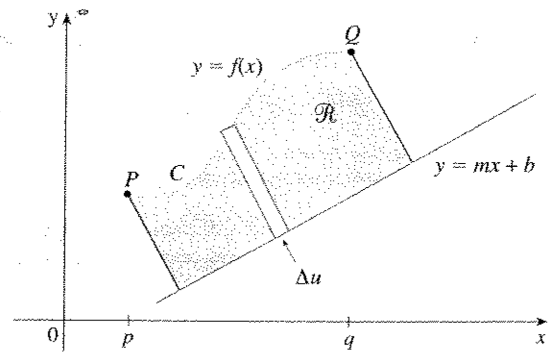
36. Seja L o comprimento da curva $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, onde f é positiva e tem uma derivada contínua. Seja S_f a área da superfície gerada pela rotação da curva ao redor do eixo x. Se c é uma constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ e seja S_g a área da superfície correspondente gerada pela curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Expresse S_g em termos de S_f e L.

Projeto Descoberta

Rotação ao Redor de uma Reta Inclinada

Sabemos como encontrar o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região ao redor de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 6.2). Também sabemos como calcular a área de uma superfície de revolução se girarmos uma curva ao redor de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 8.2). Mas, e se girarmos ao redor de uma reta inclinada, isto é, uma reta que não é nem horizontal nem vertical? Neste projeto pedimos para você descobrir as fórmulas para o volume de um sólido de revolução e para a área da superfície de revolução quando o eixo de rotação é uma reta inclinada.

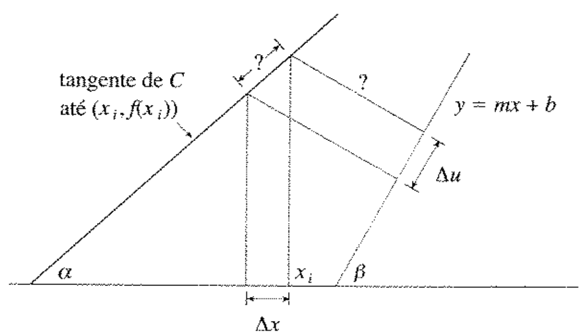
Seja C o arco da curva $y = f(x)$ entre os pontos $P(p, f(p))$ e $Q(q, f(q))$ e seja $\mathcal{R}$ a região limitada por C, pela reta $y = mx + b$ (que está inteiramente abaixo de C) e pelas perpendiculares à reta de P a Q.



1. Mostre que a área de $\mathcal{R}$ é

$$\frac{1}{1 + m^2} \int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\, dx$$

[*Sugestão*: Essa fórmula pode ser verificada pela subtração das áreas, mas será útil durante o projeto derivá-la primeiro aproximando a área usando retângulos perpendiculares à reta, como mostrado na figura. Use a figura para ajudar a expressar Δu em termos de Δx.]



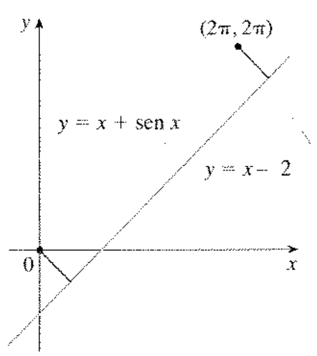


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

2. Encontre a área da região mostrada na figura à esquerda.
3. Ache uma fórmula similar àquela no Problema 1 para o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor da reta $y = mx + b$.
4. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do Problema 2 ao redor da reta $y = x - 2$.
5. Encontre a fórmula para a área da superfície obtida pela rotação de C ao redor da reta $y = mx + b$.
6. Use um sistema algébrico computacional para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, ao redor da reta $y = \frac{1}{2}x$. Então aproxime seu resultado com precisão de três casas decimais.

8.3 Aplicações à Física e à Engenharia

Junto com as muitas aplicações de cálculo integral à física e à engenharia consideramos duas aqui: a força devido à pressão da água e centros de massa. Como em nossas aplicações anteriores à geometria (áreas, volumes e comprimentos) e ao trabalho, nossa estratégia é quebrar a quantidade física em um grande número de pequenas partes, aproximar cada pequena parte, adicionar os resultados, tomar o limite e então avaliar a integral resultante.

Pressão Hidrostática e Força

Os mergulhadores notam que a pressão da água aumenta quando eles mergulham mais profundamente. Isso ocorre por causa do aumento do peso da água acima deles.

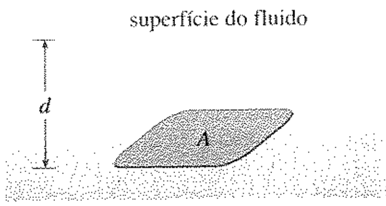


FIGURA 1

Em geral, suponha que uma placa horizontal fina com a área A por metros quadrados seja submersa em um fluido de densidade ρ quilogramas por metro cúbico a uma profundidade d metros abaixo da superfície do fluido, como na Figura 1. O fluido diretamente acima da placa tem um volume $V = Ad$, assim sua massa é $m = \rho V = \rho Ad$. A força exercida pelo fluido na placa é, portanto:

$$F = mg = \rho g A d$$

onde g é a aceleração da gravidade. A **pressão** P na placa é definida como a força por unidade de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

Quando usamos as unidades comuns norte-americanas escrevemos $P = \rho g d = \delta d$, onde $\delta = \rho g$ é a densidade de peso (em oposição a ρ, que é a densidade de massa). Por exemplo a densidade de peso da água é $\delta = 62{,}5$ lb/pés^3.

No Sistema Internacional de Unidades, a pressão é medida em newtons por metro quadrado, que é chamada pascal (abreviação: 1 N/m^2 = 1 Pa). Como essa é uma unidade pequena, o kilopascal (kPa) é freqüentemente usado. Por exemplo, uma vez que a densidade da água é de $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, a pressão no fundo de uma piscina de 2 m de profundidade é

$$\begin{aligned} P = \rho g d &= 1.000 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} \\ &= 19.600 \text{ Pa} = 19{,}6 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Um princípio importante da pressão de fluidos é o fato verificado experimentalmente de que *em qualquer ponto no líquido a pressão é a mesma em todas as direções*. (Um mergulhador sente a mesma pressão no nariz e nas orelhas.) Então, a pressão em *qualquer* direção a uma profundidade d em um fluido com densidade ρ é dada por

$$P = \rho g d = \delta d \tag{1}$$

Isso nos ajuda a determinar a força hidrostática contra uma placa *vertical* ou parede de uma represa em um fluido. Este não é um problema simples, porque a pressão não é constante, mas se eleva com o aumento da profundidade.

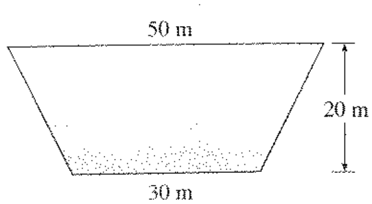


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Uma represa tem o formato do trapézio mostrado na Figura 2. A altura é de 20 m, e a largura é de 50 m no topo e 30 m no fundo. Calcule a força na represa devido à pressão hidrostática da água se o nível de água está a 4 m do topo da represa.

SOLUÇÃO Escolhemos um eixo vertical x com origem na superfície da água, como na

Figura 3(a). A profundidade da água é de 16 m; assim, dividimos o intervalo $[0, 16]$ em subintervalos de igual comprimento com extremos x_i e escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. A i-ésima faixa horizontal da represa é aproximada por um retângulo com altura Δx e largura w_i, onde, por similaridade de triângulos na Figura 3(b),

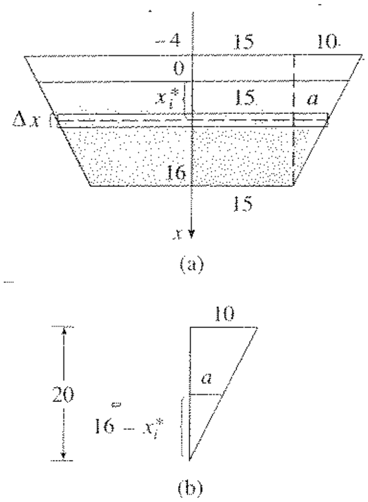


FIGURA 3

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

e assim
$$w_i = 2(15 + a) = 2(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*) = 46 - x_i^*$$

Se A_i é a área da i-ésima faixa, então

$$A_i \approx w_i\,\Delta x = (46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Se Δx é pequeno, então a pressão P_i na i-ésima faixa é praticamente constante, e podemos usar a Equação 1 para escrever

$$P_i \approx 1.000 g x_i^*$$

A força hidrostática F_i agindo na i-ésima faixa é o produto da pressão pela área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1.000 g x_i^*(46 - x_i^*)\Delta x$$

Adicionando essas forças e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos a força hidrostática total na represa:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1.000 g x_i^*(46 - x_i^*)\Delta x \\ &= \int_0^{16} 1.000 g x(46 - x)\Delta x \\ &= 1.000(9{,}8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx \\ &= 9.800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16} \\ &\approx 4{,}43 \times 10^7\ \text{N} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 □ Calcule a força hidrostática no extremo de um tambor cilíndrico com raio de 3 pés que está submerso em água com 10 pés de profundidade.

SOLUÇÃO Neste exemplo é conveniente escolher os eixos como na Figura 4, de modo que a origem seja colocada no centro do tambor. Então o círculo tem uma equação simples $x^2 + y^2 = 9$. Como no Exemplo 1, dividimos a região circular em faixas horizontais de larguras iguais. Da equação do círculo, vemos que o comprimento da i-ésima faixa é $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ e assim sua área é

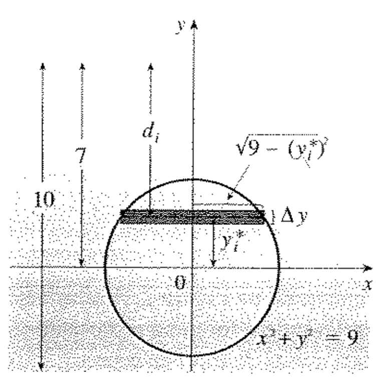


FIGURA 4

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

A pressão nessa faixa é aproximadamente

$$\delta d_i = 62{,}5(7 - y_i^*)$$

e assim a força na faixa é aproximadamente

$$\delta d_i A_i = 62{,}5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

A força total é obtida pela soma das forças em todas as faixas e tomando-se o limite

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

$$= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

$$= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

A segunda integral é 0, porque o integrando é uma função ímpar (veja o Teorema 5.5.7). A primeira integral pode ser avaliada usando-se a substituição trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen} \theta$, mas é mais fácil observar que essa é a área de um disco semicircular com raio 3. Então

$$F = 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{7.875\pi}{2} \approx 12.370 \text{ lb}$$

Momentos e Centros de Massa

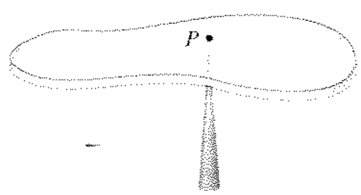


FIGURA 5

Nosso principal objetivo aqui é encontrar o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, como na Figura 5. Esse ponto é chamado **centro de massa** (ou centro de gravidade) da placa.

Primeiro consideramos a situação mais simples mostrada na Figura 6, onde duas massas m_1 e m_2 são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias d_1 e d_2 do apoio. O eixo ficará em equilíbrio se

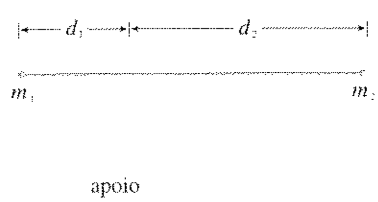


FIGURA 6

$$\boxed{2} \qquad m_1 d_1 = m_2 d_2$$

Esse é um fato experimental descoberto por Arquimedes e chamado Lei da Alavanca. (Pense em uma pessoa mais leve equilibrando outra pessoa mais pesada em uma gangorra sentando-se mais longe do centro).

Agora suponha que o eixo esteja sobre o eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e o centro de massa em $\bar{x}$. Se compararmos as Figuras 6 e 7 veremos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$ e assim a Equação 2 dá

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\boxed{3} \qquad \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Os números $m_1 x_1$ e $m_2 x_2$ são denominados **momentos** das massas m_1 e m_2 (em relação à origem) e a Equação 3 diz que o centro de massa $\bar{x}$ é obtido pela soma dos momentos das massas e divisão pela massa total $m = m_1 + m_2$.

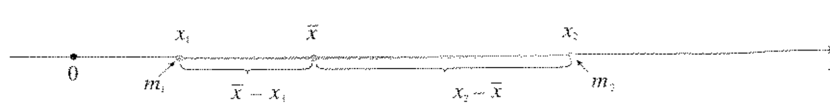


FIGURA 7

Em geral, temos um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre o eixo x. Podemos mostrar similarmente que o centro de massa do sistema está localizado em

4
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$$

onde $m = \sum m_i$ é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

é chamada **momento do sistema em relação à origem**. Então a Equação 4 pode ser reescrita como $m\bar{x} = M$, que diz que se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa $\bar{x}$, então seu momento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

Agora considere um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ no plano xy como mostrado na Figura 8. Por analogia com o caso unidimensional, definimos o **momento do sistema com relação ao eixo y** como

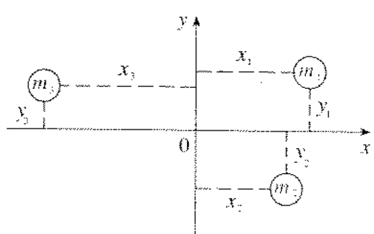


FIGURA 8

5
$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

e o **momento do sistema com relação ao eixo x** como

6
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Então M_y mede a tendência de o sistema girar ao redor do eixo y e M_x mede a tendência de ele girar ao redor do eixo x.

Como no caso unidimensional, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

7
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

onde $m = \sum m_i$ é a massa total. Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto onde uma partícula única de massa m teria os mesmos momentos do sistema.

EXEMPLO 3 □ Calcule os momentos e os centros de massa do sistema de objetos que têm massas 3, 4 e 8 nos pontos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ e $(3, 2)$.

SOLUÇÃO Usamos as Equações 5 e 6 para calcular os momentos

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

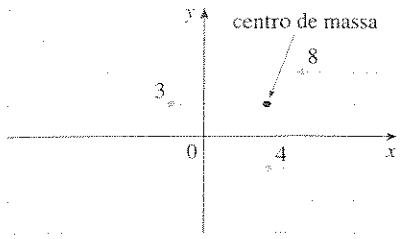


FIGURA 9

Como $m = 3 + 4 + 8 = 15$, usamos as Equações 7 para obter

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Então o centro de massa é $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$ (veja a Figura 9).

A seguir consideramos uma placa plana (denominada *lâmina*) com densidade uniforme ρ que ocupa uma região $\mathcal{R}$ do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa, chamado **centróide** (ou centro geométrico) de $\mathcal{R}$. Fazendo isso usamos os seguintes princípios físicos: o **princípio da simetria** diz que se $\mathcal{R}$ é simétrico ao redor da reta l, então o centróide de $\mathcal{R}$ está em l. (Se $\mathcal{R}$ se reflete ao redor de l, nesse caso, $\mathcal{R}$ permanece o mesmo, assim seu centróide permanece fixo. Mas os únicos pontos fixos permanecem em l.) Então, o centróide de um retângulo é seu centro. Os momentos devem ser definidos de maneira que se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos permanecem inalterados. Também, o momento da união de duas regiões sem a interseção deve ser a soma dos momentos das regiões individuais.

Suponha que a região $\mathcal{R}$ seja do tipo mostrado na Figura 10(a); isto é, $\mathcal{R}$ esteja entre as retas $x = a$ e $x = b$, acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com os extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto de amostragem x_i^* como o ponto médio $\bar{x}_i$ do i-ésimo subintervalo, que é $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Isso determina uma aproximação poligonal a $\mathcal{R}$, mostrada na Figura 10(b). O centróide do i-ésimo retângulo aproximador R_i é seu centro $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i)\right)$. Sua área é $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$; assim, sua massa é

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

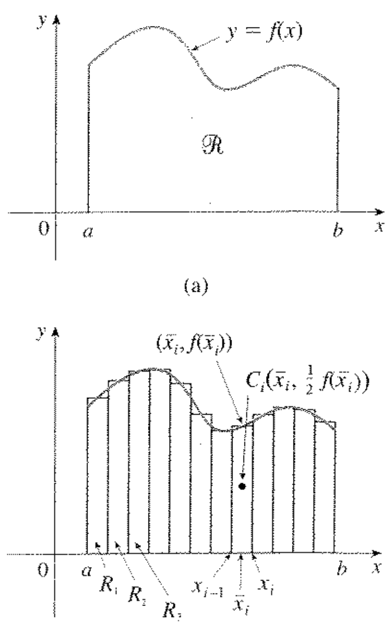


FIGURA 10

O momento de R_i ao redor do eixo y é o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y, que é $\bar{x}_i$. Então

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Somando esses momentos, obtemos o momento da aproximação poligonal a $\mathcal{R}$ e, então, tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos o momento do próprio $\mathcal{R}$ em relação ao eixo y:

$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

De maneira similar calculamos o momento de R_i em relação ao eixo x como o produto de sua massa e da distância de C_i ao eixo x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

Novamente somamos esses momentos e tomamos o limite para obter o momento de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x:

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

Como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido de maneira que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. Mas a massa da placa é o produto de sua densidade por sua área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

e assim

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b xf(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Note o cancelamento de ρ's. A localização do centro de massa independe da densidade.

Em resumo, o centro de massa da placa (ou o centróide de $\mathcal{R}$) está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

8

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

EXEMPLO 4 Calcule o centro de massa de uma placa semicircular de raio r.

SOLUÇÃO Para usarmos (8), colocamos o semicírculo como na Figura 11 de modo que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $a = -r$, $b = r$. Aqui não há a necessidade de usar a fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, pelo princípio da simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo y, e, dessa forma, $\bar{x} = 0$. A área do semicírculo é $A = \pi r^2/2$, e assim

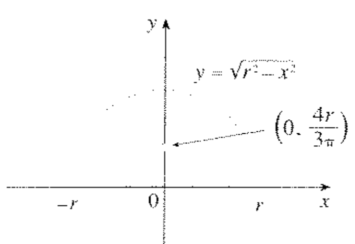


FIGURA 11

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi r^2/2} \cdot \tfrac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

O centro de massa está localizado no ponto $(0, 4r/(3\pi))$.

EXEMPLO 5 Encontre o centróide da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

SOLUÇÃO A área da região é

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

assim a Fórmula 8 dá

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

$$= x \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(por integração por partes)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\Big[x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

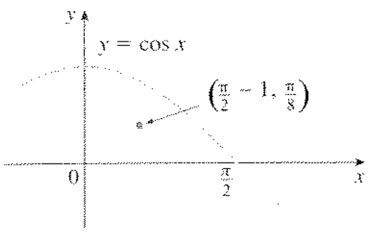


FIGURA 12

O centróide é $((\pi/2) - 1, \pi/8)$ e está mostrado na Figura 12. □

Se a região $\mathcal{R}$ está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$, como mostrado na Figura 13 , então o mesmo tipo de argumento que nos levou à Fórmula 8 pode ser usado para mostrar que o centróide $\mathcal{R}$ é $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

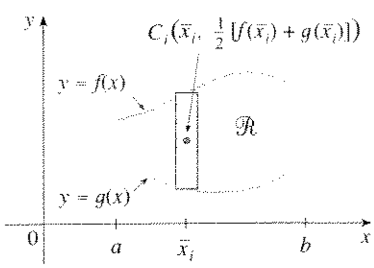


FIGURA 13

9 $$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Veja o Exercício 43.)

EXEMPLO 6 □ Encontre o centróide da região limitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO A região é esboçada na Figura 14. Tomamos $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$ e $b = 1$ na Fórmula 9. Primeiro notamos que a área da região é

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

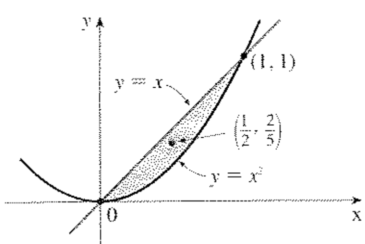


FIGURA 14

Portanto

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

O centróide é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$. □

Terminaremos esta seção mostrando uma conexão surpreendente entre centróides e volumes de revolução.

□ Esse teorema tem o nome do matemático grego Pappus de Alexandria, que viveu no século IV.

> **Teorema de Pappus** Seja $\mathcal{R}$ uma região plana que está inteiramente de um lado de uma reta l em um plano. Se $\mathcal{R}$ é girada ao redor de l, então o volume do sólido resultante é o produto da área A de $\mathcal{R}$ e a distância d percorrida pelo centróide de $\mathcal{R}$.

Prova Provaremos para o caso especial no qual a região está entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ como na Figura 13 e a reta l é o eixo y. Usando o método das cascas cilíndricas (veja a Seção 6.3) temos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(pela Fórmula 9)} \\ &= (2\pi\bar{x})A = Ad \end{aligned}$$

onde $d = 2\pi\bar{x}$ é a distância percorrida pelo centróide durante uma rotação ao redor do eixo y. □

EXEMPLO 7 □ Um toro é formado pela rotação de um círculo de raio r ao redor de uma reta no plano do círculo que está a uma distância R ($> r$) do centro do círculo. Calcule o volume do toro.

SOLUÇÃO O círculo tem a área $A = \pi r^2$. Pelo princípio de simetria, seu centróide é seu centro e, assim, a distância percorrida pelo centróide durante a rotação é $d = 2\pi R$. Portanto, pelo Teorema de Pappus, o volume do toro é

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$

□

O método do Exemplo 7 deve ser comparado com o do Exercício 61 na Seção 6.2.

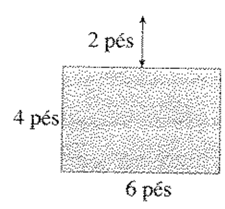
8.3 Exercícios

1. Um aquário de 5 pés de comprimento, 2 pés de largura e 3 pés de profundidade está cheio de água. Calcule (a) a pressão hidrostática no fundo do aquário, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em um extremo do aquário.

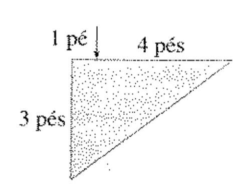
2. Uma piscina de 5 m de largura, 10 m de comprimento e 3 m de profundidade é preenchida com água do mar, de densidade 1.030 kg/m^3 a uma profundidade de 2,5 m. Calcule (a) a pressão hidrostática no fundo da piscina, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em um extremo da piscina.

3–9 □ Uma placa vertical é imersa na água e tem a forma indicada nas figuras a seguir. Explique como aproximar a força hidrostática na parede da placa usando uma soma de Riemann. Então expresse a força como uma integral e avalie-a.

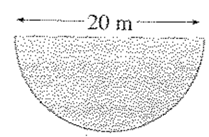
3.



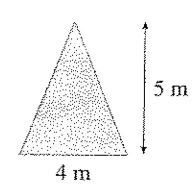
4.



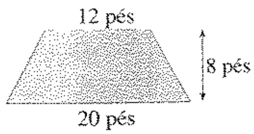
5.



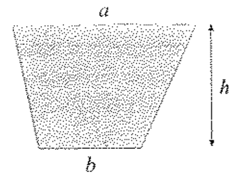
6.



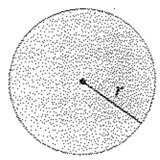
7.



8.



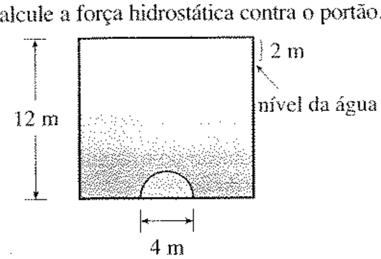
9.



10. Um tanque grande é projetado com os extremos no formato da região entre as curvas $y = x^2/2$ e $y = 12$, medidas em pés. Calcule a força hidrostática no extremo do tanque se ele estiver cheio a uma profundidade de 8 pés com gasolina. (Suponha que a densidade da gasolina é 42,0 lb/pé³.)

11. Um canal é preenchido com um líquido de densidade 840 kg/m³. Os extremos do canal são triângulos eqüiláteros com lados de 8 m de comprimento e o vértice no fundo. Calcule a força hidrostática em um extremo do canal.

12. Uma represa vertical tem um portão semicircular, como mostrado na figura. Calcule a força hidrostática contra o portão.



13. Um cubo com lados de 20 cm de comprimento está no fundo de um aquário no qual a água tem 1m de profundidade. Calcule a força hidrostática (a) no topo do cubo e (b) em um dos lados do cubo.

14. Uma represa está inclinada a um ângulo de 30° da vertical e tem o formato de um trapézio isósceles de 100 pés de largura no topo e 50 pés no fundo e uma geratriz de 70 pés. Calcule a força hidrostática na represa quando ela está cheia de água.

15. Uma piscina tem 20 pés de largura, 40 pés de comprimento e seu fundo é um plano inclinado. O extremo mais raso tem uma profundidade de 3 pés e o extremo mais fundo, 9 pés. Se a piscina estiver cheia de água, calcule a força hidrostática (a) no extremo mais raso, (b) no extremo mais fundo, (c) em um dos lados e (d) no fundo da piscina.

16. Suponha que uma placa esteja imersa verticalmente em um fluido com densidade ρ e que a largura da placa seja $w(x)$ a uma profundidade de x metros abaixo do nível da superfície do fluido. Se o topo da placa está a uma profundidade a e o fundo, a uma profundidade b, mostre que a força hidrostática sobre um lado da placa é

$$F = \int_a^b \rho g x w(x)\, dx$$

17. Uma placa vertical com forma irregular é imersa na água. A tabela mostra as medidas de suas larguras de acordo com a profundidade. Use a Regra de Simpson para estimar a força da água contra a placa.

Profundidade (m)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4,0	4,5	5,0
Largura da placa (m)	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,9	3,3	3,6

18. (a) Use a fórmula do Exercício 16 para mostrar que

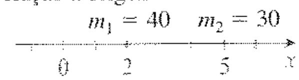
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da placa e A é sua área. Essa equação mostra que a força hidrostática contra uma região plana vertical seria a mesma se a região fosse horizontal e estivesse na mesma profundidade do centróide da região.

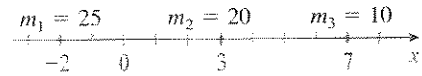
(b) Use o resultado da parte (a) para dar outra solução para o Exercício 9.

19–20 □ Os pontos de massa m_i estão localizados no eixo x conforme mostra a figura a seguir. Ache o momento M do sistema com relação à origem e o centro de massa $\bar{x}$.

19.



20.



21–22 □ As massas m_i estão localizadas nos pontos P_i. Ache os momentos M_x e M_y e o centro de massa do sistema.

21. $m_1 = 6, m_2 = 5, m_3 = 10$; $P_1(1, 5), P_2(3, -2), P_3(-2, -1)$

22. $m_1 = 6, m_2 = 5, m_3 = 1, m_4 = 4$;
$P_1(1, -2), P_2(3, 4), P_3(-3, -7), P_4(6, -1)$

23–26 □ Esboce a região limitada pelas curvas, e visualmente estime a localização do centróide. Então calcule as coordenadas exatas do centróide.

23. $y = 4 - x^2$, $y = 0$

24. $3x + 2y = 6$, $y = 0$, $x = 0$

25. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

26. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

27–31 □ Ache o centróide da região limitada pelas curvas.

27. $y = \sqrt{x}$, $y = x$

28. $y = x + 2$, $y = x^2$

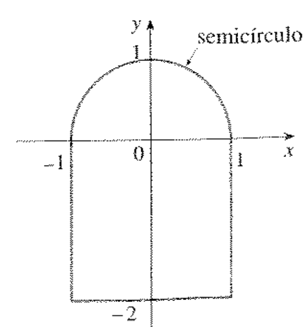
29. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$

30. $y = x$, $y = 0$, $y = 1/x$, $x = 2$

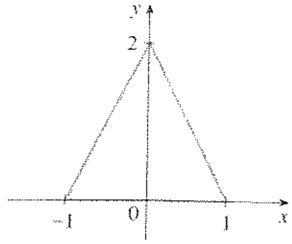
31. $x = 5 - y^2$, $x = 0$

32–34 □ Calcule os momentos M_x e M_y e o centro de massa de uma lâmina com dada densidade e formato:

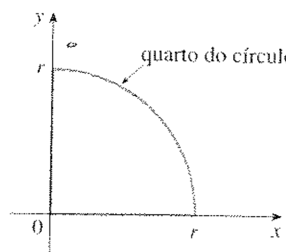
32. $\rho = 5$



33. $\rho = 1$



34. $\rho = 2$



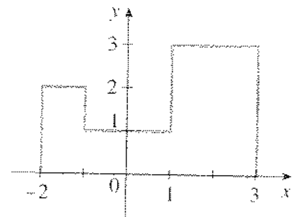
35. Calcule o centróide da região limitada pelas curvas $y = 2^x$ e $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, com precisão de três casas decimais. Esboce a região e desenhe o centróide para ver se sua resposta é razoável.

36. Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas no eixo x dos pontos de interseção das curvas $y = x + \ln x$ e $y = x^3 - x$. Então encontre (aproximadamente) o centróide da região limitada por essas curvas.

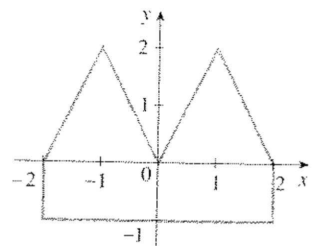
37. Prove que o centróide de qualquer triângulo está localizado no ponto de interseção das medianas. [*Sugestão*: Coloque os eixos de maneira que os vértices sejam $(a, 0)$, $(0, b)$ e $(c, 0)$. Lembre-se de que uma mediana é um segmento de reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Lembre-se também de que as medianas se interceptam em um ponto a dois terços da distância de cada vértice (ao longo da mediana) ao lado oposto.]

38–39 □ Encontre o centróide da região mostrada, não por integração, mas por localização dos centróides dos retângulos e triângulos (do Exercício 37) e usando aditividade dos momentos.

38.



39.



40–42 □ Use o Teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido dado.

40. Uma esfera de raio r (use o Exemplo 4).

41. Um cone com altura h e raio da base r.

42. O sólido obtido pela rotação do triângulo com vértices $(2, 3)$, $(2, 5)$ e $(5, 4)$ ao redor do eixo x.

43. Prove a Fórmula 9.

44. Seja $\mathcal{R}$ a região que está entre as curvas $y = x^m$ e $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, onde m e n são inteiros com $0 \leqslant n < m$.
(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.
(b) Encontre as coordenadas do centróide de $\mathcal{R}$.
(c) Tente encontrar valores de m e n tais que o centróide esteja fora de $\mathcal{R}$.

8.4 Aplicações à Economia e à Biologia

Nesta seção consideraremos algumas aplicações de integração à economia (excedente do consumidor) e à biologia (circulação sangüínea, capacidade cardíaca). Outras são descritas nos exercícios.

Excedente do Consumidor

Lembre-se da Seção 4.8, a qual mostra que a função demanda $p(x)$ é o preço que uma companhia tem de cobrar para vender x unidades de um produto. Geralmente, para vender maiores quantidades, é necessário abaixar os preços, assim a função demanda é uma função decrescente. O gráfico de uma típica função demanda, chamado **curva de demanda**, é mostrado na Figura 1. Se X é a quantidade do produto disponível, então $P = p(X)$ é o preço de venda corrente.

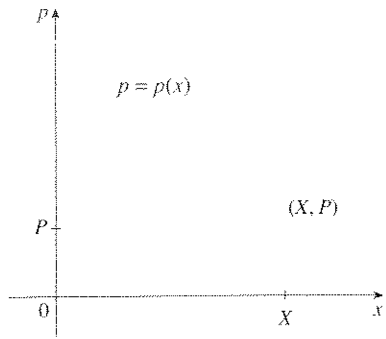


FIGURA 1
Curva típica de demanda

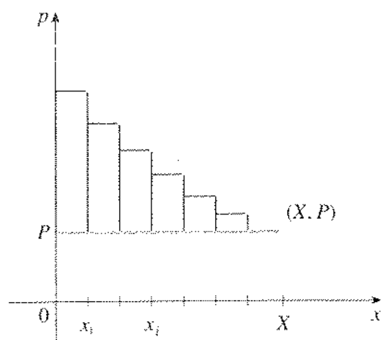


FIGURA 2

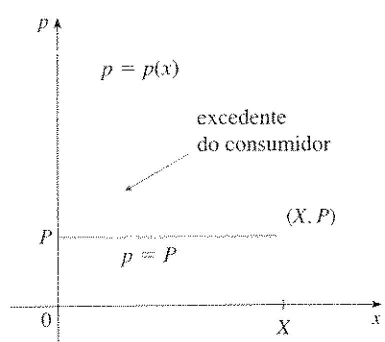


FIGURA 3

Dividimos o intervalo $[0, X]$ em n subintervalos, cada qual com o compriment $\Delta x = X/n$, e seja $x_i^* = x_i$ o extremo direito do i-ésimo subintervalo, como na Figura 2. S após as primeiras x_{i-1} unidades ter sido vendidas um total de apenas x_i unidades fica disponível e o preço unitário for marcado a $p(x_i)$ dólares, então as Δx unidades adicionai poderiam ter sido vendidas (mas não mais). Os consumidores que teriam pago $p(x_i)$ colo caram um preço alto no produto; eles teriam pago o que valeria para eles. Assim, pagand apenas P dólares eles economizaram uma quantia de

$$(\text{economia por unidade})(\text{número de unidades}) = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

Considerando os grupos semelhantes de possíveis consumidores para cada um dos subin tervalos e adicionando as economias, temos o total de economia:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Essa soma corresponde à área dos retângulos na Figura 2.) Se fizermos $n \to \infty$, então ess soma de Riemann aproxima a integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que os economistas chamam **excedente do consumidor** para o produto.

O excedente do consumidor representa a quantidade de dinheiro que os consumidore economizam ao comprar um produto pelo preço P, correspondente a uma quantidad demandada de X. A Figura 3 mostra a interpretação do excedente do consumidor como área sob a curva de demanda e acima da reta $p = P$.

EXEMPLO 1 A demanda por um produto é

$$p = 1.200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2$$

Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas é 500.

SOLUÇÃO Como o número de produtos vendidos é $X = 500$, o preço correspondente é

$$p = 1.200 - (0{,}2)(500) - (0{,}0001)(500)^2 = 1.075$$

Portanto, da Definição 1, o excedente do consumidor é

$$\int_0^{500} [p(x) - P]\, dx = \int_0^{500} (1.200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2 - 1.075)\, dx$$

$$= \int_0^{500} (125 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2)\, dx$$

$$= 125x - 0{,}1x^2 - (0{,}0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500}$$

$$= (125)(500) - (0{,}1)(500)^2 - \frac{(0{,}0001)(500)^3}{3}$$

$$= \$33.333{,}33$$

Circulação Sangüínea

No Exemplo 7 na Seção 3.3 discutimos a lei do fluxo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que dá a velocidade v do sangue que circula ao longo de um vaso sangüíneo com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central, onde P é a diferença de pressão entre os extremos do vaso sangüíneo e η, a viscosidade do sangue. Agora, para calcular a velocidade da circulação sangüínea, ou *fluxo* (volume por unidade de tempo), consideramos os raios menores igualmente espaçados $r_1, r_2, \ldots$. A área aproximada do anel com o raio interno r_{i-1} e o raio externo r_i é

$$2\pi r_i\, \Delta r \qquad \text{onde} \qquad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

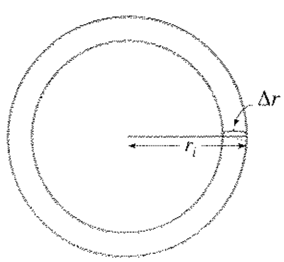


FIGURA 4

(Veja a Figura 4.) Se Δr é pequeno, então a velocidade é praticamente constante no anel e pode ser aproximada por $v(r_i)$. Então, o volume de sangue por unidade de tempo que circula pelo anel é aproximadamente

$$(2\pi r_i\, \Delta r)\, v(r_i) = 2\pi r_i v(r_i)\, \Delta r$$

e o volume total de sangue que circula através de uma secção transversal por unidade de tempo é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\, \Delta r$$

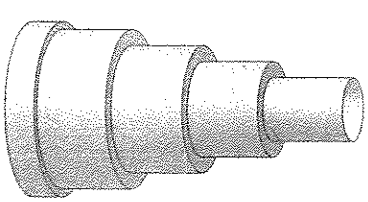


FIGURA 5

Essa aproximação está ilustrada na Figura 5. Note que a velocidade (e a partir de agora o volume por unidade de tempo) aumenta em direção ao centro do vaso sangüíneo. A aproximação torna-se melhor quando n aumenta. Quando tomamos o limite obtemos o valor exato do **fluxo** (ou *descarga*), que é o volume de sangue que passa através da secção transversal por unidade de tempo:

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\, \Delta r = \int_0^R 2\pi r v(r)\, dr$$

$$= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,dr$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

A equação resultante

$$F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l} \tag{2}$$

denominada **Lei de Poiseuille**, mostra que o fluxo é proporcional à quarta potência do raio do vaso sangüíneo.

Capacidade Cardíaca

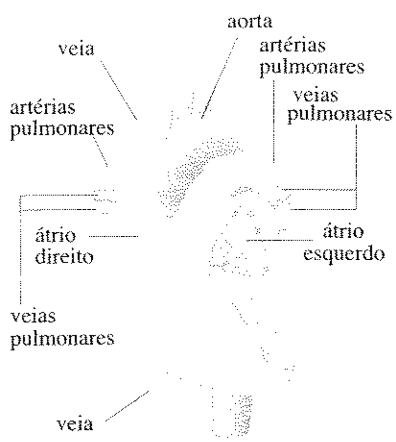


FIGURA 6

A Figura 6 mostra o sistema cardiovascular humano. O sangue retorna do corpo através das veias, entra no átrio direito do coração e é bombeado para os pulmões pelas artérias pulmonares para a oxigenação. Então volta para o átrio esquerdo por meio das veias pulmonares e daí circula para o resto do corpo através da aorta. A **capacidade cardíaca** do coração é o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo, isto é, a taxa de fluxo na aorta.

O *método da diluição* do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca. O contraste (corante) é injetado no átrio direito e flui através do coração na aorta. Uma sonda inserida na aorta mede a concentração do contraste saindo do coração a intervalos regulares de tempo durante um intervalo $[0, T]$ até que o contraste tenha terminado. Seja $c(t)$ a concentração do contraste no tempo t. Se dividirmos $[0, T]$ em subintervalos de igual comprimento Δt, então a quantidade de contraste que circula pelo ponto de medição durante o subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ é aproximadamente

$$(\text{concentração})(\text{volume}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

onde F é a taxa de circulação que estamos tentando determinar. Então a quantidade total de contraste é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

e fazendo $n \to \infty$, calculamos que a quantidade total de contraste é

$$A = F\int_0^T c(t)\,dt$$

Então, a capacidade cardíaca é dada por

$$F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^T c(t)\,dt} \tag{3}$$

onde a quantidade de contraste A é conhecida e a integral pode ser aproximada pelas leituras de concentração.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		

EXEMPLO 2 Uma quantidade de 5 mg de contraste é injetada no átrio direito. A concentração de contraste (em miligramas por litro) é medida na aorta a intervalos de 1 segundo, como mostrado na tabela. Estime a capacidade cardíaca.

SOLUÇÃO Aqui $A = 5$, $\Delta t = 1$ e $T = 10$. Usamos a Regra de Simpson para aproximar a integral da concentração:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0{,}4) + 2(2{,}8) + 4(6{,}5) + 2(9{,}8) + 4(8{,}9)\\ &\qquad + 2(6{,}1) + 4(4{,}0) + 2(2{,}3) + 4(1{,}1) + 0]\\ &\approx 41{,}87\end{aligned}$$

Então, a Fórmula 3 dá a capacidade cardíaca como

$$\begin{aligned}F &= \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41{,}87}\\ &\approx 0{,}12 \text{ L/s} = 7{,}2 \text{ L/min}\end{aligned}$$

8.4 Exercícios

1. A função custo marginal $C'(x)$ foi definida como a derivada da função custo. (Veja as Seções 3.3 e 4.8.) Se o custo marginal para produzir x metros de um tecido é $C'(x) = 5 - 0{,}008x + 0{,}000009x^2$ (medido em dólares por metro) e o custo fixo é $C(0) = \$\ 20.000$, use o Teorema da Variação Líquida para achar o custo de produzir as primeiras 2 mil unidades.

2. A receita marginal da venda de x unidades de um produto é $12 - 0{,}0004x$. Se a receita da venda das primeiras mil unidades é \$ 12.400, ache a receita de venda das primeiras 5 mil unidades?

3. O custo marginal de produção de x unidades de um determinado produto é $74 + 1{,}1x - 0{,}002x^2 + 0{,}00004x^3$ (em dólares por unidade). Encontre o aumento no custo da produção se o nível é aumentado de 1.200 para 1.600 unidades.

4. A função demanda para um certo produto é $p = 5 - x/10$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de venda é 30. Ilustre desenhando a curva de demanda e identificando o excedente do consumidor como uma área.

5. A curva de demanda é dada por $p = 450/(x + 8)$. Calcule o excedente do consumidor quando o preço de venda é \$ 10.

6. A **função oferta** $p_S(x)$ para um produto dá a relação entre o preço de venda e o número de unidades que os fabricantes produzirão naquele preço. Por um preço maior, os fabricantes produzirão mais unidades, assim p_S é uma função crescente de x. Seja X a quantidade de produto que é produzida atualmente e seja $P = p_S(X)$ o preço atual. Alguns fabricantes desejariam fazer e vender o produto por um preço mais baixo e, portanto, receber mais do que seu preço mínimo. O excesso é chamado **excedente do produtor**. Um argumento semelhante para o excedente do consumidor mostra que o excedente é dado pela integral
$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$
Calcule o excedente do produtor para a função oferta $p_S(x) = 3 + 0{,}01x^2$ ao nível de vendas $X = 10$. Ilustre desenhando a curva de oferta e identificando o excedente do produtor como uma área.

7. Se a curva de oferta é representada pela equação $p = 200 + 0{,}2x^{3/2}$, calcule o excedente do produtor se o preço de venda for de \$ 400.

8. Para um dado produto, o número de unidades produzidas e o preço por unidade é determinado pelas coordenadas do ponto de interseção das curvas de oferta e de demanda. Dadas as curvas de demanda $p = 50 - x/20$ e oferta $p = 20 + x/10$, calcule os excedentes do consumidor e do produtor. Ilustre esboçando o gráfico das curvas de oferta e de demanda e identificando as áreas de excedente.

9. Uma companhia modelou a curva de demanda para seu produto com
$$p = \frac{800.000e^{-x/5.000}}{x + 20.000}$$
Use um gráfico para estimar o nível de venda quando o preço de venda é \$ 16. Então calcule (aproximadamente) o excedente do consumidor para esse nível de venda.

10. Um cinema cobra \$ 7,50 por pessoa e está vendendo aproximadamente 400 ingressos em uma noite típica de semana.

Depois de pesquisar seus clientes, o cinema estima que, para cada 50 centavos de desconto, o número de freqüentadores aumenta 35 por noite. Calcule a função demanda e o excedente do consumidor quando as entradas são vendidas a \$ 6,00.

11. A quantidade de capital que uma companhia tem em um tempo t é $f(t)$, então a derivada, $f'(t)$, é chamada *fluxo líquido de investimento*. Suponha que o fluxo líquido de investimento seja $\sqrt{t}$ milhões de dólares por ano (onde t é medido em anos). Calcule o aumento no capital (a *formação de capital*) do quarto ao oitavo ano.

12. Um verão quente e úmido está causando uma explosão da população de mosquitos em uma cidade turística. O número de mosquitos está aumentando a uma taxa estimada de $2.200 + 10e^{0.8t}$ por semana (onde t é medido em semanas). De quanto aumenta a população de mosquitos entre a quinta e a nona semanas de verão?

13. Use a Lei de Poiseuille para calcular a taxa de fluxo em uma pequena artéria humana, onde podemos tomar $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4.000$ dinas/cm^2.

14. A pressão alta resulta da constrição das artérias. Para manter uma taxa normal de circulação (fluxo), o coração tem de bombear mais forte, aumentando assim a pressão sangüínea. Use a Lei de Poiseuille para mostrar que se R_0 e P_0 são valores normais para o raio e a pressão em uma artéria, e R e P, os valores para a artéria constrita, então, para o fluxo permanecer constante, P e R estão relacionados pela equação

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

Deduza que se o raio de uma artéria é reduzido para três quartos de seu valor normal, então a pressão é mais que triplicada.

15. O método da diluição do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca com 8 mg de contraste. As concentrações de contraste, em mg/L, são modeladas por $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t), 0 \leq t \leq 12$, onde t é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

16. Depois de uma injeção de 8 mg de contraste, as leituras de concentração do contraste a intervalos de dois segundos são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	12	3,9
2	2,4	14	2,3
4	5,1	16	1,6
6	7,8	18	0,7
8	7,6	20	0
10	5,4		

8.5 Probabilidade

O cálculo tem um papel na análise de comportamento aleatório. Suponha que consideremos o nível de colesterol de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de certa idade, ou a altura de uma mulher adulta escolhida aleatoriamente, ou a durabilidade de uma pilha de um certo tipo escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são chamadas **variáveis aleatórias contínuas**, porque seus valores variam em um intervalo de números reais, embora possam ser medidos ou registrados apenas com o inteiro mais próximo. Poderíamos querer saber a probabilidade de o nível de colesterol do sangue ser maior que 250, ou a probabilidade de a altura de uma mulher adulta estar entre 60 e 70 polegadas, ou a probabilidade de uma pilha nova durar entre 100 e 200 horas. Se X representar a durabilidade daquele tipo de bateria, denotamos essa última probabilidade como segue:

$$P(100 \leq X \leq 200)$$

De acordo com a interpretação "corrente" de probabilidade, esse número é a proporção a longo termo de todas as pilhas do tipo especificado com durabilidade entre 100 e 200 horas. Como isso representa uma proporção, a probabilidade naturalmente está entre 0 e 1.

Cada variável aleatória contínua X tem uma **função densidade de probabilidade** f. Isso significa que a probabilidade de X estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b:

$$\boxed{1} \qquad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de um modelo da função densidade de probabilidade f para uma variável aleatória X definida como a altura em polegadas de uma mulher norte-americana adulta (de acordo com dados do National Health Survey). A probabilidade de a altura da mulher escolhida aleatoriamente estar entre 60 e 70 polegadas é igual à área sob o gráfico de f de 60 a 70.

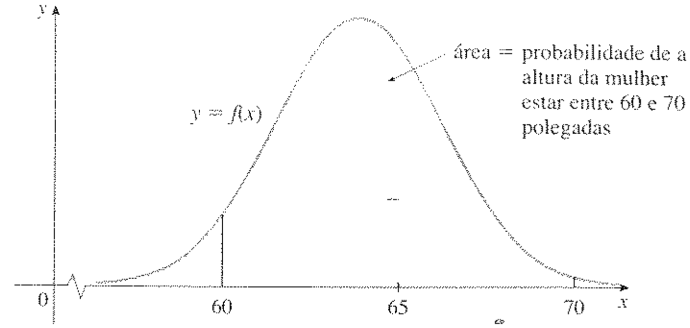


FIGURA 1

Função densidade de probabilidade para a altura de uma mulher adulta

Em geral, a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X satisfaz $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Como as probabilidades são medidas em uma escala de 0 até 1, segue que

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

EXEMPLO 1 Seja $f(x) = 0{,}006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x.

(a) Verifique que f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUÇÃO

(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ temos $0{,}006x(10 - x) \geqslant 0$, assim, $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Precisamos verificar também se a Equação 2 é satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_0^{10} 0{,}006x(10 - x)\,dx = 0{,}006\int_0^{10} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0{,}006(500 - \frac{1.000}{3}) = 1$$

Portanto, f é uma função densidade de probabilidade.

(b) A probabilidade de que X está entre 4 e 8 é

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_4^8 f(x)\,dx = 0{,}006\int_4^8 (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^8 = 0{,}544$$

EXEMPLO 2 Fenômenos como tempo de espera ou tempo de falha de um equipamento são comumente modelados por funções densidade de probabilidade exponencialmente decrescentes. Ache a forma exata de uma função desse tipo.

SOLUÇÃO Pense em uma variável aleatória como o tempo que você espera na linha antes de ser atendido por um funcionário da companhia que você está chamando. Assim, em vez de x, use t para representar o tempo, em minutos. Se f é a função densidade de probabilidade e você telefona em um tempo $t = 0$, então, pela Definição 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa a probabilidade de o funcionário responder dentro dos primeiros dois minutos, e $\int_4^5 f(t)\,dt$ é a probabilidade de sua chamada ser atendida no quinto minuto.

Está claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (o funcionário não pode atender antes de você fazer a ligação). Para $t > 0$ devemos usar uma função exponencial decrescente, isto é, uma função do tipo $f(t) = Ae^{-ct}$, onde A e c são constantes positivas. Então

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usamos a condição 2 para determinar o valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

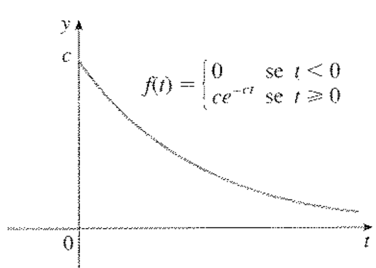


FIGURA 2

Função densidade exponencial

$$= \int_0^\infty Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x Ae^{-ct}\,dt$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{A}{c}e^{-ct}\right]_0^x = \lim_{x\to\infty}\frac{A}{c}(1-e^{-cx})$$
$$= \frac{A}{c}$$

Portanto, $A/c = 1$ e assim $A = c$. Então toda função densidade exponencial tem a forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Um gráfico típico é mostrado na Figura 2.

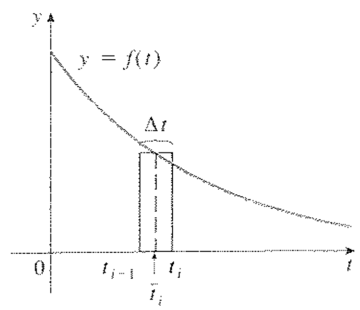


FIGURA 3

Valores Médios

Suponha que você esteja esperando que um funcionário da companhia que você chamou atenda sua ligação e que esteja pensando quanto tempo, em média, terá de aguardar. Seja $f(t)$ a correspondente função densidade, onde t é medido em minutos, e pense em uma amostragem de N pessoas que ligaram para essa companhia. Provavelmente nenhuma das pessoas teve de esperar mais que uma hora; assim, vamos restringir nossa atenção ao intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Vamos dividir o intervalo em n intervalos de comprimento igual a Δt e extremos $0, t_1, t_2, \ldots$. (Pense em Δt com a duração de 1 minuto, 10 segundos ou mesmo 1 segundo.) A probabilidade de a ligação de alguém ser atendida durante o período de tempo entre t_{i-1} e t_i é a área sob a curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que é aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Essa é a área de um retângulo aproximador na Figura 3, onde $\bar{t}_i$ é o ponto médio do intervalo).

Como a proporção de chamadas a longo termo que são respondidas em um período de tempo de t_{i-1} a t_i é $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, esperamos que, em nossa amostra de N pessoas que ligam, o número de chamadas respondidas nesse período de tempo seja aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ e o tempo de cada espera seja cerca de $\bar{t}_i$. Portanto o tempo total de espera é o produto desses números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Somando todos os intervalos, temos o tempo total aproximado de espera de todas as pessoas:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Se agora dividirmos pelo número de pessoas que ligam N, obteremos o *tempo* aproximado médio de espera:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Denotamos a média pela letra grega μ (mu).

Reconhecemos isso como uma soma de Riemann para a função $tf(t)$. À medida que o intervalo encolhe (isto é, $\Delta t \to 0$ e $n \to \infty$), essa soma de Riemann aproxima a integral

$$\int_0^{60} tf(t)\,dt$$

Essa integral é chamada *tempo médio de espera*.

Em geral, a **média** de qualquer função densidade de probabilidade f é definida como

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

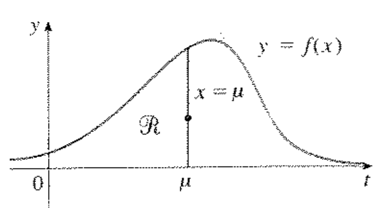


FIGURA 4

$\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto da reta $x = \mu$

A média pode ser interpretada como o valor médio a longo prazo da variável aleatória X. Também pode ser interpretada como uma medida de centralidade da função densidade de probabilidade.

A expressão para a média parece uma integral que vimos anteriormente. Se $\mathcal{R}$ é a região que está sob o gráfico de f, sabemos a partir da Fórmula 8 na Seção 8.3 que a coordenada x do centróide de $\mathcal{R}$ é

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \mu$$

por causa da Equação 2. Assim, uma placa fina no formato de $\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto sobre a reta vertical $x = \mu$. (Veja a Figura 4.)

EXEMPLO 3 □ Calcule a média da distribuição exponencial do Exemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO De acordo com a definição da média, temos

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} tce^{-ct}\,dt$$

Para avaliar essa integral usamos a integração por partes, com $u = t$ e $dv = ce^{-ct}\,dt$:

□ O limite do primeiro termo é 0, pela Regra de L'Hôspital.

$$\int_0^\infty tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\,dt\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{c}$$

A média é $\mu = 1/c$ e, assim, podemos reescrever a função densidade de probabilidade como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 4 □ Suponha que o tempo médio de espera para um cliente ser atendido pelo funcionário da firma para a qual ele está ligando seja 5 minutos.

(a) Calcule a probabilidade de a chamada ser respondida durante o primeiro minuto.

(b) Calcule a probabilidade de o consumidor esperar mais que cinco minutos para ser atendido.

SOLUÇÃO

(a) Nos foi dado que a média da distribuição exponencial é $\mu = 5$, e assim, pelo resultado do Exemplo 3, sabemos que a função densidade de probabilidade é

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 0{,}2e^{-t/5} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Então a probabilidade de a chamada ser respondida durante o primeiro minuto é

$$P(0 \leq T \leq 1) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 0{,}2e^{-t/5}\,dt$$

$$= 0{,}2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1/5} \approx 0{,}1813$$

Assim, cerca de 18% das chamadas dos clientes são respondidas durante o primeiro minuto.

(b) A probabilidade de o consumidor esperar mais que cinco minutos é

$$\begin{aligned} P(T > 5) &= \int_5^{\infty} f(t)\,dt = \int_5^{\infty} 0{,}2\,e^{-t/5}\,dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \int_5^{x} 0{,}2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5}) \\ &= \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \end{aligned}$$

Cerca de 37% dos consumidores esperam mais do que cinco minutos antes de terem sua chamada respondida.

Note o resultado do Exemplo 4(b): embora o tempo médio de espera seja 5 minutos, apenas 37% dos consumidores esperam mais que 5 minutos. A razão disso é que alguns clientes têm de esperar muito mais (talvez 10 ou 15 minutos), aumentando a média.

Outra medida de centralidade da função densidade de probabilidade é a *mediana*. Esse é um número m tal que metade das chamadas tem um tempo de espera menor que m, e as outras chamadas têm um tempo de espera maior que m. Em geral, a *mediana* de uma função densidade de probabilidade é o número m, tal que

$$\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Isso significa que metade da área sob o gráfico de f está à direita de m. No Exercício 7 pedimos para você mostrar que a média do tempo de espera para a companhia descrita no Exemplo 4 é de aproximadamente 3,5 minutos.

Distribuições Normais

Muitos fenômenos aleatórios importantes — tais como os resultados de testes de aptidão, alturas e pesos de indivíduos de uma população homogênea, a precipitação de chuva anual em uma dada localidade — são modelados por uma **distribuição normal**. Isso significa que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é um membro de uma família de funções

$$\boxed{3} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Você pode verificar que a média para essa função é μ. A constante positiva σ é denominada **desvio-padrão** e mede a dispersão dos valores de X. Dos gráficos com formato de sino dos membros da família na Figura 5, vemos que para os pequenos valores de σ, os valores de X estão agrupados ao redor da média, enquanto para os valores maiores que σ, os valores de X estão mais espalhados. Os estatísticos têm métodos para usar os grupos de dados para estimar μ e σ.

O desvio-padrão é simbolizado pela letra grega minúscula σ (sigma).

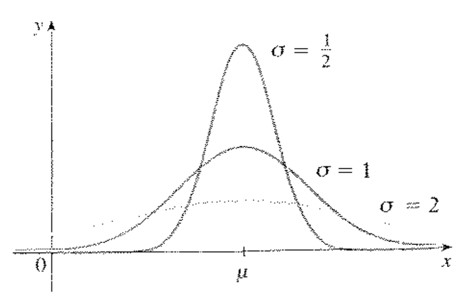


FIGURA 5
Distribuições normais

O fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ é necessário para fazer de f uma função densidade de probabilidade. De fato, pode ser verificado, usando-se métodos de cálculo de diversas variáveis, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx = 1$$

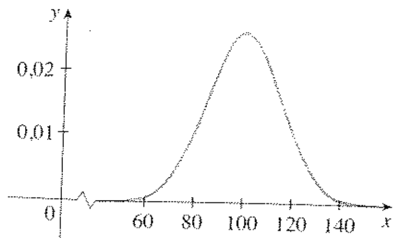


FIGURA 6
Distribuição de resultados de QI

EXEMPLO 5 □ Os resultados do Quociente de Inteligência (QI) têm distribuição normal com a média 100 e desvio-padrão 15. (A Figura 6 mostra a função densidade de probabilidade correspondente.)

(a) Qual a porcentagem da população com QI entre 85 e 115?

(b) Qual a porcentagem da população com QI acima de 140?

SOLUÇÃO

(a) Como os resultados do QI têm uma distribuição normal, utilizamos a função densidade de probabilidade dada pela Equação 3 com $\mu = 100$ e $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)} dx$$

Lembre-se de que, na Seção 7.5, a função $y = e^{-x^2}$ não tem antiderivada elementar, não podemos avaliar a integral exatamente. Mas podemos usar a capacidade de integração numérica de uma calculadora ou de um computador (ou a Regra do Ponto Médio ou a Regra de Simpson) para estimar a integral. Fazendo assim descobrimos que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0{,}68$$

Assim, cerca de 68% da população tem QI entre 85 e 115, isto é, dentro de um desvio-padrão da média.

(b) A probabilidade de o QI de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser maior que 140 é

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450} dx$$

Para evitar a integral imprópria poderíamos aproximá-la pela integral de 140 a 200. (Podemos afirmar com segurança que é extremamente raro encontrarmos pessoas com QI maior que 200.) Então

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450} dx \approx 0{,}0038$$

Portanto, cerca de 0,4% da população tem QI acima de 140.

8.5 Exercícios

1. Seja $f(x)$ a função densidade de probabilidade da durabilidade de um pneu de alta qualidade, onde x é medido em milhas. Explique o significado de cada integral.

(a) $\int_{30.000}^{40.000} f(x)\,dx$ (b) $\int_{25.000}^{\infty} f(x)\,dx$

2. Seja $f(t)$ a função densidade de probabilidade para o tempo que você leva para ir para a escola de manhã, onde t é medido em minutos. Expresse as seguintes probabilidades como integrais.

(a) A probabilidade de que você chegue na escola em menos de 15 minutos.

(b) A probabilidade de que você demore mais que meia hora para chegar à escola.

3. Seja $f(x) = \frac{3}{64} x\sqrt{16 - x^2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$ e $f(x) = 0$ para todos os outros valores de x.

(a) Verifique se f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(X < 2)$.

4. Seja $f(x) = kx^2(1 - x)$ se $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$ ou $x > 1$.

(a) Para quais valores de k a função f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Para o valor de k, calcule $P(X \geqslant \frac{1}{2})$.

(c) Calcule a média.

5. A seta de um jogo de mesa indica aleatoriamente um número real entre 0 e 10. A seta é honesta, no sentido de que indica um número em um dado intervalo com a mesma probabilidade que indica um número em qualquer outro intervalo com o mesmo comprimento.

(a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

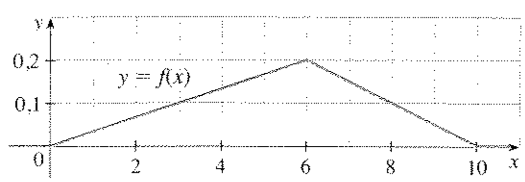
é uma função densidade de probabilidade para os valores da seta.

(b) O que sua intuição lhe diz sobre o valor da média? Verifique seu palpite avaliando uma integral.

6. (a) Explique por que a função cujo gráfico é mostrado é uma função densidade de probabilidade.

(b) Use o gráfico para encontrar as seguintes probabilidades:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$

(c) Calcule a média.



7. Mostre que a mediana do tempo de espera para uma chamada para a companhia descrita no Exemplo 3 é de cerca de 3,5 minutos.

8. (a) Um tipo de lâmpada é rotulado como tendo uma vida útil média de 1.000 horas. É razoável modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1.000$. Use esse modelo para encontrar a probabilidade de uma lâmpada:
(i) falhar durante as primeiras 200 horas;
(ii) ficar funcionando por mais de 800 horas.

(b) Qual a mediana da durabilidade dessas lâmpadas?

9. A gerente de um restaurante *fast-food* determina que o tempo médio de espera de seus clientes para serem atendidos seja de 2,5 minutos.

(a) Calcule a probabilidade de um cliente ter de esperar por mais de 4 minutos.

(b) Calcule a probabilidade de um cliente ser servido dentro dos primeiros 2 minutos.

(c) A gerente quer fazer uma propaganda dizendo que se o cliente não for atendido dentro de um certo número de minutos ele receberá um hambúrguer de graça. Mas ela não quer dar hambúrgueres grátis para mais que 2% de seus clientes. O que deve dizer a propaganda?

10. De acordo com o National Health Survey, a altura de homens adultos nos Estados Unidos tem uma distribuição normal com média de 69 polegadas e desvio-padrão de 2,8 polegadas.

(a) Qual a probabilidade de um homem adulto escolhido aleatoriamente ter entre 65 e 73 polegadas?

(b) Qual a porcentagem de homens adultos com mais de 6 pés?

11. O "Projeto Garbage", da Universidade do Arizona, relata que a quantidade de papel descartada pelas casas por semana tem uma distribuição normal com média de 9,4 lb e desvio-padrão de 4,2 lb. Qual a porcentagem de casas que jogam fora pelo menos 10 lb de papel por semana?

12. Caixas são rotuladas contendo 500 g de cereal. A máquina que enche as caixas produz pesos que têm distribuição normal com desvio-padrão de 12 g.

(a) Se o peso-alvo é de 500 g, qual a probabilidade de a máquina produzir uma caixa com menos de 480 g de cereal?

(b) Suponha que uma lei estabeleça que não pode haver mais que 5% de caixas de cereal manufaturadas com menos de 500 g. A que peso-alvo deve o fabricante aferir suas máquinas?

13. Para qualquer distribuição normal, calcule a probabilidade de uma variável aleatória estar dentro de dois desvios-padrão da média.

14. O desvio-padrão para uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f e média μ é definido como

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx \right]^{1/2}$$

Calcule o desvio-padrão para uma função densidade exponencial com média μ.

15. O átomo de hidrogênio é composto por um próton no núcleo e um elétron, que se move ao redor do núcleo. Na teoria quântica de estrutura atômica supõe-se que o elétron não se mova em uma órbita bem definida. Ao contrário, ele ocupa um estado conhecido como *orbital*, que pode ser pensado como uma "nuvem" de carga negativa rodeando o núcleo. No estado de energia mais baixa, chamado *estado fundamental*, ou *orbital 1s*, presume-se que o formato do orbital é uma esfera com centro no núcleo. Essa esfera é descrita em termos da função de densidade de probabilidade

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

onde a_0 é o *raio de Bohr* ($a_0 \approx 5{,}59 \times 10^{-11}$ m). A integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0}\,ds$$

dá a probabilidade de o elétron ser encontrado dentro da esfera de raio r metros centrada no núcleo.

(a) Verifique que $p(r)$ é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $\lim_{r \to \infty} p(r)$. Para que valor de r a função $p(r)$ tem seu valor máximo?

(c) Desenhe a função densidade.

(d) Calcule a probabilidade de o elétron estar dentro da esfera de raio $4a_0$ centrada no núcleo.

(e) Calcule a distância média do elétron a partir do núcleo no estado fundamental do átomo de hidrogênio.

8 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

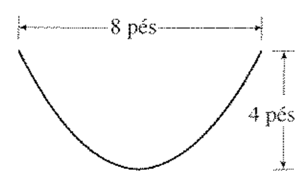
1. (a) Como o comprimento de uma curva é definido?
   (b) Escreva uma expressão para o comprimento de uma curva suave dada por $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.
   (c) O que acontece se x é dado como uma função de y?
2. (a) Escreva uma expressão para a área de uma superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, ao redor do eixo x.
   (b) O que acontece se x é dado como uma função de y?
   (c) O que acontece se a curva é girada ao redor do eixo y?
3. Descreva como podemos calcular a força hidrostática contra uma parede vertical submersa em um fluido.
4. (a) Qual é o significado físico do centro de massa de uma placa fina?
   (b) Se a placa está entre $y = f(x)$ e $y = 0$, onde $a \leqslant x \leqslant b$, escreva expressões para as coordenadas do centro de massa.
5. O que diz o Teorema de Pappus?
6. Dada uma função demanda $p(x)$, explique o significado do excedente do consumidor quando a quantidade de produto disponível é X e o preço de venda é P. Ilustre com um esboço.
7. (a) O que é a capacidade cardíaca do coração?
   (b) Explique como a capacidade cardíaca pode ser medida pelo método de diluição do contraste.
8. O que é função densidade de probabilidade? Quais as propriedades dessa função?
9. Suponha que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade para os pesos de universitárias, onde x é medido em libras.
   (a) Qual o significado da integral $\int_0^{100} f(x)\,dx$?
   (b) Escreva uma expressão para a média dessa função densidade.
   (c) Como podemos calcular a mediana dessa função densidade?
10. Qual é a distribuição normal? Qual é o significado do desvio-padrão?

EXERCÍCIOS

1–2 Calcule o comprimento da curva.

1. $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$
2. $y = 2 \ln \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x), \quad \pi/3 \leqslant x \leqslant 3$

3. (a) Calcule o comprimento da curva.
$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$$
   (b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva descrita em (a) em torno do eixo y.
4. (a) A curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, é rotacionada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.
   (b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em (a) em torno do eixo x.
5. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento da curva $y = e^{-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
6. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área da superfície obtida pela rotação da curva dada no Exercício 5 em torno do eixo x.
7. Calcule o comprimento da curva
$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\,dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$
8. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva do Exercício 7 em torno do eixo y.
9. Um portão em um canal de irrigação é construído no formato de um trapézio de 3 pés de largura no fundo, 5 pés de largura no topo e 2 pés de altura. Ele é colocado verticalmente no canal, com água até seu topo. Calcule a força hidrostática em um lado do portão.
10. Um canal é preenchido com água e suas extremidades verticais têm o formato da região parabólica da figura. Calcule a força hidrostática em uma extremidade do canal.

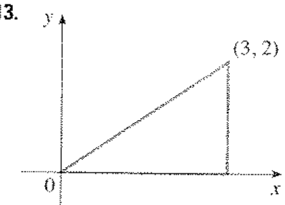


11–12 Calcule o centróide da região limitada pelas curvas dadas.

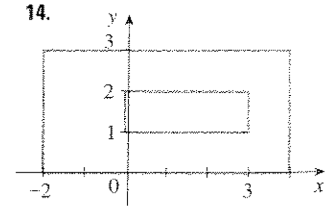
11. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$
12. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13–14 Calcule o centróide da região mostrada.

13.



14.



15. Calcule o volume obtido quando o círculo de raio 1 com centro $(1, 0)$ é girado ao redor do eixo y.

16. Use o Teorema de Pappus e o fato de que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$ para calcular o centróide da região semicircular limitada pela curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x.

17. A função demanda para um produto é dada por $p = 2.000 - 0{,}1x - 0{,}01x^2$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas é 100.

18. Depois de uma injeção de 6 mg de contraste no coração, as leituras da concentração de contraste a intervalos de 2 segundos são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4,7
2	1,9	16	3,3
4	3,3	18	2,1
6	5,1	20	1,1
8	7,6	22	0,5
10	7,1	24	0
12	5,8		

19. (a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(X < 4)$.

(c) Calcule a média. É esse o valor que você esperaria?

20. A gravidez humana tem uma distribuição normal com média de 268 dias e desvio-padrão de 15 dias. Qual a porcentagem d tempos de gravidez que duram entre 250 e 280 dias?

21. O tempo de espera na fila de um certo banco é modelado por uma função densidade exponencial com média de 8 minutos.

(a) Qual a probabilidade de o cliente ser atendido nos primeiros 3 minutos?

(b) Qual a probabilidade de o cliente ter de esperar mais de 10 minutos?

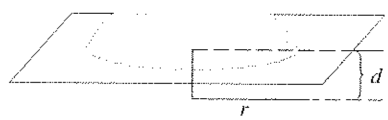
(c) Qual é a mediana do tempo de espera?

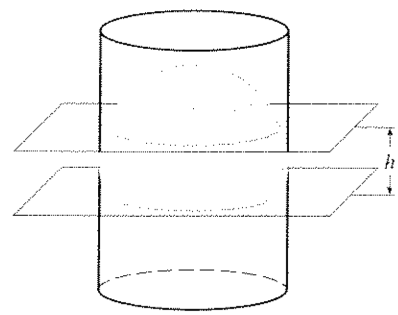
Problemas Quentes

1. Calcule a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4y\}$.

2. Calcule o centróide da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^3 - x^4$.

3. Se uma esfera de raio r é fatiada por um plano cuja distância do centro da esfera é d, então a esfera é dividida em dois pedaços, chamados segmentos de mesma base. As superfícies correspondentes são denominadas *zonas esféricas de mesma base*.
   (a) Determine as áreas das superfícies das duas zonas esféricas indicadas na figura.
   (b) Determine a área aproximada do oceano Ártico presumindo que ele é aproximadamente circular no formato, com o centro no pólo norte e "circunferência" a 75 graus de latitude norte. Use $r = 3.960$ milhas para o raio da Terra.
   (c) Uma esfera de raio r é inscrita em um cilindro circular reto de raio r. Dois planos perpendiculares ao eixo central do cilindro e separados a uma distância h cortam uma *zona esférica de duas bases* na esfera. Mostre que a área da superfície da zona esférica se iguala à área da superfície da região em que os dois planos cortam no cilindro.
   (d) A *Zona Tórrida* é uma região na superfície da Terra que está entre o Trópico de Câncer (23,45 graus de latitude norte) e o Trópico de Capricórnio (23,45 graus de latitude sul). Qual é a área da Zona Tórrida?





4. (a) Mostre que um observador a uma altura H acima do pólo norte de uma esfera de raio r pode ver uma parte da esfera que tem a área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

   (b) Duas esferas com raios r e R estão colocadas de modo que a distância entre seus centros é d, onde $d > r + R$. Onde deve ser colocada uma luz na reta que liga os centros de modo a iluminar a maior área total de superfície?

5. Suponha que a densidade da água do mar, $\rho = \rho(z)$, varie com a profundidade z abaixo da superfície.
   (a) Mostre que a pressão hidrostática é regida pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$

   onde g é a aceleração da gravidade. Seja P_0 e ρ_0 a pressão e a densidade em $z = 0$. Expresse a pressão a uma profundidade z como uma integral.
   (b) Suponha que a densidade da água do mar a uma profundidade z é dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, onde H é uma constante positiva. Calcule a força total, expressa como uma integral, exercida sobre uma janela vertical circular de raio r cujo centro está a uma distância $L > r$ abaixo da superfície.

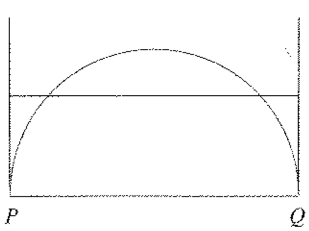


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

6. A figura mostra um semicírculo de raio 1, diâmetro horizontal PQ e retas tangentes em P e Q. A que altura acima do diâmetro deve ser colocada uma linha horizontal de modo a minimizar a área sombreada?

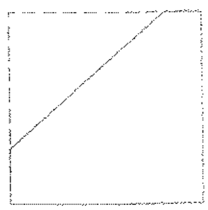
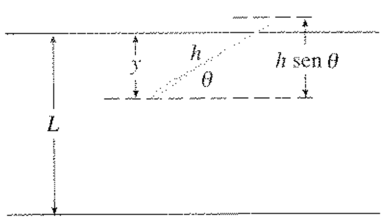


FIGURA PARA O PROBLEMA 10



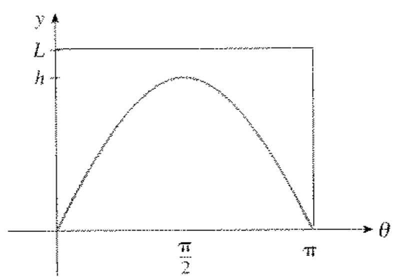


FIGURA PARA O PROBLEMA 11

7. Seja P uma pirâmide de base quadrada de lado $2b$ e suponha que S é uma esfera com centro na base de P e tangente a todos os oito vértices de P. Calcule a altura de P. Então calcule o volume da interseção de S e P.

8. Considere uma placa metálica fina plana colocada verticalmente sob a água com seu topo 2 m abaixo da superfície da água. Determine um formato para a placa de maneira que, se ela for dividida em qualquer número de faixas horizontais de mesma altura, a força hidrostática em cada faixa seja a mesma.

9. Um disco uniforme de raio 1 está para ser cortado por uma corda de modo que o centro de massa do menor pedaço se encontre na metade do caminho ao longo de um raio. Quão próximo do centro do disco deve ser efetuado o corte? (Expresse sua resposta com correção de duas casas decimais.)

10. Um triângulo com área 30 cm² é retirado do vértice de um quadrado de lado 10 cm, como mostrado na figura. Se o centróide da região restante está a 4 cm do lado direito do quadrado, quão longe ele está da base do quadrado?

11. Em um famoso problema do século XVIII, conhecido como o *problema da agulha de Buffon*, uma agulha de comprimento h é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa) na qual retas paralelas separadas por L unidades, $L \geqslant h$, foram desenhadas. O problema é determinar a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas. Suponha que as retas estão na direção leste para oeste, paralelas ao eixo x em um sistema de coordenadas retangular (como na figura). Seja y a distância da ponta "sul" da agulha até a reta mais próxima ao norte. (Se a ponta "sul" da agulha está na reta, considere $y = 0$. Se a agulha estiver na direção leste-oeste, considere a ponta "oeste" como a ponta "sul".) Seja θ o ângulo que a agulha faz com um raio se estendendo na direção leste da ponta "sul". Então $0 \leqslant y \leqslant L$ e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Note que a agulha intercepta uma das retas apenas quando $y < h \operatorname{sen} \theta$. Agora, o conjunto de todas as possibilidades para a agulha pode ser identificado com a região retangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, e a proporção de vezes que a agulha intercepta uma reta é a razão

$$\frac{\text{área sob } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área do retângulo}}$$

Essa razão é a probabilidade de a agulha interceptar uma reta. Calcule a probabilidade de a agulha interceptar uma reta se $h = L$. O que ocorre se $h = L/2$?

12. Se a agulha do Problema 11 tiver o comprimento $h > L$, é possível para a agulha interceptar mais de uma reta.

(a) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar pelo menos uma reta.
[*Sugestão:* Podemos proceder como no Problema 11. Defina y como anteriormente; então o conjunto total de possibilidades para a agulha pode ser identificado com a mesma região retangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Qual porção do retângulo corresponde à agulha interceptando uma reta?]

(b) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar *duas* retas.

(c) Se $2L < h \leqslant 3L$, encontre uma fórmula geral para a probabilidade de a agulha interceptar três retas.

Apêndices

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos

O cálculo está baseado no sistema de números reais. Comecemos com os **inteiros**:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Então construímos os **números racionais**, que são as razões de inteiros. Assim, qualquer número racional r pode ser expresso como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{onde } m \text{ e } n \text{ são os inteiros e } n \neq 0$$

Exemplos:

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0{,}17 = \tfrac{17}{100}$$

(Lembre-se de que a divisão por 0 está sempre excluída; logo, as expressões como $\frac{3}{0}$ e $\frac{0}{0}$ são não definidas.) Alguns números reais, como $\sqrt{2}$, não podem ser expressos como a razão de números inteiros e são, portanto, chamados **números irracionais**. Pode ser mostrado, com variados graus de dificuldade, que os números a seguir são irracionais:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \operatorname{sen} 1^\circ \qquad \log_{10} 2$$

O conjunto de todos os números reais é geralmente denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Quando usarmos a palavra *número* sem qualificativo, devemos entender "número real".

Todo número tem uma representação decimal. Se o número for racional, então a decimal correspondente é repetida. Por exemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0{,}317171717\ldots = 0{,}3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1{,}\overline{285714}$$

(A barra indica que a seqüência de dígitos se repete indefinidamente.) Caso contrário, se o número for irracional, a decimal não se repetirá:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots \qquad \pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Ao pararmos a expansão decimal de qualquer número em uma certa casa decimal, obtemos uma aproximação dele. Por exemplo, podemos escrever

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

onde o símbolo $\approx$ deve ser lido como "é aproximadamente igual a". Quanto mais casas decimais forem retidas melhor será a aproximação obtida.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, como na Figura 1. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha. Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem**, que corresponde ao número real 0. Dada qualquer unidade conveniente de medida, cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita, da origem e cada número ne-gativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está x unidades de distância, à esquerda, da origem. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e a todo ponto P sobre a reta corresponde exatamente um único número real. O número real associado ao ponto P é chamado **coordenada** de P, e a reta é dita então **eixo coordenado**, ou **eixo dos números reais**, ou simplesmente **eixo real**. Freqüentemente identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos um número como um ponto no eixo real.

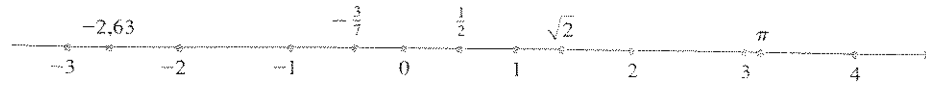


FIGURA 1

Os números reais são ordenados. Dizemos que *a é menor que b* e escrevemos $a < b$ se $b - a$ for um número positivo. Geometricamente, isso significa que a está à esquerda de b sobre o eixo real. (De maneira equivalente, dizemos que *b é maior que a* e escrevemos $b > a$). O símbolo $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) significa que ou $a < b$ ou $a = b$ e deve ser lido como "a é menor que ou igual a b". Por exemplo, são verdadeiras as seguintes desigualdades:

$$7 < 7{,}4 < 7{,}5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

A seguir, vamos precisar usar a *notação de conjunto*. Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** do conjunto. Se S for um conjunto, a notação $a \in S$ significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Por exemplo, se Z representa o conjunto dos inteiros, então $-3 \in Z$ mas $\pi \notin Z$. Se S e T forem conjuntos, então sua **união** $S \cup T$ é o conjunto que consiste em todos os elementos que estão em S ou T (ou ambos S e T). A **interseção** de S e T é o conjunto $S \cap T$ que consiste em todos os elementos que estão em S e T. Em outras palavras, $S \cap T$ é a parte comum a S e a T. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é aquele que não contém nenhum elemento.

Alguns conjuntos podem ser descritos fazendo-se uma lista de seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A consistindo em todos os inteiros positivos menores que 7 pode ser escrito como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos também escrever A na notação construtora de conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}$$

que deve ser lido como "A é o conjunto dos x tal que x é um inteiro e $0 < x < 7$".

Intervalos

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos**, ocorrem freqüentemente no cálculo e correspondem geometricamente a segmentos de reta. Por exemplo, se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b). Usando a notação construtora de conjuntos, podemos escrever

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

FIGURA 2
Intervalo aberto (a, b)

Note que os pontos extremos do intervalo — isto é, a e b — estão excluídos. Isso é indicado por ( ) e pelas bolinhas vazias na Figura 2. O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

FIGURA 3
Intervalo fechado $[a, b]$

Aqui os pontos extremos do intervalo estão incluídos, e isso é indicado pelos colchetes [ ] e pelas bolinhas cheias na Figura 3. Também é possível incluir somente um ponto extremo em um intervalo, conforme mostrado na Tabela 1.

1 Tabela de Intervalos

□ A Tabela 1 dá uma lista dos nove tipos possíveis de intervalos. Em todos os casos, supomos $a < b$.

Notação	Descrição do conjunto	Gráfico
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	

É necessário também considerar os intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Isso não significa que ∞ ("infinito") seja um número. A notação (a, ∞) representa o conjunto de todos os números maiores que a; dessa forma, o símbolo ∞ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

Desigualdades

Quando trabalhar com as desigualdades, observe as seguintes regras:

2 Regras para as Desigualdades

1. Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
5. Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

A Regra nº 1 determina que podemos adicionar qualquer número a ambos os lados de uma desigualdade e a Regra nº 2 estabelece que duas desigualdades podem ser adicionadas. Porém, devemos ter cuidado com a multiplicação. A Regra nº 3 institui que podemos multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo, mas a Regra nº 4 estabelece que *se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, então reverteremos a direção da desigualdade*. Por exemplo, se considerarmos a desigualdade $3 < 5$ e a multiplicarmos por 2, obteremos $6 < 10$, mas se a multiplicarmos por -2, obteremos $-6 > -10$. Finalmente, a Regra nº 5 determina que se tomarmos recíprocos, então revertemos a direção de uma desigualdade (desde que os números sejam positivos).

EXEMPLO 1 □ Resolva a desigualdade $1 + x < 7x + 5$.

SOLUÇÃO A desigualdade dada é satisfeita por alguns valores de x, mas não por outros. *Resolver* uma desigualdade significa determinar o conjunto dos números x para os quais a desigualdade é verdadeira. É conhecido como *conjunto solução*.

Primeiro, subtraímos 1 de cada lado da desigualdade (usando a Regra nº 1 com $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Então subtraímos $7x$ de ambos os lados (Regra nº 1 com $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Vamos dividir agora ambos os lados por -6 (Regra nº 4 com $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Esses passos podem ser todos revertidos; dessa forma, o conjunto solução consiste em todos os números maiores que $-\frac{2}{3}$. Em outras palavras, a solução da desigualdade é o intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$.

EXEMPLO 2 Resolva as desigualdades $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUÇÃO Aqui o conjunto solução consiste em todos os valores de x que satisfazem a ambas as desigualdades. Usando as regras dadas em (2) vemos que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$4 \leqslant 3x - 2 < 13$$

$$6 \leqslant 3x < 15 \qquad \text{(adicionando 2)}$$

$$2 \leqslant x < 5 \qquad \text{(dividindo por 3)}$$

Portanto, o conjunto solução é $[2, 5)$.

EXEMPLO 3 Resolva a desigualdade $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos fatorar o lado esquerdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que a equação correspondente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tem as soluções 2 e 3. Os números 2 e 3 dividem o eixo real em três intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

O método visual de se resolver o Exemplo 3 é usar um recurso gráfico para esboçar a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como na Figura 4) e observar se a curva está abaixo ou acima do eixo x quando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

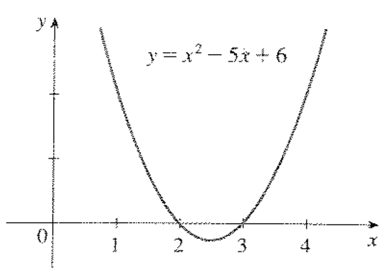


FIGURA 4

Em cada um desses intervalos determinamos os sinais dos fatores. Por exemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Vamos então registrar esses sinais na seguinte tabela:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Outro método para obter a informação da tabela é usar os *valores-testes*. Por exemplo, se usarmos o valor-teste $x = 1$ para o intervalo $(-\infty, 2)$, então, substituindo em $x^2 - 5x + 6$, obteremos

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

O polinômio $x^2 - 5x + 6$ não muda de sinal dentro de cada um dos três intervalos: logo, concluímos que é positivo em $(-\infty, 2)$.

Então concluímos da tabela que $(x - 2)(x - 3)$ é negativo quando $2 < x < 3$. Logo a solução da desigualdade $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ é

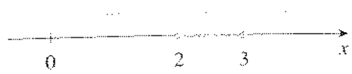


FIGURA 5

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

Observe que incluímos os extremos 2 e 3, pois estávamos procurando os valores de x tais que o produto fosse negativo ou zero. A solução está ilustrada na Figura 5.

EXEMPLO 4 Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUÇÃO Primeiro deixamos todos os termos não nulos de um lado do sinal de desigualdade e então fatoramos a expressão resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Como no Exemplo 3, vamos resolver a equação correspondente $x(x - 1)(x + 4) = 0$ e usar as soluções $x = -4$, $x = 0$ e $x = 1$ para dividir o eixo real em quatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$, e $(1, \infty)$. Em cada intervalo o produto mantém um sinal constante, conforme mostra a tabela:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Vemos a partir da tabela que o conjunto solução é

FIGURA 6

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ ou } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

A solução está ilustrada na Figura 6.

Valor Absoluto

O **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real. Como as distâncias são sempre positivas ou 0, então temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ é positivo.

3

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{se } a < 0 \end{array}}$$

EXEMPLO 5 Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de valor absoluto.

SOLUÇÃO

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Lembre-se de que o símbolo $\sqrt{\ }$ significa "raiz quadrada positiva de". Logo, $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ e $s \geqslant 0$. Portanto a equação $\sqrt{a^2} = a$ não é sempre verdadeira. Só é verdadeira quando $a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$; portanto, temos $\sqrt{a^2} = -a$. Em vista de (3), temos então a equação

4 $$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

que é verdadeira para todos os valores a.

As sugestões para as demonstrações das propriedades a seguir serão dadas nos exercícios.

5 **Propriedades dos Valores Absolutos** Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as desigualdades envolvendo os valores absolutos, é freqüentemente muito proveitoso usar as seguintes afirmativas.

6 Suponhamos $a > 0$. então:

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$

5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$

6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

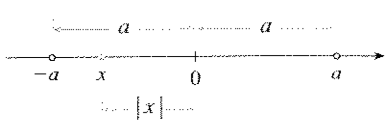


FIGURA 7

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ estabelece que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$ (veja a Figura 8).

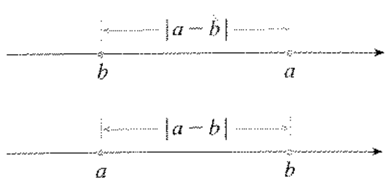


FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta $= |a - b|$

EXEMPLO 6 Resolva $|2x - 5| = 3$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 4 de (6), $|2x - 5| = 3$ é equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = -3$$

Logo, $2x = 8$, ou $2x = 2$. Portanto, $x = 4$, ou $x = 1$.

EXEMPLO 7 ◻ Resolva $|x - 5| < 2$.

SOLUÇÃO 1 Pela propriedade 5 de (6), $|x - 5| < 2$ é equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Assim, adicionando 5 a cada lado, temos

$$3 < x < 7$$

e o conjunto solução é o intervalo $(3, 7)$.

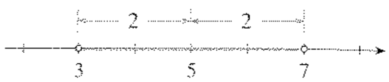


FIGURA 9

SOLUÇÃO 2 Geometricamente, o conjunto solução consiste em todos os números x cuja distância de 5 é menor que 2. Da Figura 9 vemos que esse intervalo é $(3, 7)$.

EXEMPLO 8 ◻ Resolva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUÇÃO Pelas propriedades 4 e 6 de (6), $|3x + 2| \geqslant 4$ é equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

No primeiro caso $3x \geqslant 2$, o que resulta em $x \geqslant \frac{2}{3}$. No segundo caso $3x \leqslant -6$, o que resulta em $x \leqslant -2$. Logo o conjunto solução é

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$

Outra propriedade importante do valor absoluto, denominada Desigualdade Triangular, é freqüentemente usada não apenas no cálculo, mas em geral para toda a matemática.

7 A Desigualdade Triangular Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que se os números a e b forem ambos positivos ou negativos, então os dois lados na Desigualdade Triangular serão realmente iguais. Mas se a e b tiverem sinais opostos, o lado esquerdo envolve uma subtração, ao passo que o lado direito, não. Isso faz que a Desigualdade Triangular pareça razoável, mas podemos prová-la da forma a seguir.

Observe que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

é sempre verdadeira, pois a é igual a $|a|$ ou $-|a|$. A afirmativa correspondente a b é

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando-se essas desigualdades obtemos

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Se aplicarmos agora as propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queremos mostrar.

EXEMPLO 9 □ Se $|x - 4| < 0,1$ e $|y - 7| < 0,2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usar a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0,1 + 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

logo

$$|(x + y) - 11| < 0,3$$

A Exercícios

1–12 □ Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$
2. $|5| - |-23|$
3. $|-\pi|$
4. $|\pi - 2|$
5. $|\sqrt{5} - 5|$
6. $||-2| - |-3||$
7. $|x - 2|$ se $x < 2$
8. $|x - 2|$ se $x > 2$
9. $|x + 1|$
10. $|2x - 1|$
11. $|x^2 + 1|$
12. $|1 - 2x^2|$

13–38 □ Resolva a desigualdade em termos dos intervalos e ilustre o conjunto solução sobre o eixo real.

13. $2x + 7 > 3$
14. $3x - 11 < 4$
15. $1 - x \leqslant 2$
16. $4 - 3x \geqslant 6$
17. $2x + 1 < 5x - 8$
18. $1 + 5x > 5 - 3x$
19. $-1 < 2x - 5 < 7$
20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$
21. $0 \leqslant 1 - x < 1$
22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$
23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$
24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$
25. $(x - 1)(x - 2) > 0$
26. $(2x + 3)(x - 1) \geqslant 0$
27. $2x^2 + x \leqslant 1$
28. $x^2 < 2x + 8$
29. $x^2 + x + 1 > 0$
30. $x^2 + x > 1$
31. $x^2 < 3$
32. $x^2 \geqslant 5$
33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$
34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$
35. $x^3 > x$
36. $x^3 + 3x < 4x^2$
37. $\dfrac{1}{x} < 4$
38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo sobre a escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 °C para cada 100 m de subida até cerca de 12 km.
    (a) Se a temperatura do solo for de 20 °C, escreva uma fórmula para uma temperatura a uma altura h.
    (b) Que imagem de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 128 pés de altura com velocidade inicial de 16 pés por segundo, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde ser

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 32 pés acima do solo?

43–46 □ Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$
44. $|3x + 5| = 1$
45. $|x + 3| = |2x + 1|$
46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47–56 □ Resolva a desigualdade.

47. $|x| < 3$
48. $|x| \geqslant 3$
49. $|x - 4| < 1$
50. $|x - 6| < 0,1$
51. $|x + 5| \geqslant 2$
52. $|x + 1| \geqslant 3$
53. $|2x - 3| \leqslant 0,4$
54. $|5x - 2| < 6$
55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$
56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57–58 Resolva para x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59–60 Resolva para x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra nº 3 para provar a Regra nº 5 de (2).

65. Prove que $|ab| = |a||b|$. (*Sugestão*: Use a Equação 4.)

66. Prove que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Prove que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. (*Sugestão*: Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.)

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto de números racionais resultam em um número racional.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?
(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B Coordenadas Geométricas e Retas

Da mesma forma que os pontos sobre um eixo podem ser identificados com os números reais atribuindo-se a eles as coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com os pares ordenados de números reais. Vamos começar a desenhar dois eixos coordenados perpendiculares que se interceptam na origem, O, de cada eixo. Geralmente um eixo é horizontal com direção positiva para a direita e é chamado eixo x; o outro eixo é vertical com direção positiva para cima é denominado eixo y.

Todo ponto P no plano pode ser localizado por um único par ordenado de números da forma a seguir. Trace pelo ponto P as retas perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos em pontos com as coordenadas a e b, conforme mostra a Figura 1. Então ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado **coordenada x** (ou **abscissa**) de P; o segundo número b é conhecido como **coordenada y** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é um ponto com coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo de $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

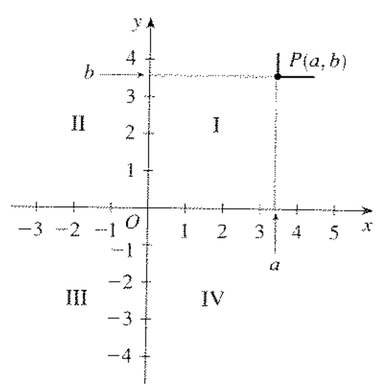


FIGURA 1

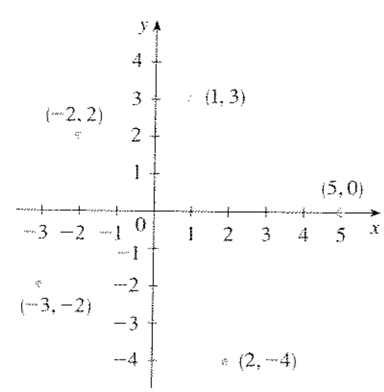


FIGURA 2

Revertendo o processo anterior podemos começar por um par ordenado (a, b) e chegar até o ponto P correspondente. Freqüentemente identificamos o ponto P com o par ordenado (a, b) e nos referimos a ele como "o ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenada é dito **sistema coordenado retangular**, ou **sistema de coordenada cartesiano**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenada, denominado **plano coordenado** ou **cartesiano**, é denotado por $\mathbb{R}^2$.

Os eixos x e y são chamados **eixos coordenados** e dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes, denotados por I, II, III e IV na Figura 1. Note que o primeiro quadrante consiste nos pontos com coordenadas x e y positivas.

EXEMPLO 1 ☐ Descreva e esboce as regiões dadas pelos seguintes conjuntos:

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUÇÃO

(a) Os pontos cujas coordenadas x são 0 ou são positivas estão situados no eixo y ou à direita dele, como indicado pela região sombreada da Figura 3(a).

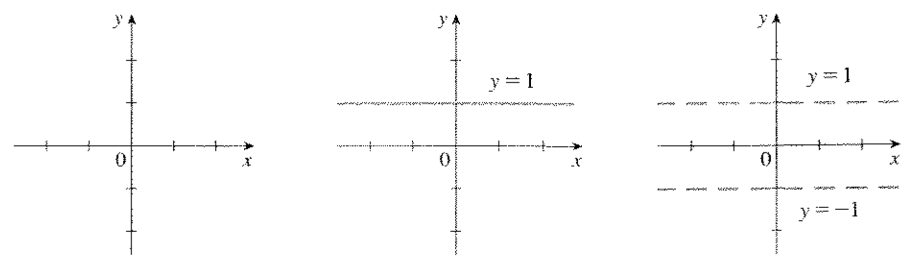


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) O conjunto de todos os pontos com coordenada y igual a 1 é uma reta horizontal uma unidade acima do eixo x [veja a Figura 3(b)].

(c) Lembre-se do Apêndice A que

$$|y| < 1 \qquad \text{se e somente se} \qquad -1 < y < 1$$

A região dada consiste naqueles pontos no plano cuja coordenada y está entre -1 e 1. Assim, a região consiste em todos os pontos que estão entre (mas não sobre) as retas horizontais $y = 1$ e $y = -1$. [Essas retas estão mostradas como retas tracejadas na Figura 3(c) para indicar que os pontos sobre essas retas não estão no conjunto.]

Lembre-se de que, no Apêndice A, a distância entre os pontos a e b sobre o eixo real é $|a - b| = |b - a|$. Assim, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta horizontal deve ser $|x_2 - x_1|$ e a distância entre $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta vertical deve ser $|y_2 - y_1|$ (veja a Figura 4).

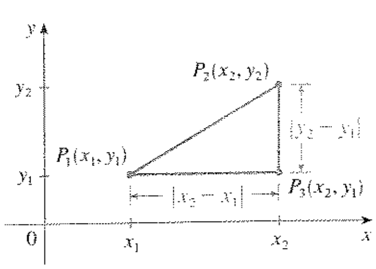


FIGURA 4

Para encontrar a distância $|P_1P_2|$ entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, notamos que o triângulo $P_1P_2P_3$ na Figura 4 é retângulo e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 Fórmula da Distância A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 2 A distância entre $(1, -2)$ e $(5, 3)$ é

$$\sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Retas

Queremos encontrar uma equação para uma dada reta L; essa equação fica satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre L e por nenhum outro ponto. Para encontrar a equação de L usamos sua *inclinação*, que é uma medida do grau de declividade da reta.

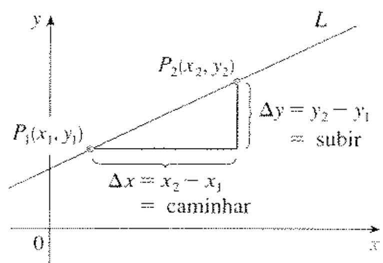


FIGURA 5

2 Definição A **inclinação** de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A inclinação de uma reta vertical não está definida.

Assim, a inclinação de uma reta é a taxa de variação, Δy, em y, devida a uma variação, Δx, em x (veja a Figura 5). A inclinação é, portanto, a taxa de variação de y em relação a x: o fato de tratar-se de uma reta significa que a taxa de variação é constante.

A Figura 6 mostra várias retas acompanhadas de suas inclinações. Observe que as retas com inclinação positiva inclinam-se para cima à direita, enquanto as retas com inclinação negativa inclinam-se para baixo à direita. Observe também que as retas declive são aquelas para as quais o valor absoluto da inclinação é maior, e uma reta horizontal tem inclinação zero.

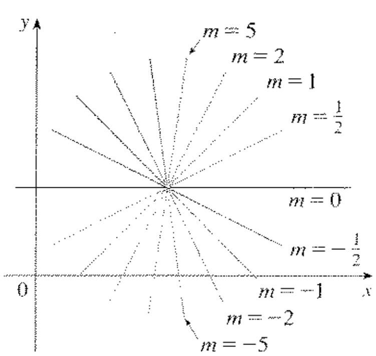


FIGURA 6

Vamos encontrar agora uma equação da reta que passa por um ponto dado $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação m. Um ponto $P(x, y)$ com $x \neq x_1$ está sobre essa reta se e somente se a inclinação da reta que passa por P_1 e P é igual a m; isto é,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e observamos que essa equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$. Portanto ela é uma equação da reta dada.

3 Equação de uma Reta na Forma Ponto-Inclinação Uma equação da reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m é

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta por $(1, -7)$ com inclinação $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando (3) com $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ e $y_1 = -7$, obtemos uma equação da reta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que pode ser reescrita como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x + 2y + 13 = 0$$

EXEMPLO 4 Encontre uma equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

SOLUÇÃO Pela Definição 2 a inclinação da reta é

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando a forma ponto–inclinação com $x_1 = -1$ e $y_1 = 2$, obteremos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que pode ser simplificada para $\qquad 3x + 2y = 1$

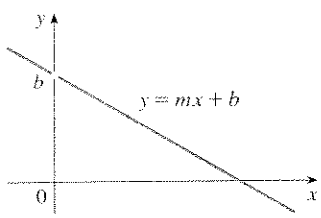


FIGURA 7

Suponha que uma reta não vertical tenha inclinação m e intercepto y igual a b (veja a Figura 7). Isso significa que ela intersepta o eixo y em um ponto $(0, b)$, logo a equação da reta na forma ponto–inclinação, com $x_1 = 0$ e $y_1 = b$, torna-se

$$y - b = m(x - 0)$$

Isso pode ser simplificado como a seguir.

> **4 Equação de uma Reta na Forma Inclinação–Intercepto** Uma equação da reta com inclinação m e intercepto y igual a b é
>
> $$y = mx + b$$

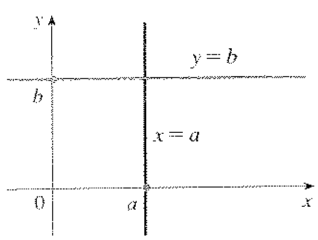


FIGURA 8

Em particular, se uma reta for horizontal, sua inclinação é $m = 0$, logo sua equação é $y = b$, onde b é o intercepto y (veja a Figura 8). Uma reta vertical não tem uma inclinação, mas podemos escrever sua equação como $x = a$, onde a é o intercepto x, pois a coordenada x de todo ponto sobre a reta é a.

Observe que a equação de toda reta pode ser escrita na forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{5}$$

porque a reta vertical tem a equação da forma $x = a$ ou $x - a = 0$ ($A = 1$, $B = 0$, $C = -a$) e uma reta não vertical tem a equação $y = mx + b$ ou $-mx + y - b = 0$ ($A = -m$, $B = 1$, $C = -b$). Inversamente, se começarmos com uma equação geral de primeiro grau, isto é, uma equação da forma (5), onde A, B e C são constantes e A e B não são ambos 0, então podemos mostrar que ela é a equação de uma reta. Se $B = 0$, isso torna-se $Ax + C = 0$ ou $x = -C/A$, que representa uma reta vertical com intercepto x igual a $-C/A$. Se $B \neq 0$, a equação pode ser reescrita resolvendo-se para y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

e reconhecemos isso como a equação de uma reta na forma inclinação–intercepto ($m = -A/B$, $b = -C/B$). Portanto uma equação da forma (5) é chamada **equação linear** ou **equação geral de uma reta**. Resumindo, referimos freqüentemente "a reta $Ax + By + C = 0$" em lugar de "a reta cuja equação é $Ax + By + C = 0$".

EXEMPLO 5 □ Esboce o gráfico da equação $3x - 5y = 15$.

SOLUÇÃO Uma vez que a equação é linear, seu gráfico é uma reta. Para desenhar o gráfico, podemos simplificar determinando dois pontos sobre a reta. É fácil determinar os interceptos. Substituindo $y = 0$ (equação do eixo x) na equação dada, obtemos $3x = 15$, logo $x = 5$ é o intercepto x. Substituindo $x = 0$ na equação, vemos que o intercepto y é –3. Isso permite-nos esboçar o gráfico como na Figura 9.

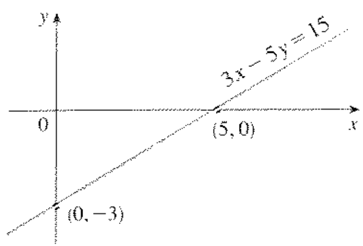


FIGURA 9

EXEMPLO 6 □ Faça o gráfico da desigualdade $x + 2y > 5$.

SOLUÇÃO Para esboçar o gráfico do conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ resolveremos a desigualdade em y:

$$x + 2y > 5$$

$$2y > -x + 5$$

$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intercepto y igual a $\frac{5}{2}$. Vemos que o gráfico dado consiste nos pontos com coordenada y *maior* que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, o gráfico é a região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10.

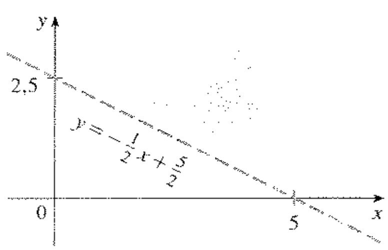


FIGURA 10

Retas Paralelas e Perpendiculares

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os seguintes fatos são provados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 4. ed., de Stewart, Redlin e Watson. Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA, 2002.

6 Retas Paralelas e Perpendiculares

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinação m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 □ Determine uma equação da reta que passa pelo ponto (5, 2) que é paralelo à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação–intercepto com $m = -\frac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo a reta requerida tem a inclinação $-\frac{2}{3}$, e sua equação na forma inclinação–intercepto é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos escrever essa equação como $2x + 3y = 16$.

EXEMPLO 8 □ Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO A equação pode ser escrita como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1m_2 = -1$, as retas são perpendiculares.

B Exercícios

1–6 □ Determine a distância entre dois pontos.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$
2. $(1, -3)$, $(5, 7)$
3. $(6, -2)$, $(-1, 3)$
4. $(1, -6)$, $(-1, -3)$
5. $(2, 5)$, $(4, -7)$
6. (a, b), (b, a)

7–10 □ Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.
12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando o inverso do Teorema de Pitágoras.
    (b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
    (c) Determine a área do triângulo.
13. Mostre que os pontos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ e $(-5, 3)$ são os vértices do quadrado.
14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que $|AB| + |BC| = |AC|$.
    (b) Use as inclinações para mostrar que A, B e C são colineares.
15. Mostre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.
16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17–20 □ Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$
18. $y = -2$
19. $xy = 0$
20. $|y| = 1$

21–36 □ Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Pelo ponto $(2, -3)$, e inclinação 6
22. Pelo ponto $(-1, 4)$, e inclinação -3
23. Pelo ponto $(1, 7)$, e inclinação $\frac{2}{3}$
24. Pelo ponto $(-3, -5)$, e inclinação $-\frac{7}{2}$
25. Por $(2, 1)$ e $(1, 6)$
26. Por $(-1, -2)$ e $(4, 3)$
27. Inclinação 3, e intercepto y igual a -2
28. Inclinação $\frac{2}{5}$, e intercepto y igual a 4
29. Intercepto x igual a 1, e intercepto y igual a -3
30. Intercepto x igual a -8, e intercepto y igual a 6
31. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x
32. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y
33. Que passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$
34. Com intercepto y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$
35. Que passa pelo ponto $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$
36. Que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37–42 □ Ache a inclinação e o intercepto y da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$
38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$
40. $2x - 3y + 6 = 0$
41. $3x - 4y = 12$
42. $4x + 5y = 10$

43–52 □ Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$
44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$
45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$
46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$
47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$
48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$
49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$
50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$
51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$
52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja eqüidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.
54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.
(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$
56. Ache os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)
57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache a sua interseção.
58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache sua interseção.
59. Ache uma equação da perpendicular que bissecta o segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.
60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.
(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interseptam?
61. (a) Mostre que se os interceptos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, e então a equação da reta pode ser colocada na forma
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
Essa equação é chamada **forma a partir dos interceptos** da equação da reta.
(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cujo intercepto x é 6 e cujo intercepto y é -8.
62. Um carro deixa Detroit às 2 horas da tarde, viaja a uma velocidade constante para o oeste ao longo da estrada I-96 e passa por Ann Arbor, a 40 milhas de Detroit, às 2h50 da tarde.
(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.
(b) Faça um gráfico da equação da parte (a).
(c) Qual é a inclinação dessa reta? O que ela representa?

C Gráficos das Equações de Segundo Grau

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear, representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam um círculo, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico dessa equação em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação; ele dá uma representação visual da equação. Inversamente, dada uma curva no plano xy, podemos encontrar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre a curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade dos princípios básicos da geometria analítica conforme formulada por Descartes e Fermat. A idéia é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico.

Círculos

Como um exemplo desse tipo de problema, vamos determinar uma equação do círculo com raio r e centro (h, k). Pela definição, o círculo é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$

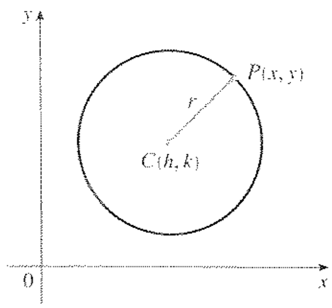


FIGURA 1

cuja distância ao centro $C(h, k)$ é r (veja a Figura 1). Assim, P está sobre o círculo se e somente se $|PC| = r$. Da fórmula da distância, temos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ou, de maneira equivalente, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta é a equação desejada.

1 Equação do Círculo Uma equação do círculo com centro (h, k) de raio r é

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro for a origem $(0, 0)$, a equação será

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação do círculo com raio 3 e centro $(2, -5)$.

SOLUÇÃO Da Equação 1 com $r = 3$, $h = 2$ e $k = -5$, obtemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando primeiro que ela representa um círculo e então ache seu centro e raio.

SOLUÇÃO Vamos agrupar primeiro os termos em x e y da seguinte forma:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Então, completando o quadrado dentro de cada parêntese e somando as constantes apropriadas a ambos os lados da equação temos:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

ou

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

Comparando essa equação com a equação-padrão do círculo (1), vemos que $h = -1$, $k = 3$ e $r = \sqrt{3}$; assim, a equação dada representa um círculo com centro $(-1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$. Ele está esboçado na Figura 2.

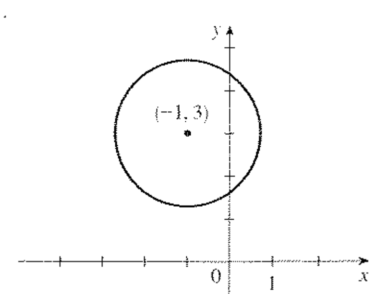


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Parábolas

As propriedades geométricas das parábolas serão revisadas na Seção 10.5 do Volume II. Aqui consideraremos uma parábola como um gráfico de uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 3 □ Esboce o gráfico da parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO Vamos fazer uma tabela de valores, desenhar os pontos e depois juntá-los por uma curva suave, de modo a obter o gráfico da Figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

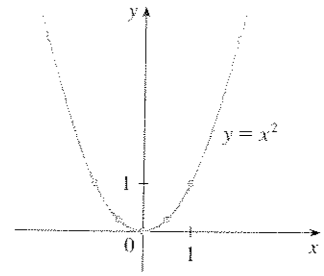


FIGURA 3

A Figura 4 mostra o gráfico de várias parábolas com as equações da forma $y = ax^2$ para diversos valores do número a. Em cada caso o *vértice*, o ponto onde a parábola muda de direção, é a origem. Vemos que a parábola $y = ax^2$ abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$ (como na Figura 5).

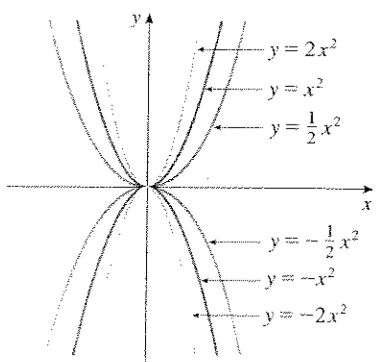
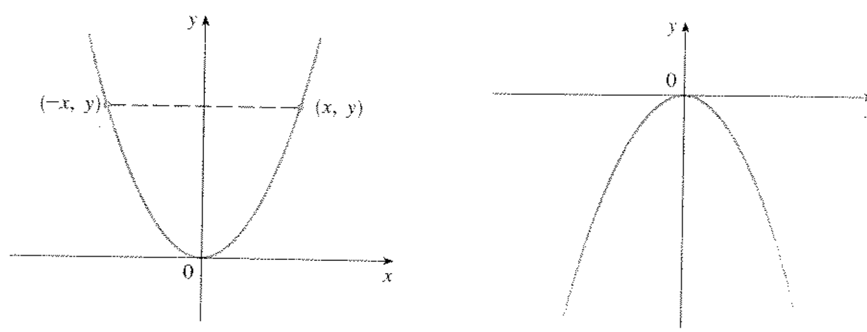


FIGURA 4



(a) $y = ax^2$, $a > 0$

(b) $y = ax^2$, $a < 0$

FIGURA 5

Observe que se (x, y) satisfizer a equação $y = ax^2$, então o mesmo acontece com $(-x, y)$. Isso corresponde ao fato geométrico de que, se a metade direita do gráfico for refletida em torno do eixo y, obteremos a metade esquerda do gráfico. Dizemos que o gráfico é **simétrico em relação ao eixo y**.

> O gráfico de equação é simétrico ao eixo y se a equação ficar invariante quando substituirmos x por $-x$.

Se trocarmos x e y na equação $y = ax^2$, teremos $x = ay^2$, que também representa uma parábola. (Trocar x e y significa fazer uma reflexão em torno da reta bissetriz $y = x$.) A parábola $x = ay^2$ se abre para a direita se $a > 0$ e para esquerda se $a < 0$. (Veja a

Figura 6.) Dessa vez a parábola é simétrica em relação ao eixo x, pois se (x, y) satisfizer a equação $x = ay^2$, então o mesmo acontece com $(x, -y)$.

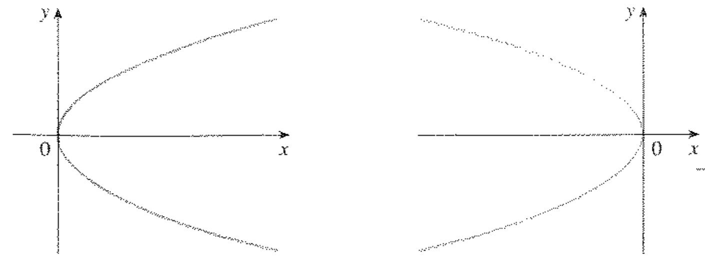


FIGURA 6 (a) $x = ay^2$, $a > 0$ (b) $x = ay^2$, $a < 0$

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo x se a equação ficar invariante quando trocarmos y por $-y$.

EXEMPLO 4 Esboce a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$.

SOLUÇÃO Vamos encontrar primeiro os pontos de interseção resolvendo as duas equações. Substituindo $x = y + 2$ na equação $x = y^2$, vamos obter $y + 2 = y^2$, o que resulta em

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

logo $y = 2$ ou -1. Assim, os pontos de interseção são $(4, 2)$ e $(1, -1)$ e, passando por esses dois pontos, traçamos a reta $y = x - 2$. Esboçamos então a parábola $x = y^2$ lembrando-nos da Figura 6(a) e fazendo que a parábola passe pelos pontos $(4, 2)$ e $(1, -1)$. A região limitada por $x = y^2$ e $y = x - 2$ significa a região finita cujo contorno é formado por essas curvas. Ela está esboçada na Figura 7.

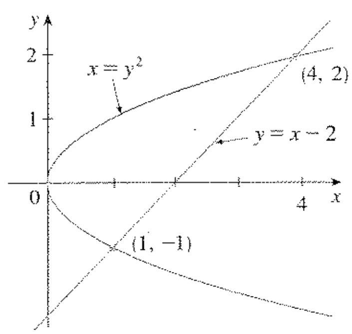


FIGURA 7

Elipses

A curva com a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

onde a e b são números positivos é chamada **elipse** na posição-padrão. (As propriedades geométricas das elipses serão discutidas na Seção 10.5 do Volume II.) Observe que a Equação 2 fica invariante se x for substituído por $-x$ ou y por $-y$; dessa forma a elipse é simétrica em relação aos eixos. Como uma ajuda no esboço da elipse, vamos determinar seus interceptos.

Os **interceptos x** de um gráfico são as coordenadas x dos pontos onde ele intercepta o eixo x. Eles são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação do gráfico.

Os **interceptos y** de um gráfico são as coordenadas y dos pontos onde ele intercepta o eixo y. Eles são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação do gráfico.

Se fizermos $y = 0$ na Equação 2, obteremos $x^2 = a^2$ e, dessa forma, os interceptos x são $\pm a$. Fazendo $x = 0$, obteremos $y^2 = b^2$; assim, os interceptos y são $\pm b$. Usando essa informação, junto com a simetria, fazemos o esboço da elipse na Figura 8. Se $a = b$, a elipse é um círculo com raio a.

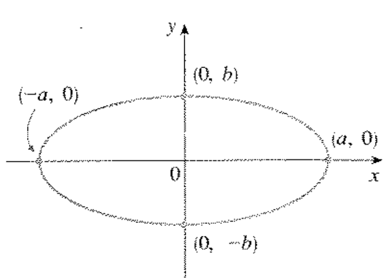


FIGURA 8

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144 obtemos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma-padrão de uma equação da elipse (2); assim, temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. Os interceptos x são ± 4; os interceptos y são ± 3. O gráfico está esboçado na Figura 9.

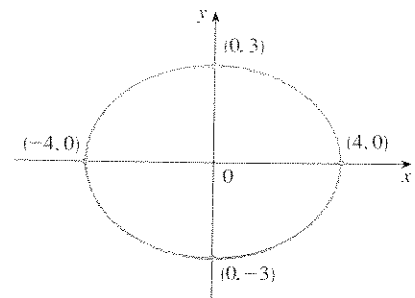


FIGURA 9
$9x^2 + 16y^2 = 144$

Hipérboles

A curva com a equação

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

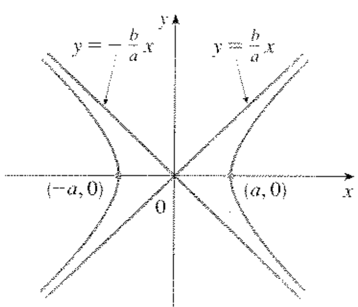


FIGURA 10
A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

é denominada **hipérbole** na posição-padrão. Novamente, a Equação 3 fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$, dessa forma, a hipérbole é simétrica aos eixos. Para encontrar os interceptos x, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm a$. Porém, se fizermos $x = 0$ na Equação 3, obteremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; assim, não há intercepto y. De fato, da Equação 3 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

o que mostra que $x^2 \geqslant a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Assim, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, cada uma delas chamada *ramo*. Ela está esboçada na Figura 10.

Para esboçar uma hipérbole é útil primeiro traçar suas *assíntotas*, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 10. Ambos os ramos da hipérbole tendem para as assíntotas; isto é, ficam arbitrariamente próximos das assíntotas. Isso envolve a idéia de um limite, como discutido no Capítulo 2 (veja também o Exercício 67 na Seção 4.5).

Trocando os papéis de x e y obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

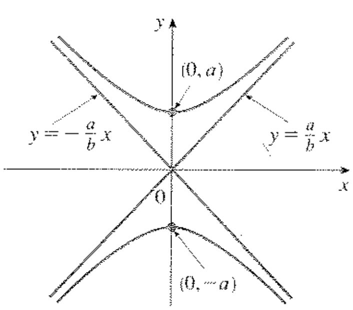


FIGURA 11
A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

que também representa uma hipérbole e está esboçada na Figura 11.

EXEMPLO 6 Esboce a curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole na forma padrão (Equação 3). Visto que $a^2 = 4$, os interceptos x são ± 2. Uma vez que $b^2 = 9$, temos $b = 3$, e as assíntotas são $y = \pm(\frac{3}{2})x$. A hipérbole está esboçada na Figura 12.

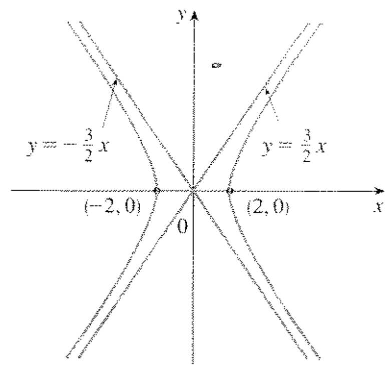
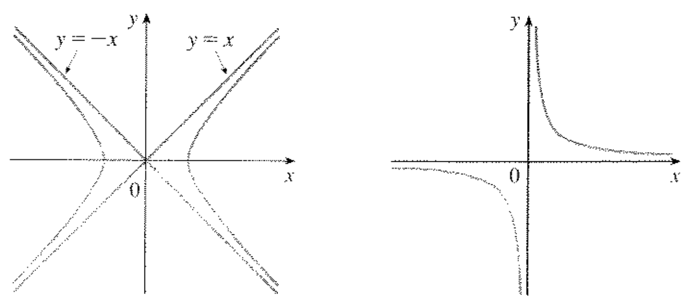


FIGURA 12
Hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$

Se $b = a$, a hipérbole tem a equação $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$) e é chamada *hipérbole eqüilátera* [veja a Figura 13(a)]. Suas assíntotas são $y = \pm x$, que são perpendiculares. Girando-se uma hipérbole eqüilátera em 45°, as assíntotas tornam-se os eixos x e y, e pode-se mostrar que a nova equação da hipérbole é $xy = k$, onde k é uma constante [veja a Figura 13(b)].



(a) $x^2 - y^2 = a^2$ (b) $xy = k$ $(k > 0)$

FIGURA 13
Hipérboles eqüiláteras

Cônicas Deslocadas

Lembre-se de que uma equação do círculo com centro na origem e raio r é $x^2 + y^2 = r^2$, mas se o centro for o ponto (h, k), então a equação do círculo fica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Analogamente, se tomarmos a elipse com a equação

4
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

e a transladarmos de forma que se seu centro esteja no ponto (h, k), então sua equação fica

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{5}$$

(Veja a Figura 14.)

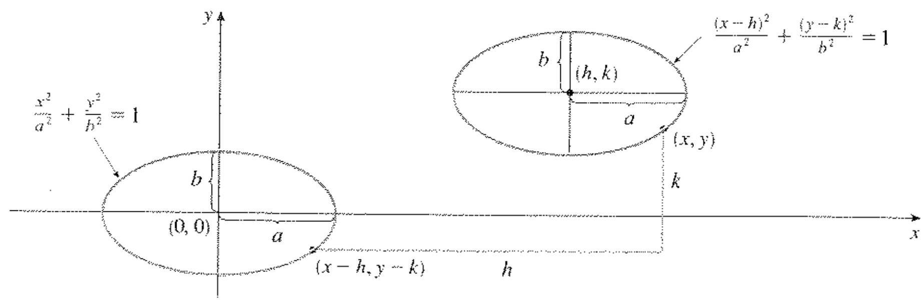


FIGURA 14

Observe que ao transladarmos a elipse, substituímos x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação 4 para obter a Equação 5. Usando o mesmo procedimento deslocamos a parábola $y = ax^2$ de forma que seu vértice (a origem) torna-se o ponto (h, k), como na Figura 15. Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$, vemos que a nova equação é

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

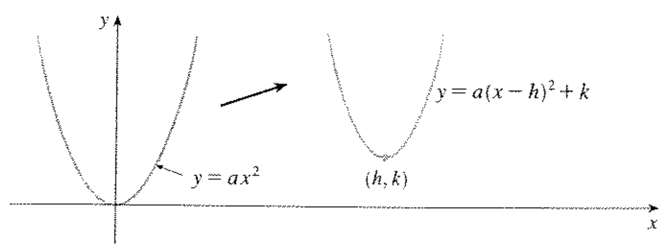


FIGURA 15

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da equação $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos completar os quadrados:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

Nessa forma vemos que a equação representa a parábola obtida deslocando-se $y = 2x^2$ tal que seu vértice é o ponto $(1, -1)$. O gráfico está esboçado na Figura 16.

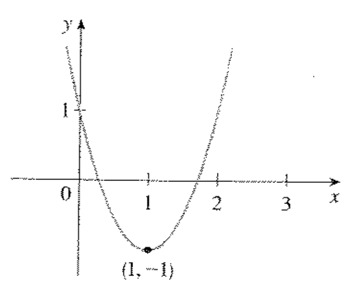


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

EXEMPLO 8 Esboce a curva $x = 1 - y^2$.

SOLUÇÃO Dessa vez começamos com a parábola $x = -y^2$ (como na Figura 6 com $a = -1$) e deslocamos uma unidade para a direita para obter o gráfico de $x = 1 - y^2$ (veja a Figura 17).

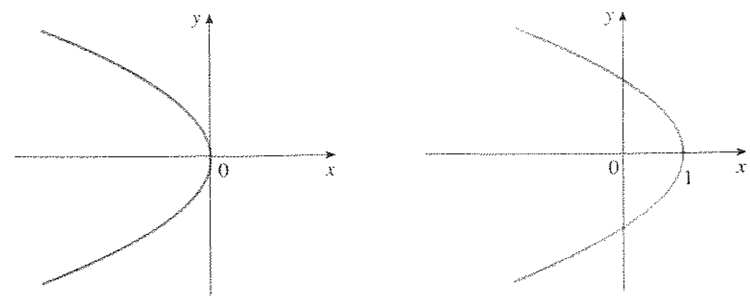


FIGURA 17 (a) $x = -y^2$ (b) $x = 1 - y^2$

C Exercícios

1–4 Determine uma equação de um círculo que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5
2. Centro $(-2, -8)$, raio 10
3. Centro na origem, passa em $(4, 7)$
4. Centro $(-1, 5)$, passa em $(-4, -6)$

5–9 Mostre que a equação representa um círculo e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 + x = 0$
8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$
9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficientes a, b e c fazem que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente um círculo? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio do círculo.

11–32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não desenhe os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$
12. $y^2 - x^2 = 1$
13. $x^2 + 4y^2 = 16$
14. $x = -2y^2$
15. $16x^2 - 25y^2 = 400$
16. $25x^2 + 4y^2 = 100$
17. $4x^2 + y^2 = 1$
18. $y = x^2 + 2$
19. $x = y^2 - 1$
20. $9x^2 - 25y^2 = 225$
21. $9y^2 - x^2 = 9$
22. $2x^2 + 5y^2 = 10$
23. $xy = 4$
24. $y = x^2 + 2x$
25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$
26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$
27. $y = x^2 - 6x + 13$
28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$
29. $x = 4 - y^2$
30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$
32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33–34 Esboce a região limitada pelas curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$
34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

36. Determine uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $\left(1, -10\sqrt{2}/3\right)$ e $\left(-2, 5\sqrt{5}/3\right)$.

37–40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$
39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$
40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D Trigonometria

Ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360°, ou 2π rad. Portanto

1
$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

e

2
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}3° \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLO 1 ☐

(a) Determine a medida em radianos de 60°. (b) Expresse $5\pi/4$ rad em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que para converter de graus para radianos multiplicamos $\pi/180$. Portanto

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para converter de radianos para graus multiplicamos por $180/\pi$. Assim

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225°$$

Em cálculo usamos o radiano como medida dos ângulos, exceto quando explicitamente indicado. A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas de graus e radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

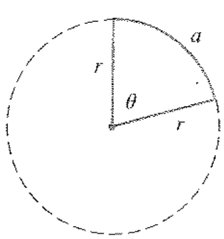


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a. Visto que o comprimento de arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e uma vez que o círculo inteiro tem uma circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π, temos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Resolvendo essa equação para θ e a, obtemos

3
$$\boxed{\theta = \frac{a}{r}} \qquad \boxed{a = r\theta}$$

Lembre-se de que a Equação 3 é válida apenas quando θ for medido em radianos.

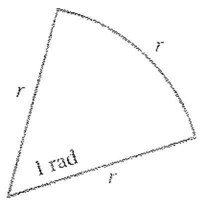


FIGURA 2

Em particular, fazendo $a = r$ na Equação 3, vemos que um ângulo de 1 rad é um ângulo subtendido no centro de um círculo por um arco com igual comprimento do raio do círculo (veja a Figura 2).

EXEMPLO 2 ▫
(a) Se o raio de um círculo for 5 cm, qual o ângulo subtendido por um arco de 6 cm?
(b) Se um círculo tem raio 3 cm, qual é o comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUÇÃO
(a) Usando a Equação 3 com $a = 6$ e $r = 5$, vemos que o ângulo é

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1{,}2 \text{ rad}$$

(b) Com $r = 3$ cm e $\theta = 3\pi/8$ rad, o comprimento de arco é

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$

A **posição-padrão** de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x, positivo como na Figura 3. Um ângulo **positivo** é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final; da mesma forma, ângulos **negativos** são obtidos girando-se no sentido horário, como na Figura 4.

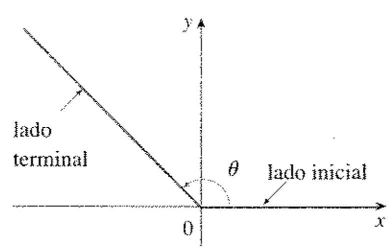


FIGURA 3
$\theta \geq 0$

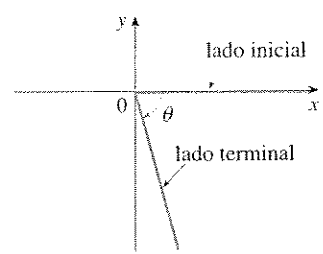


FIGURA 4
$\theta < 0$

A Figura 5 mostra vários exemplos de ângulos em posição-padrão. Note que ângulos diferentes podem ter o mesmo lado final. Por exemplo, os ângulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ e $11\pi/4$ têm os mesmos lados inicial e final, pois

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

e 2π rad representa uma revolução completa.

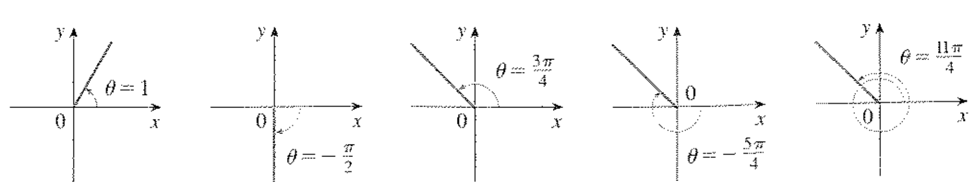


FIGURA 5
Ângulos na posição-padrão

Funções Trigonométricas

Para um ângulo agudo θ as seis funções trigonométricas são definidas como razões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo como a seguir (veja a Figura 6).

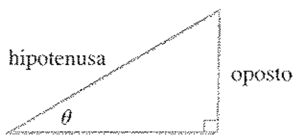


FIGURA 6

4

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

Essa definição não se aplica para os ângulos obtusos ou negativos; logo, para um ângulo geral θ na posição-padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado final de θ e seja r a distância $|OP|$, como na Figura 7. Então definimos

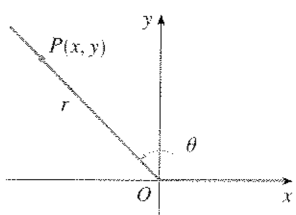


FIGURA 7

5

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$

Como uma divisão por 0 não está definida, tg θ e sec θ não estão definidas quando $x = 0$, e cossec θ e cotg θ não estão definidas quando $y = 0$. Note que as definições em (4) e (5) são consistentes quando θ é um ângulo agudo.

Se θ for um número, a convenção é que sen θ significa o seno do ângulo, cuja medida em *radianos* é θ. Por exemplo, a expressão sen 3 implica que estamos tratando com um ângulo de 3 rad. Após determinar um cálculo aproximado para esse número devemos nos lembrar de colocar a calculadora no modo radiano, e então obteremos

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0{,}14112$$

Para conhecer o seno do ângulo 3°, escrevemos sen 3° e, com nossa calculadora no modo grau, encontramos que

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0{,}05234$$

As exatas razões trigonométricas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da Figura 8. Por exemplo,

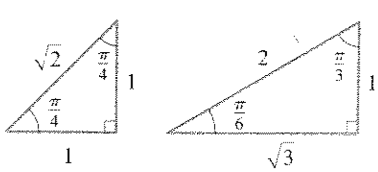


FIGURA 8

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

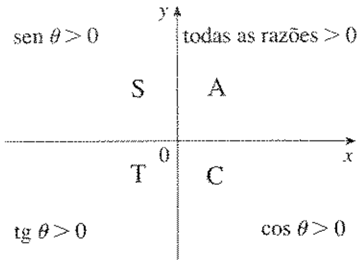


FIGURA 9

Os sinais das funções trigonométricas para os ângulos em cada um dos quatro quadrantes são mostrados na Figura 9.

EXEMPLO 3 □ Determine as razões trigonométricas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUÇÃO Da Figura 10 vemos que um ponto sobre a reta final para $\theta = 2\pi/3$ é $P(-1, \sqrt{3})$. Portanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

nas definições das razões trigonométricas, temos

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cossec}\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$ □

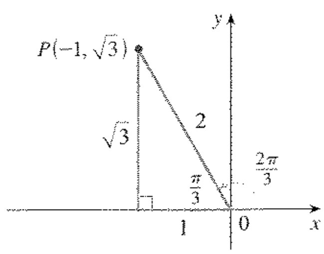


FIGURA 10

A tabela a seguir fornece alguns valores de sen θ e cos θ encontrados pelo método do Exemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EXEMPLO 4 □ Se $\cos\theta = \frac{2}{5}$ e $0 < \theta < \pi/2$, determine as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO Uma vez que $\cos\theta = \frac{2}{5}$, podemos supor a hipotenusa como tendo o comprimento igual a 5 e o lado adjacente, o comprimento igual a 2 na Figura 11. Se o lado oposto tem comprimento x, então o Teorema de Pitágoras fornece $x^2 + 4 = 25$; logo, $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Podemos agora usar o diagrama para escrever as outras cinco funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

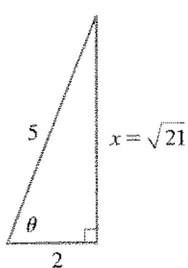


FIGURA 11

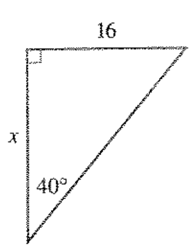


FIGURA 12

EXEMPLO 5 □ Use uma calculadora para aproximar o valor de x da Figura 12.

SOLUÇÃO Do diagrama vemos que

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{16}{x}$$

Portanto,

$$x = \frac{16}{\operatorname{tg} 40°} \approx 19{,}07$$

Identidades Trigonométricas

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são as que se seguem, que são conseqüências imediatas das definições das funções trigonométricas.

6
$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para a próxima identidade voltemos à Figura 7. A fórmula da distância (ou, de maneira equivalente, o Teorema de Pitágoras) nos diz que $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Temos provado, portanto, uma das mais úteis identidades da trigonometria:

7
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Se agora dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\cos^2\theta$ e usarmos a Equação 6, obteremos

8
$$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Analogamente, se dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\operatorname{sen}^2\theta$, obteremos

9
$$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$$

As identidades

10a
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

□ Funções pares e ímpares são discutidas na Seção 1.1.

indicam que sen e cos são funções, respectivamente, ímpares e pares. Elas são facilmente provadas desenhando-se um diagrama mostrando θ e $-\theta$ na posição-padrão (veja o Exercício 39).

Uma vez que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, temos

11
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Essas identidades revelam que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π.

As identidades trigonométricas restantes são todas conseqüências de duas identidades básicas chamadas **fórmulas da adição**:

12a $$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

12b $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

As provas dessas fórmulas de adição estão resumidas nos Exercícios 85, 86 e 87.

Substituindo $-y$ nas Equações 12a e 12b e usando as Equações 10a e 10b, obtemos as seguintes **fórmulas de subtração**:

13a $$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Então, dividindo as fórmulas nas Equações 12 ou 13, obtemos as fórmulas correspondentes para $\operatorname{tg}(x \pm y)$:

14a $$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b $$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Se pusermos $y = x$ nas fórmulas de adição (12), obteremos as **fórmulas dos ângulos duplos**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos a seguinte forma alternada das fórmulas dos ângulos duplos para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Se agora resolvermos as equações para $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$, obteremos as seguintes **fórmulas do ângulo-metade**, que são úteis em cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Finalmente, enunciamos as **fórmulas do produto**, que podem ser deduzidas das Equações 12 e 13:

18a $\quad \operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

18b $\quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

18c $\quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

Há muitas outras identidades trigonométricas, mas as aqui enunciadas são algumas das mais usadas no cálculo. Se você se esquecer de qualquer uma delas, lembre-se de que elas podem ser deduzidas das Equações 12a e 12b.

EXEMPLO 6 □ Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula do ângulo duplo (15a), reescrevemos a equação dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

Portanto, há duas possibilidades para x:

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2\cos x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad\qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

A equação dada tem cinco soluções: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ e 2π.

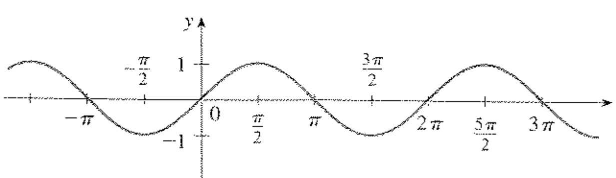
Gráficos das Funções Trigonométricas

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostrado na Figura 13(a), é obtido desenhando-se os pontos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então usando-se a periodicidade da função (da Equação 11) para completar o gráfico. Note que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π, isto é,

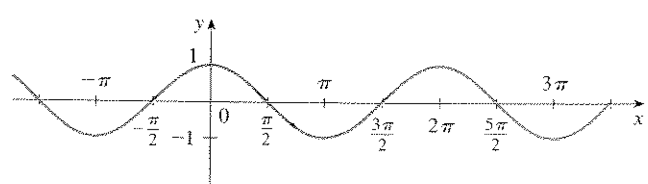
$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{sempre que } x = n\pi, \qquad n \text{ um inteiro}$$

Devido à identidade

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 13

(que pode ser verificada usando-se a Equação 12a), o gráfico do cosseno é obtido deslocando-se em $\pi/2$ à esquerda o gráfico do seno [veja a Figura 13(b)]. Note que para ambas as funções seno e cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é o conjunto fechado $[-1, 1]$. Assim, para todos os valores de x, temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 14 e seus domínios estão indicados lá. Note que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as quatro funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.

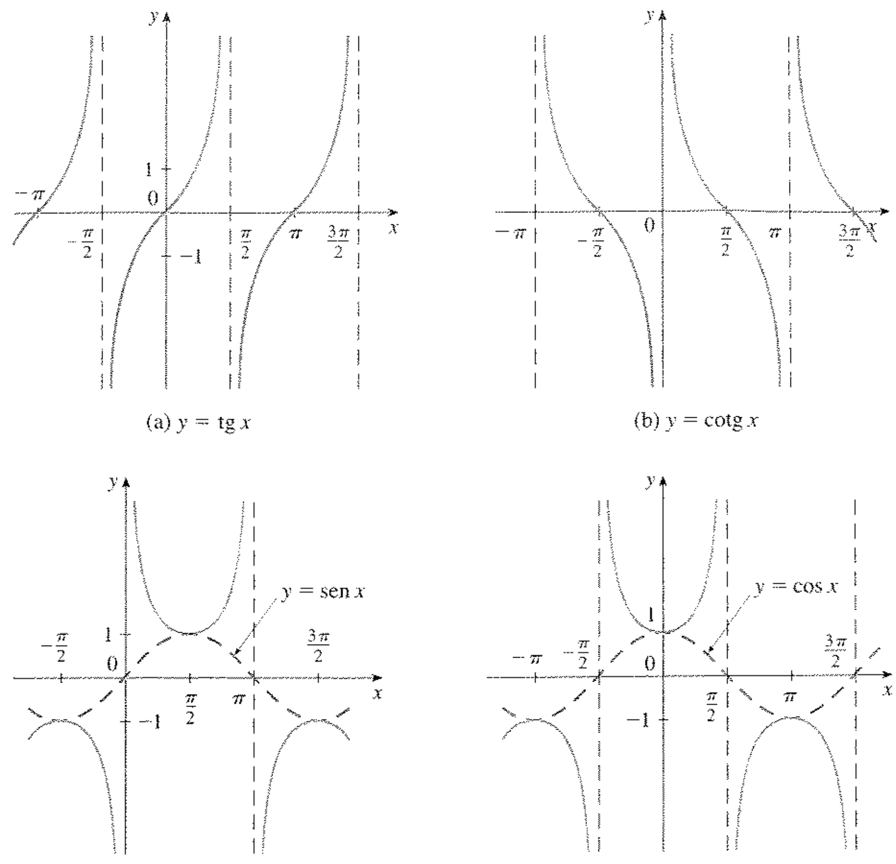


FIGURA 14

D Exercícios

1–6 □ Converta de graus para radianos.

1. $210°$ **2.** $300°$ **3.** $9°$

4. $-315°$ **5.** $900°$ **6.** $36°$

7–12 □ Converta de radianos para graus.

7. 4π **8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$

9. $\dfrac{5\pi}{12}$ **10.** $\dfrac{8\pi}{3}$

11. $-\dfrac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17–22 □ Desenhe, em posição-padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. $315°$ **18.** $-150°$ **19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23–28 □ Determine as taxas trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29–34 □ Determine as razões trigonométricas restantes.

29. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5},\quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

30. $\operatorname{tg}\alpha = 2,\quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1{,}5,\quad \dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$

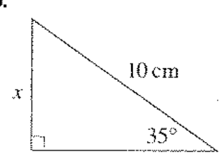
32. $\cos x = -\dfrac{1}{3},\quad \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

33. $\operatorname{cotg}\beta = 3,\quad \pi < \beta < 2\pi$

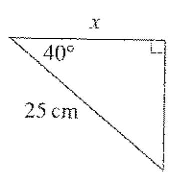
34. $\operatorname{cossec}\theta = -\dfrac{4}{3},\quad \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35–38 □ Determine, com cinco casas decimais corretas, o comprimento do lado chamado de x.

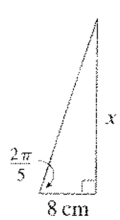
35.



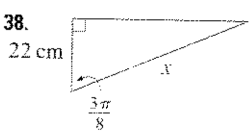
36.



37.



38.



39–41 □ Prove cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42–58 □ Prove a identidade.

42. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta$

46. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \operatorname{tg} y \operatorname{sen} y$

48. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\operatorname{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cossec}^2\theta$

50. $2\operatorname{cossec} 2t = \sec t \operatorname{cossec} t$

51. $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \operatorname{cossec}\phi + \operatorname{cotg}\phi$

56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen} 2\theta \cos\theta$

58. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

59–64 □ Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y existem entre 0 e $\pi/2$, avalie a expressão.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$ **64.** $\cos 2y$

65–72 □ Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2\cos x - 1 = 0$ **66.** $3\operatorname{cotg}^2 x = 1$

67. $2\operatorname{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ **70.** $2\cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3\cos x$

73–76 □ Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$ **74.** $2\cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **76.** $\operatorname{sen} x > \cos x$

77–82 □ Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 13 e 14 e aplicando as transformações da Seção 1.3 onde apropriado.

77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \operatorname{tg} 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

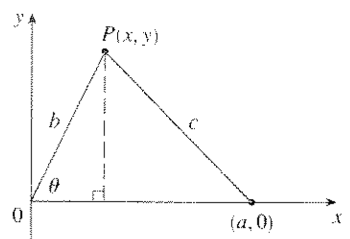
80. $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\mathrm{sen}\, x|$

82. $y = 2 + \mathrm{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Prove a **Lei dos Cossenos**: Se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b e c, e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

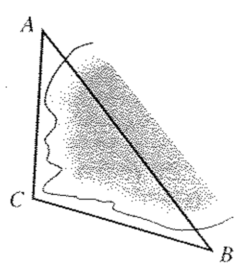


[*Sugestão*: Introduza um sistema de coordenada tal que θ esteja na posição-padrão, como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula da distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$\angle C = 103°$ $\qquad |AC| = 820$ m $\qquad |BC| = 910$ m

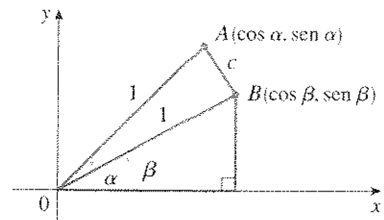
Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância requerida.



85. Use a figura para provar a fórmula da subtração.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{sen}\beta$$

[*Sugestão*: Compute c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]



85. Use a fórmula do Exercício 85 para provar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

86. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathrm{sen}\,\theta \qquad \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para provar a fórmula da subtração para a função seno.

87. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo incluído θ é

$$A = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\theta$$

88. Determine a área do triângulo ABC, com cinco casas decimais corretas, se

$|AB| = 10$ cm $\qquad |BC| = 3$ cm $\qquad \angle ABC = 107°$

E Notação Somatória (ou Notação Sigma)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúscula, correspondente a nossa letra S) e é chamada **notação sigma**, ou **notação somatória**.

Isso nos diz para terminar com $i = n$.

Isso nos diz para adicionar. $\sum_{i=m}^{n} a_i$

Isso nos diz para iniciar com $i = m$.

1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1 □

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

EXEMPLO 2 □ Escreva a soma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ na notação somatória.

SOLUÇÃO Não há uma maneira única de se escrever a soma na notação somatória. Podemos escrever

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$

O teorema a seguir apresenta três regras simples para se trabalhar com a notação sigma.

2 Teorema Se c for uma constante qualquer (isto é, ela não depende de i), então

(a) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$ (b) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

Prova Para ver por que essas regras são verdadeiras, devemos escrever ambos os lados na forma expandida. A regra (a) é tão-somente a propriedade distributiva dos números reais:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

A regra (b) segue das propriedades associativa e comutativa:

$$\begin{aligned}(a_m + b_m) &+ (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)\\ &= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

A regra (c) é provada da mesma forma.

EXEMPLO 3 □ Determine $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

EXEMPLO 4 □ Prove a fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Essa fórmula pode ser provada por indução matemática (veja a página 81) ou pelo método a seguir, usado pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quando ele tinha 10 anos de idade para escrever a soma S duas vezes, uma na ordem usual e a outra na ordem invertida:

$$\begin{aligned}S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n\\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\end{aligned}$$

Somando-se verticalmente todas as colunas, obtemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Do lado direito existem n termos, cada um dos quais é $n + 1$; portanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXEMPLO 5 □ Prove a fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUÇÃO 1 Seja S a soma desejada. Começamos com a *soma telescópica* (ou a soma que sofreu um colapso):

A maioria dos termos se cancela em pares.

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + [(n+1)^3 - n^3]$$
$$= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Por outro lado, usando o Teorema 2 e os Exemplos 3 e 4, temos

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Assim, temos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Resolvendo essa equação em S, obtemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

ou $$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

□ **Princípio da Indução Matemática**
Seja S_n uma afirmativa envolvendo o inteiro positivo n. Suponha que
1. S_1 é verdadeira.
2. Se S_k for verdadeira, então S_{k+1} é verdadeira.
Então S_n é verdadeira para todo n inteiro positivo.

SOLUÇÃO 2 Seja S_n a fórmula dada.

1. S_1 é verdadeira, pois $\quad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2. Suponha que S_k seja verdadeira; isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Então

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= (k+1)\,\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$
$$= (k+1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Logo S_{k+1} é verdadeira.

□ Veja as páginas 81 e 83 para uma discussão mais completa de indução matemática.

Pelo Princípio da Indução Matemática, S_n é verdadeira para todo n.

Vamos fazer uma lista dos resultados dos Exemplos 3, 4 e 5 junto com um resultado similar para cubos (veja os Exercícios 37-40) como o Teorema 3. Essas fórmulas são necessárias para encontrar áreas e computar as integrais no Capítulo 5.

3 Teorema Seja c uma constante e n um inteiro positivo. Então,

(a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXEMPLO 6 □ Calcule $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUÇÃO Usando os Teoremas 2 e 3, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) &= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}
\end{aligned}$$

□ O tipo de cálculo do Exemplo 7 surgiu no Capítulo 5, quando computamos as áreas.

EXEMPLO 7 □ Ache $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{3}{n}\left[\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3} i^2 + \frac{3}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n}\cdot n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + 3 = 4
\end{aligned}$$

E Exercícios

1–10 □ Escreva a soma na forma expandida.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11–20 □ Escreva a soma na notação sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21–35 □ Determine o valor da soma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i-2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i+2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2-5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3+2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

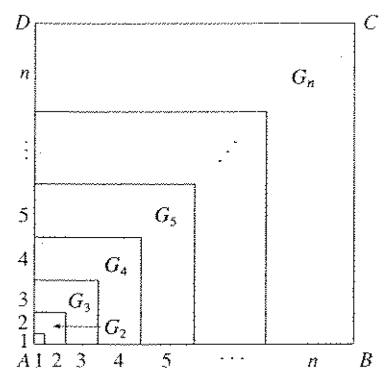
36. Determine o número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Prove a fórmula (b) do Teorema 3.

38. Prove a fórmula (e) do Teorema 3 usando a indução matemática.

39. Prove a fórmula (e) do Teorema 3 usando um método similar como aquele do Exemplo 5, Solução 1 [comece com $(1+i)^4 - i^4$].

40. Prove a fórmula (e) do Teorema 3 usando o método a seguir, publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi por volta do ano 1010. A figura mostra um quadrado $ABCD$ nos quais os lados AB e AD foram divididos dentro de segmentos de comprimento $1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, o lado do quadrado tem comprimento $n(n+1)/2$; logo, a área é $[n(n+1)/2]^2$. Mas a área é também a soma das áreas dos n "gomos" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados na figura. Prove que a área de G_i é i^3 e conclua que a fórmula (e) é verdadeira.



41. Calcule cada soma telescópica.

(a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Prove a desigualdade triangular generalizada.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43–46 □ Determine cada limite.

43. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

44. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right]$

45. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

46. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Prove a fórmula para a soma de uma série geométrica finita com o primeiro termo a e raio comum $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Calcule $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Calcule $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Calcule $\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} (i + j)\right]$.

F Provas dos Teoremas

Neste apêndice apresentamos as provas de vários teoremas que estão enunciados na parte principal do texto. As seções nas quais eles ocorrem estão indicadas na margem.

SEÇÃO 2.3

Lei dos Limites Suponha que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existam. Então

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$

5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ Se $M \neq 0$

Prova da Lei nº 4 Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

A fim de obter termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como se segue:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\
&\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(Desigualdade Triangular)} \\
&= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|
\end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e, portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então temos $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ e $0 < |x - a| < \delta_3$; logo, podemos combinar as desigualdades para obter

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L|\,|g(x)| + |L|\,|g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L|\,\frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$.

Prova da Lei nº 3 Se tomarmos $g(x) = c$ na Lei nº 4, obteremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(pela Lei nº 7)} \end{aligned}$$

Prova da Lei nº2 Usando as Leis nºs 1 e 3 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1)\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \end{aligned}$$

Prova da Lei nº 5 Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Mas também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x está próximo de a. Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que, sendo $0 < |x - a| < \delta_1$, teremos

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |M| &= |M - g(x) + g(x)| \leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\ &< \frac{|M|}{2} + |g(x)| \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$|g(x)| > \frac{M}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Logo, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M|\,|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Também, há $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}\,\frac{M^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon$$

Segue-se que $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$. Finalmente, usando a Lei nº 4 obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

2 Teorema Se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x de um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

então $L \leqslant M$.

Prova Usamos o método da prova por contradição. Suponha, se possível, que $L > M$. A Lei nº 2 de limites nos diz que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Em particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (notando que $L - M > 0$ por hipótese), temos um número $\delta > 0$ tal que

$$|[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Uma vez que $a \leqslant |a|$ para qualquer número a, temos

$$[g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

que simplifica para

$$g(x) < f(x) \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Mas isso contradiz o fato de que $f(x) \leqslant g(x)$. Assim, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leqslant M$.

3 Teorema do Confronto Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x que esteja em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Prova Considere dado $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

isto é,
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$|h(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

isto é,
$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, logo

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

Em particular,
$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

portanto $|g(x) - L| < \varepsilon$. Assim, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

SEÇÃO 2.5

8 Teorema Se f for contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

Prova Considere dado $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Uma vez que f é contínua em b, temos

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

logo existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, há $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - b| < \delta_1 \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

Combinando esses dois enunciados vemos que sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Portanto, temos provado que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

SEÇÃO 3.4

A demonstração do resultado a seguir foi prometida quando da demonstração de que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$.

Teorema Se $0 < \theta < \pi/2$, então $\theta \leq \operatorname{tg} \theta$.

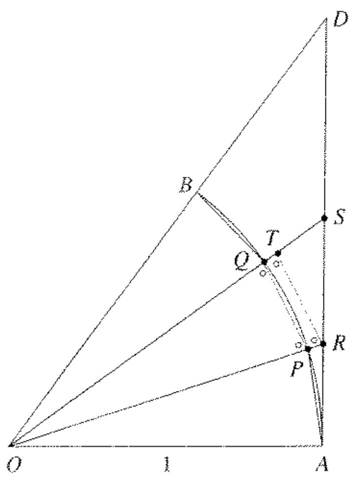


FIGURA 1

Prova A Figura 1 mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio $r = 1$. Então

$$|AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta$$

Aproximamos o arco AB por um polígono inscrito que consiste em n segmentos de retas iguais e tomamos um segmento típico PQ. Prolongamos os segmentos OP e OQ para encontrar sobre a reta AD os pontos R e S. Traçamos, então, uma paralela a $RT \parallel PQ$ como na Figura 1. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90°$$

e, dessa forma, $\angle RTS > 90°$. Portanto, temos

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Se adicionarmos as n desigualdades semelhantes a essa, obteremos

$$L_n < |AD| = \operatorname{tg} \theta$$

onde L_n é o comprimento do polígono inscrito. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leq \operatorname{tg} \theta$$

Mas o comprimento do arco foi definido na Equação 8.1.1 como o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos; nesse caso,

$$\theta = \lim_{n \to \infty} L_n \leq \operatorname{tg} \theta$$

SEÇÃO 4.3

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Prova (a) Seja a um número qualquer em I. Precisamos mostrar que a curva $y = f(x)$ fica acima da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. A equação dessa tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, devemos mostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

qualquer que seja $x \in I$ $(x \neq a)$ (veja a Figura 2).

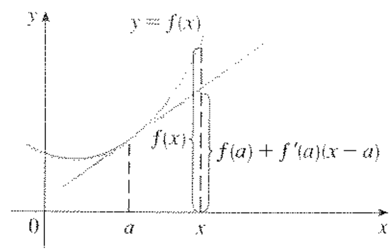


FIGURA 2

Vamos considerar primeiro o caso onde $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, x]$, obteremos um número c onde $a < c < x$, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Uma vez que $f'' > 0$ em I sabemos do Teste Crescente/Decrescente que f' é crescente em I. Assim, uma vez que $a < c$, temos

$$f'(a) < f'(c)$$

portanto, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo $x - a$, obtemos

$$\boxed{2} \qquad f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a)$$

Somando agora $f(a)$ a ambos os lados dessa desigualdade, obtemos:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Mas, da Equação 1, temos $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Dessa forma, essa desigualdade fica

$$\boxed{3} \qquad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que é o que queríamos provar.

Para o caso onde $x < a$, temos $f'(c) < f'(a)$, mas a multiplicação pelo número negativo $x - a$ reverte o sinal da desigualdade; assim, obtemos (2) e (3) como anteriormente.

SEÇÃO 4.4

Veja o esboço biográfico de Cauchy no Capítulo 2.

A fim de dar a prova da Regra de L'Hôspital prometida anteriormente precisamos, primeiro, de uma generalização do Teorema do Valor Médio. O nome do teorema a seguir é uma homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

> $\boxed{1}$ **Teorema do Valor Médio de Cauchy** Suponhamos as funções f e g contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então existe um número c em (a, b) tal que
>
> $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Note que se considerarmos o caso especial no qual $g(x) = x$, então $g'(c) = 1$ e o Teorema 1 é exatamente o Teorema do Valor Médio Comum. Além disso, o Teorema 1 pode ser provado de forma similar. Você pode verificar que tudo o que devemos fazer é mudar a função h dada pela Equação 4.2.4 para a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

e então aplicar o Teorema de Rolle como anteriormente.

Regra de L'Hôspital Suponhamos f e g diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo de a (exceto possivelmente em a). Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou é ∞, ou $-\infty$).

Prova da Regra de L'Hôspital Estamos supondo que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = L$.

Definimos

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \mid x \neq a\}$ e

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Da mesma maneira, G é contínua em I. Seja $x \in I$ e $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e diferenciáveis em (a, x), e $G' \neq 0$ lá (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$).

Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy existe um número y tal que $a < y < x$ e

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se fizermos $x \longrightarrow a^+$, então $y \longrightarrow a^+$ (uma vez que $a < y < x$).
Portanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral esquerdo é também L.
Logo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso prova a Regra de L'Hôspital quando a é finito.

Se a for infinito, vamos fazer $t = 1/x$.
Então $t \longrightarrow 0^+$ quando $x \longrightarrow \infty$; assim temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(pela Regra de L'Hôspital para } a \text{ finito)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

G Números Complexos

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. O número complexo $a + bi$ pode também ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado plano de Argand), como na Figura 1. Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado como o ponto $(0, 1)$.

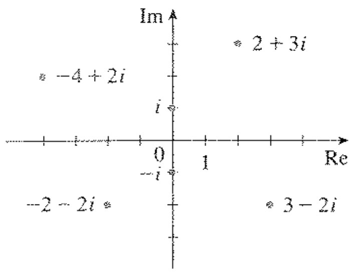


FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano de Argand

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a, e a **parte imaginária** é o número real b. Dessa forma, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária, –3. Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais e imaginárias forem iguais. No plano de Argand o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é dito eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva se mantenham:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso fica

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para encontrar o quociente de dois números complexos multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 □ Expresse o número $\dfrac{-1+3i}{2+5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levando-se em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = \frac{-1+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{13+11i}{2^2+5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

A interpretação geométrica do número complexo encontra-se na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão z em torno do eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentado a seguir. As provas seguem a partir da definição e serão requisitadas no Exercício 18.

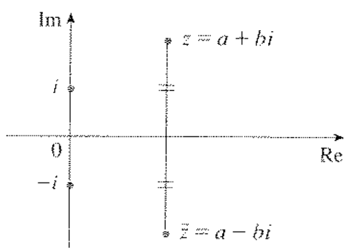


FIGURA 2

Propriedades dos Conjugados

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

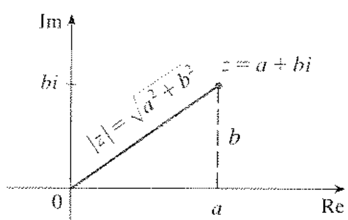


FIGURA 3

Observe que

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e, portanto,

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, podemos pensar i como a raiz quadrada de -1. Note, porém, que também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, $-i$ é uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c for um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\,i$$

Com essa convenção a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Ache as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são conjugadas complexas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre conjugadas complexas. (Se z for real, $\bar{z} = z$, logo z é a própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem uma solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem uma solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi provado por Gauss.

Forma Polar

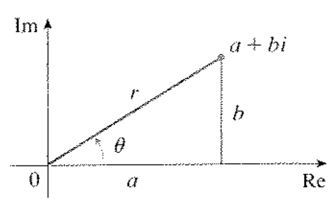


FIGURA 4

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

onde

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$$

O ângulo θ é chamado **argumento** de z, e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ não é única; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.
(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO
(a) Temos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\text{tg}\,\theta = 1$; assim, podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por conseguinte, a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}$. Uma vez que w está no

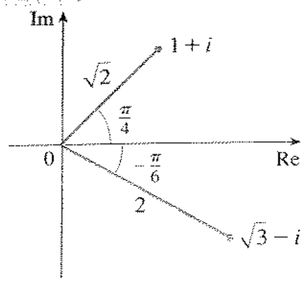


FIGURA 5

quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão na Figura 5.

A forma polar dos números complexos nos dá um *insight* sobre a multiplicação e a divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

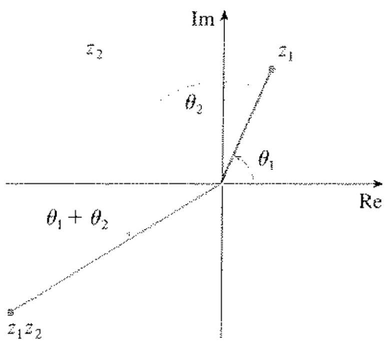


FIGURA 6

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

1

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que *para dividir dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

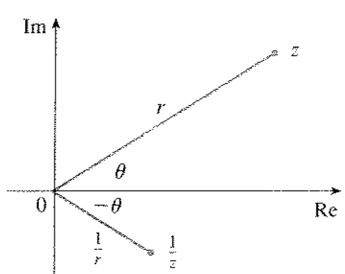


FIGURA 7

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$ (e, portanto, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

$$\boxed{\text{Se} \quad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad \text{então} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta).}$$

EXEMPLO 5 □ Ache o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

e

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

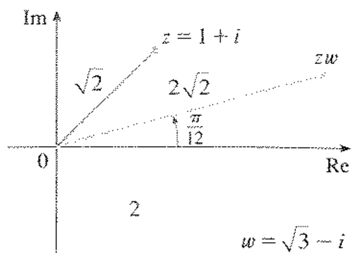


FIGURA 8

Assim, pela Equação 1,

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

Isso está ilustrado na Figura 8.

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como computar as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

então $$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)$$

e $$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

> $\boxed{2}$ **Teorema de De Moivre** Se $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e n for um inteiro positivo, então
>
> $$z^n = [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$$

Isso nos diz que *para elevar um número complexo à* n*-ésima potência, elevamos à* n*-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por* n.

EXEMPLO 6 □ Ache $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, pelo Teorema de De Moivre:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as raízes n-ésimas de números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar como

$$w = s(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e

$$\cos n\phi = \cos \theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Assim,
$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que dessa expressão resulta valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte:

$\boxed{3}$ **Raízes de um Número Complexo** Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre o círculo de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre esse círculo.

EXEMPLO 7 □ Ache as seis raízes sextas de $z = -8$ e faça um gráfico dessas raízes no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma trigonométrica, $z = 8(\operatorname{sen} \pi + i \sin \pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

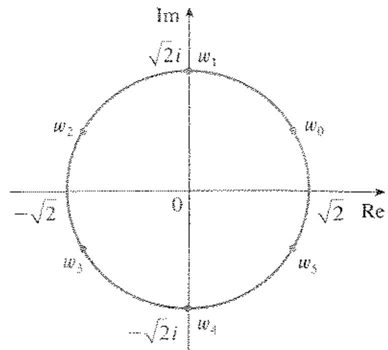


FIGURA 9
As seis raízes sextas de $z = -8$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$, como na Figura 9.

Exponencial Complexa

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11 (Volume II) pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia, definimos

4
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

5
$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obteremos
$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\,\underset{\text{sen}}{\sin}\,y \end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para seno e cosseno (Equações 11.10.15 e 11.10.16 do Volume II). O resultado é a famosa fórmula chamada **fórmula de Euler**:

6
$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\,\underset{\text{sen}}{\sin}\,y}$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

7
$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\underset{\text{sen}}{\sin}\,y)$$

EXEMPLO 8 □ Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

□ Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a matemática: 0, 1, e, i e π.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6), temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação (7), obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ □

Finalmente, notamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de provar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

G Exercícios

1–14 □ Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 - 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 3i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 □ Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}i$

17. $-4i$

18. Prove as seguintes propriedades dos números complexos:

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

(c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ onde n é um inteiro positivo

[*Sugestão:* Escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 □ Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 □ Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29–32 □ Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33–36 □ Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $(1 - \sqrt{3}i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

36. $(1 - i)^8$

37–40 □ Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1

38. As raízes quintas de 32

39. As raízes cúbicas de i

40. As raízes cúbicas de $1 + i$

41–46 □ Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função a valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções diferenciáveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use isso junto com a Equação 7 para provar que se $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

48. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma antiderivada de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando as partes real e imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

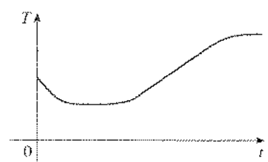
(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.

H Respostas dos Exercícios de Números Ímpares

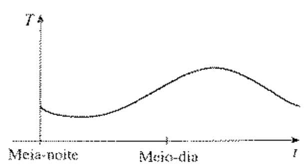
Capítulo 1

Exercícios 1.1

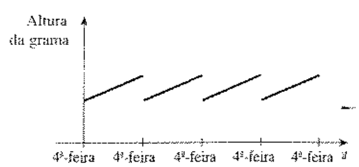
1. (a) -2 (b) 2,8 (c) -3, 1 (d) $-2{,}5$; 0,3
(e) $[-3, 3], [-2, 3]$ (f) $[-1, 3]$
3. $[-85, 115], [-325, 485], [-210, 200]$
5. Não **7.** Sim, $[-3, 2]$, $[-3, -2] \cup [-1, 3]$
9. Dieta, exercício ou doença
11.



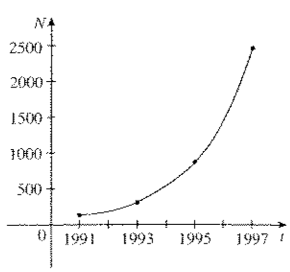
13.



15.

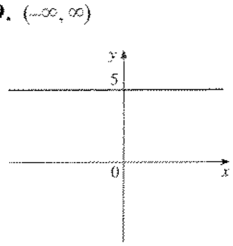


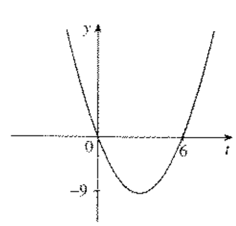
17. (a)



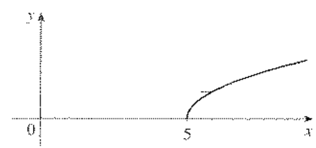
(b) 540, 1.450

19. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4, 6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2, 9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$
21. $-(h^2 + 3h + 2), x + h - x^2 - 2xh - h^2, 1 - 2x - h$
23. $\{x/x \neq \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$
25. $[0, \infty)$ **27.** $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
29. $(-\infty, \infty)$ **31.** $(-\infty, \infty)$

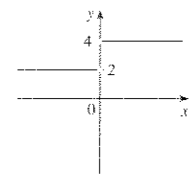




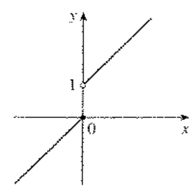
33. $[5, \infty)$



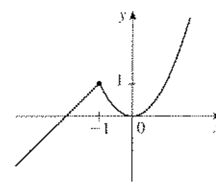
35. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



37. $(-\infty, \infty)$



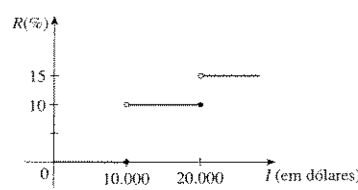
39. $(-\infty, \infty)$



41. $f(x) = -\frac{7}{6}x - \frac{4}{3}, -2 \leqslant x \leqslant 4$ **43.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

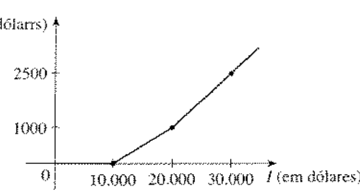
45. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 6 - 1{,}5x & \text{se } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$

47. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$
49. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$ **51.** $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$
53. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$
55. (a)

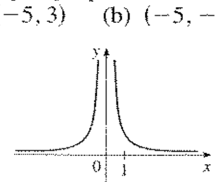


(b) \$ 400, \$ 1.900

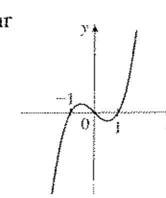
(c)



57. f é ímpar, g é par
59. (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$
61. Par



63. Nenhum dos dois **65.** Ímpar

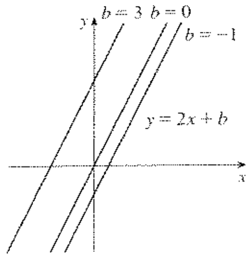


Exercícios 1.2 □

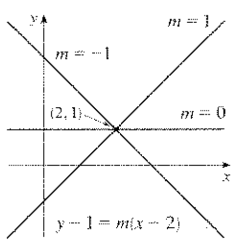
1. (a) Raiz (b) Algébrico (c) Polinominal (grau 9)
(d) Racional (e) Trigonométrico (f) Logarítmico

3. (a) h (b) f (c) g

5. (a) $y = 2x + b$, onde b é o intercepto y

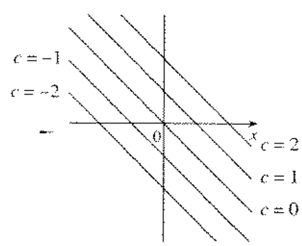


(b) $y = mx + 1 - 2m$, em que m é a inclinação

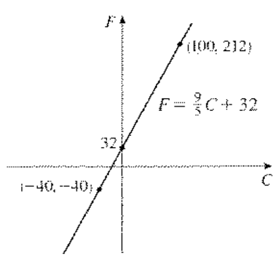


(c) $y = 2x - 3$

7. Seus gráficos têm inclinação –1.



9. (a)



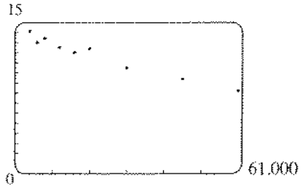
(b) $\frac{9}{5}$, varia em °F para todo 1 °C variado; 32, Fahrenheit corresponde a 0 °C

11. (a) $T = \frac{1}{6}N + \frac{307}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$, varia em °F para cada canto de grilo (cricri) por minuto (c) 76 °F

13. (a) $P = 0{,}434d + 15$ (b) 196 pés

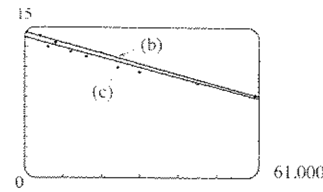
15. (a) Cosseno (b) Linear

17. (a)



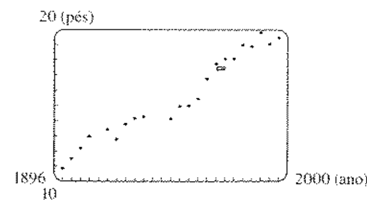
O modelo linear é apropriado

(b) $y = -0{,}000105x + 14{,}521$



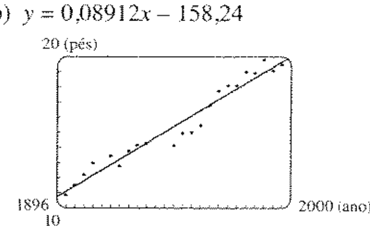
(c) $y = -0{,}00009979x + 13{,}951$ [Veja o gráfico em (b).]
(d) Em torno de 11,5 para cada 100 habitantes (e) Em torno de 6%
(f) Não

19. (a)



O modelo linear é apropriado

(b) $y = 0{,}08912x - 158{,}24$



(c) 20 pés (d) Não

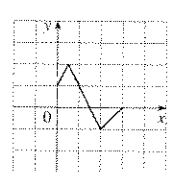
21. $y \approx 0{,}0012937x^3 - 7{,}06142x^2 + 12.823x - 7.743.770$; 1.914 milhões.

Exercícios 1.3 □

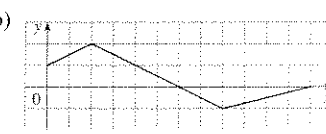
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$
(d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$
(g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

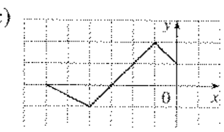
5. (a)



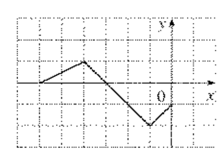
(b)



(c)

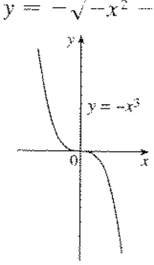


(d)

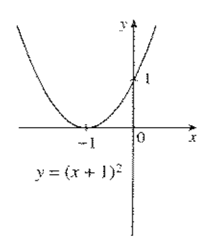


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

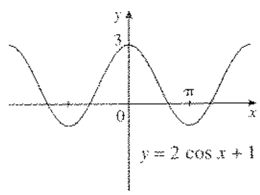
9.



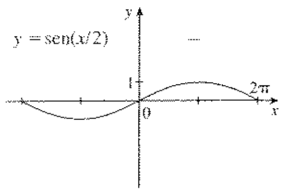
11.



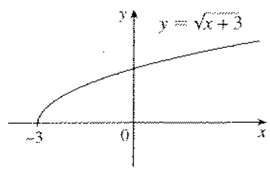
13.



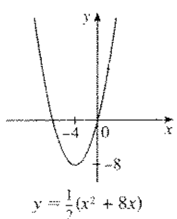
15.



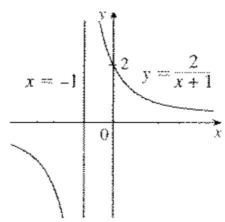
17.



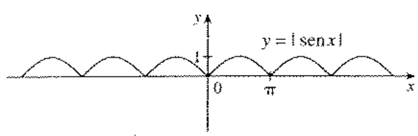
19.



21.



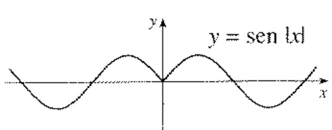
23.



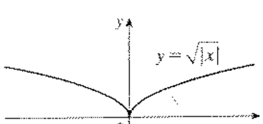
25. $L(t) = 12 + 2\operatorname{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. (a) A parte do gráfico de $y = f(x)$ para a direita do eixo y é refletida no eixo y.

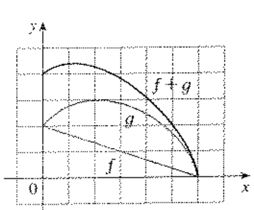
(b)



(c)

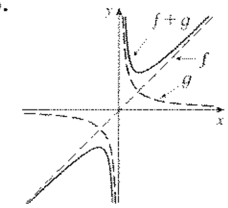


29.



31. $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1,\ (-\infty, \infty)$
$(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1,\ (-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2,\ (-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^3 + 2x^2)/(3x^2 - 1),\ \{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

33.



35. $(f \circ g)(x) = 3(6x^2 + 7x + 2),\ (-\infty, \infty)$
$(g \circ f)(x) = 6x^2 - 3x + 2,\ (-\infty, \infty)$
$(f \circ f)(x) = 8x^4 - 8x^3 + x,\ (-\infty, \infty)$
$(g \circ g)(x) = 9x + 8,\ (-\infty, \infty)$

37. $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(1 - \sqrt{x}),\ [0, \infty)$
$(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{\operatorname{sen} x},\ \{x \mid x \in [2n\pi, \pi + 2n\pi], n$ é um inteiro$\}$
$(f \circ f)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x),\ (-\infty, \infty)$
$(g \circ g)(x) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}},\ [0, 1]$

39. $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 6x + 5)/[(x+2)(x+1)], \{x \mid x \neq -2, -1\}$
$(g \circ f)(x) = (x^2 + x + 1)/(x+1)^2, \{x \mid x \neq -1, 0\}$
$(f \circ f)(x) = (x^4 + 3x^2 + 1)/[x(x^2+1)], \{x \mid x \neq 0\}$
$(g \circ g)(x) = (2x+3)/(3x+5), \{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

41. $(f \circ g \circ h)(x) = 2x - 1$

43. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

45. $g(x) = x^2 + 1, f(x) = x^{10}$

47. $g(x) = x^2,\ f(x) = x/(x + 4)$

49. $g(t) = \cos t,\ f(t) = \sqrt{t}$

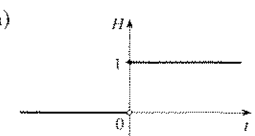
51. $h(x) = x^2,\ g(x) = 3^x,\ f(x) = 1 - x$

53. $h(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sec x,\ f(x) = x^4$

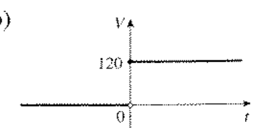
55. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) Não existe; $f(6) = 6$ não é o domínio de g. (e) 4 (f) -2

57. (a) $r(t) = 60t$
(b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; a área do círculo como uma função do tempo.

59. (a)

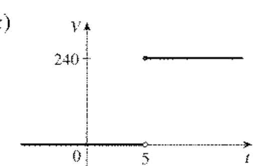


(b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

61. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

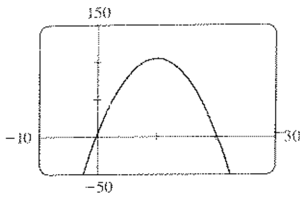
63. Sim

Exercícios 1.4 □

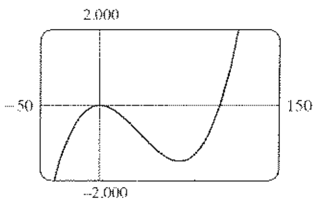
1. (d)

3. (c)

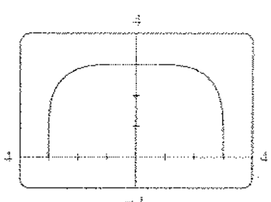
5.



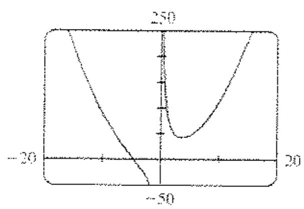
7.



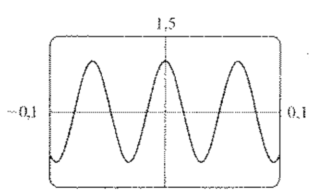
9.



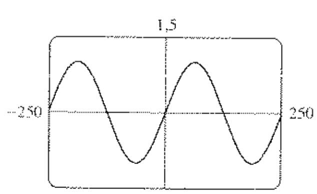
11.



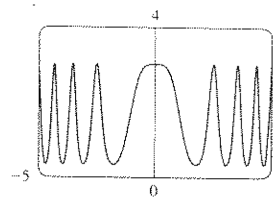
13.



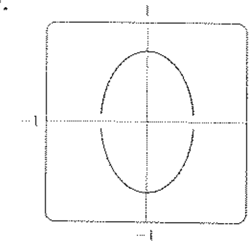
15.



17.



19.



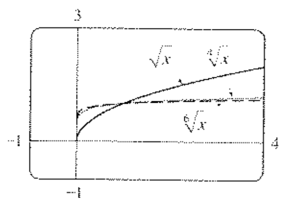
21. 9,05

23. 0, 0,88

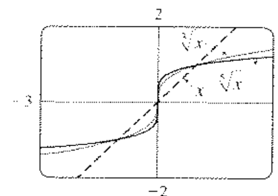
25. g

27. $-0{,}85 < x < 0{,}85$

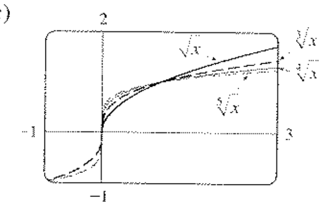
29. (a)



(b)

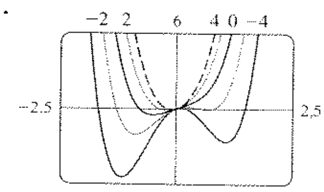


(c)



(d) Os gráficos das raízes pares são similares a $\sqrt{x}$ e os gráficos das raízes ímpares são similares a $\sqrt[3]{x}$. À medida que n cresce, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ torna-se mais íngreme próximo de 0 e mais achatado para $x > 1$.

31.



Se $c < 0$, o gráfico tem três corcovas: dois pontos de mínimo e um de máximo. As corcovas ficam mais achatadas à medida que fazemos c aumentar até $c = 0$, em que duas corcovas desaparecem e há somente um ponto de mínimo. Essa corcova move-se então à direita e tende à origem à medida que fazemos c aumentar.

33. A corcova fica maior e move-se para a direita.

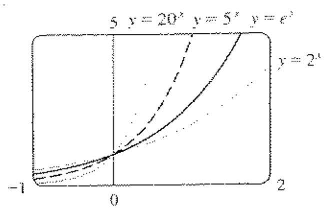
35. Se $c < 0$, o laço está à direita da origem; se $c > 0$, o laço está à esquerda. Quanto mais perto de 0 estiver c, maior será o laço.

Exercícios 1.5 □

1. (a) $f(x) = a^x, a > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$

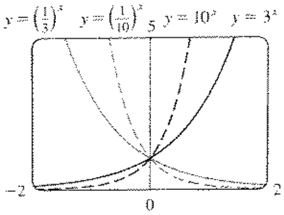
(d) Veja as Figuras 4(c), 4(b) e 4(a), respectivamente.

3.



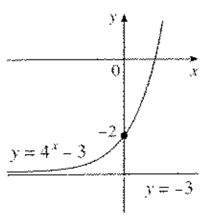
Todos tendem a 0 quando $x \to -\infty$, todos passam por $(0, 1)$ e todos são crescentes. Quanto maior for a base, mais rápida a taxa de crescimento.

5.

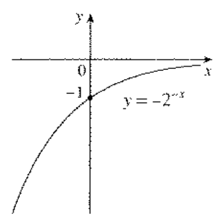


As funções com base maior que 1 são crescentes, enquanto as com base menor que 1 são decrescentes. As últimas são reflexos das primeiras em torno do eixo y.

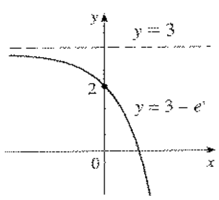
7.



9.



11.

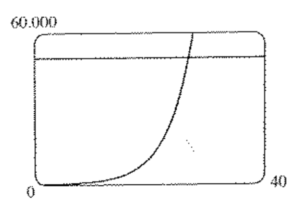


13. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$

15. (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

17. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **23.** Em $x \approx 35{,}8$

25. (a) 3.200 (b) $100 \cdot 2^{t/3}$ (c) 10.159
(d) $t \approx 26{,}9$ h



27. $y = ab^t$, em que $a \approx 3{,}154832569 \times 10^{-12}$ e $b \approx 1{,}017764706$; 5.498 milhões; 7.417 milhões

Exercícios 1.6 □

1. (a) Veja a Definição 1.
(b) Deve passar o Teste da Reta Horizontal.

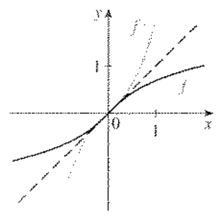
3. Não **5.** Sim **7.** Não **9.** Sim **11.** Não **13.** Não
15. Não **17.** 2 **19.** 0

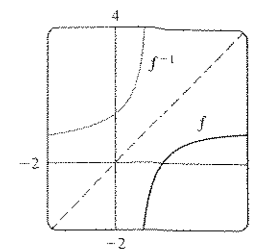
21. $F = \frac{9}{5}C + 32$; a temperatura Fahrenheit como uma função da temperatura Celsius; $[-273{,}15, \infty)$

23. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}, x \geqslant 0$ **25.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

27. $y = e^x - 3$ **29.** $f^{-1}(x) = \sqrt{2/(1-x)}$

31.



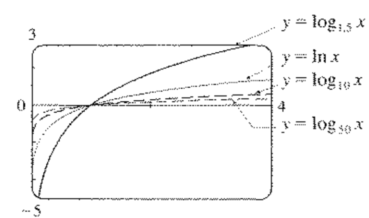


33. (a) É definida como a inversa da função exponencial com base a, isto é, $\log_a x = y \iff a^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Veja a Figura 11.

35. (a) 6 (b) -2 **37.** (a) 2 (b) 2 **39.** $\ln 8$

41. $\ln \dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$

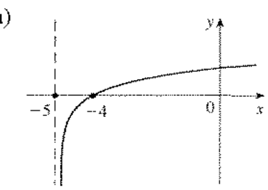
43.



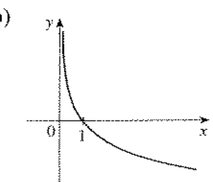
Todos os gráficos tendem a $-\infty$ quando $x \to 0^+$, todos passam por $(1, 0)$ e todos crescem. Quanto maior for a base, mais lenta será a taxa de crescimento.

45. Em torno de 1.084.588 mi

47. (a)



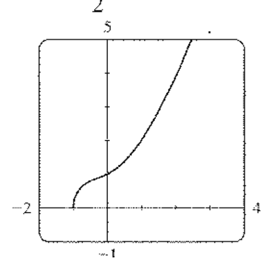
(b)



49. (a) $\sqrt{e}$ (b) $-\ln 5$ **51.** (a) $5 + \log_2 3$ ou $5 + (\ln 3)/\ln 2$
(b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4e})$ **53.** (a) $x < \ln 10$ (b) $x > 1/e$

55. (a) $(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3]$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - x^2), [0, \sqrt{3})$

57.

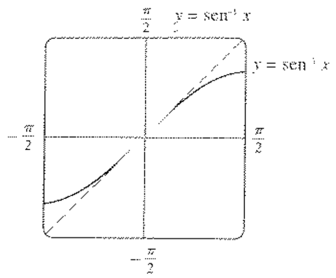


Passa o Teste da Reta Horizontal

$f^{-1}(x) = -(\sqrt[3]{4}/6)(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2})$, onde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; duas das expressões são complexas.

59. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; o tempo decorrido quando há n bactérias (b) Depois de 26,9 horas

61. (a) $y = \ln x + 3$ (b) $y = \ln(x + 3)$ (c) $y = -\ln x$
(d) $y = \ln(-x)$ (e) $y = e^x$ (f) $y = e^{-x}$ (g) $y = -e^x$
(h) $y = e^x - 3$
63. (a) $\pi/3$ (b) π
65. (a) $\pi/3$ (b) $-\pi/4$
67. (a) 0,7 (b) $\pi/3$
71. $x/\sqrt{1 + x^2}$ **73.**



O segundo gráfico é a reflexão do primeiro em torno da reta $y = x$.

75. (a) $\left[\frac{-2}{3}, 0\right]$ (b) $[-\pi/2, \pi/2]$

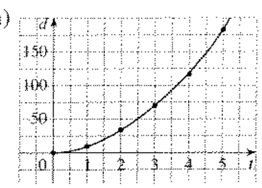
Capítulo 1 Revisão □

Testes Falso–Verdadeiro

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso **9.** Verdadeiro
11. Falso

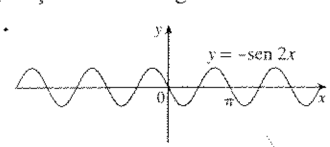
Exercícios

1. (a) 2,7 (b) 2,3, 5,6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) Não; falha o Teste da Reta Horizontal.
(g) Ímpar, seu gráfico é simétrico em torno da origem.
3. (a)

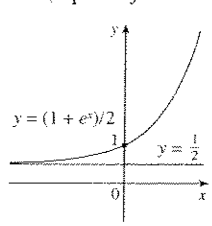


(b) 150 pés

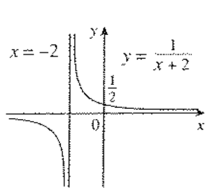
5. $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$, $[0, 2]$ **7.** $\mathbb{R}$, $[0, 2]$
9. (a) Desloque o gráfico oito unidades para cima.
(b) Desloque o gráfico oito unidades para a esquerda.
(c) Amplie o gráfico verticalmente por um fator de 2, então desloque-o uma unidade para cima.
(d) Desloque o gráfico duas unidades para a direita e duas unidades para baixo.
(e) Faça a reflexão do gráfico em torno do eixo x.
(f) Faça a reflexão do gráfico em torno da reta $y = x$ (supondo f um a um).
11.



13.

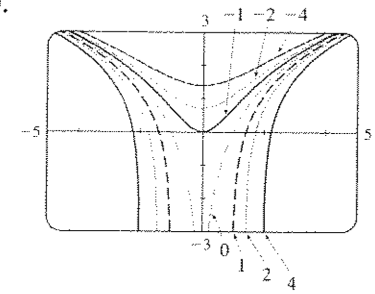


15.



17. (a) Nenhum dos dois (b) Ímpar (c) Par (d) Nenhum dos dois

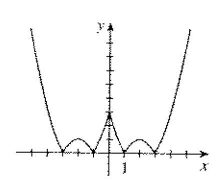
19. $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
$(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
$(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$
21. $y = 0{,}2493x - 423{,}4818$; cerca de 77,6 anos **23.** 1
25. (a) 9 (b) 2 (c) $1/\sqrt{3}$ (d) $\frac{3}{5}$
27. (a) $\frac{1}{16}$ g (b) $m(t) = 2^{-t/4}$
(c) $t(m) = -4 \log_2 m$; o tempo decorrido quando há m gramas de ^{100}Pd (d) Por volta de 26,6 dias
29.



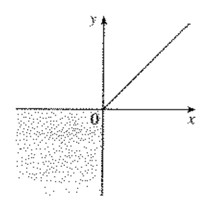
Para $c < 0$, f está definida em toda a parte. À medida que c cresce, o mergulho $x = 0$ é cada vez mais profundo. Para $c \geqslant 0$, o gráfico tem assíntotas em $x = \pm\sqrt{c}$.

Princípios para a Resolução de Problemas □

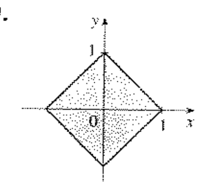
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, onde a é a altura e h, o tamanho da hipotenusa.
3. $-\frac{7}{3}, 9$
5.



7.



9.



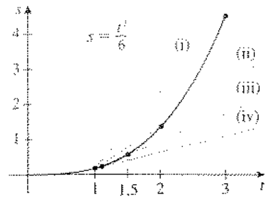
11. 5 **13.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3]$
15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

Capítulo 2

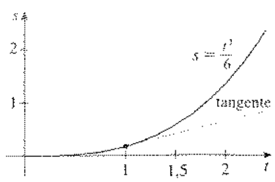
Exercícios 2.1 □

1. (a) −44,4, −38,8, −27,8, −22,2, $-16{,}\overline{6}$ (b) −33,3
(c) $-33\frac{1}{3}$
3. (a) (i) 0,333333 (ii) 0,263158 (iii) 0,251256
(iv) 0,250125 (v) 0,2 (vi) 0,238095 (vii) 0,248756
(viii) 0,249875 (b) $\frac{1}{4}$
(c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
5. (a) (i) −32 pés/s (ii) −25,6 pés/s (iii) −24,8 pés/s
(iv) −24,16 pés/s (b) −24 pés/s

7. (a) (i) $\frac{13}{6}$ pés/s (ii) $\frac{7}{6}$ pés/s (iii) $\frac{19}{24}$ pés/s (iv) $\frac{331}{600}$ pés/s
(b) $\frac{1}{2}$ pé/s (c)



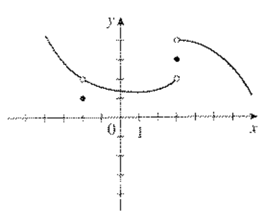
(d)



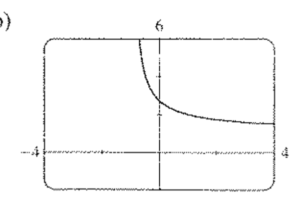
9. (a) 0, 1,7321, −1,0847, −2,7433, 4,3301, −2,8173, 0, −2,1651, −2,6061, −5, 3,4202; não (c) −31,4

Exercícios 2.2

1. Sim
3. (a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser feitos arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo a −3 (mas não igual a −3).
(b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando-se x suficientemente próximo de 4 através de valores maiores que 4.
5. (a) 2 (b) 3 (c) Não existe (d) 4 (e) Não existe
7. (a) −1 (b) −2 (c) Não existe (d) 2 (e) 0
(f) Não existe (g) 1 (h) 3
9. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞
(f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$
11. (a) 1 (b) 0 (c) Não existe
13.



15. $\frac{2}{3}$ **17.** $\frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{3}{5}$
23. ∞ **25.** ∞ **27.** $-\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$; ∞
33. (a) 2,71828 (b)

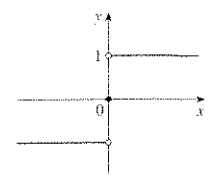


35. (a) 0,998000, 0,638259, 0,358484, 0,158680, 0,038851, 0,008928, 0,001465; 0
(b) 0,000572, −0,000614, −0,000907, −0,000978, −0,000993, −0,001000; −0,001

37. Não importa quantas vezes daremos o *zoom* na direção da origem, o gráfico aparenta consistir em retas quase verticais. Isso indica oscilações mais freqüentes à medida que $x \to 0$.
39. $x \approx \pm 0{,}90, \pm 2{,}24$; $x = \pm \text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$

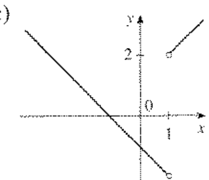
Exercícios 2.3

1. (a) 5 (b) 9 (c) 2 (d) $-\frac{1}{3}$ (e) $-\frac{3}{8}$ (f) 0
(g) Não existe (h) $-\frac{6}{11}$
3. 59 **5.** 205 **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** 0 **11.** 5 **13.** Não existe
15. $\frac{6}{5}$ **17.** 8 **19.** 4 **21.** 6 **23.** $\frac{1}{6}$ **25.** $-\frac{1}{16}$
27. 108 **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** (a), (b) $\frac{2}{3}$ **35.** 1
39. 0 **41.** Não existe **43.** Não existe
45. (a)



(b) (i) 1
(ii) −1
(iii) Não existe
(iv) 1

47. (a) (i) 2 (ii) −2 (b) Não (c)



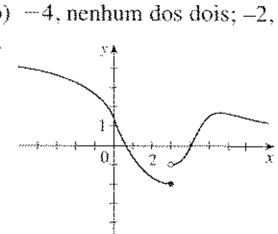
49. (a) (i) −2 (ii) Não existe (iii) −3 (b) (i) $n - 1$ (ii) n (c) a não é um inteiro. **59.** 15; −1

Exercícios 2.4

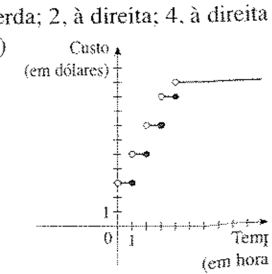
1. (a) $|x - 2| < 0{,}02$ (b) $|x - 2| < 0{,}002$
3. $\frac{4}{7}$ (ou qualquer número menor positivo)
5. 1,44 (ou qualquer número menor positivo)
7. 0,6875 (ou qualquer número menor positivo)
9. 0,11; 0,012 (ou qualquer número menor positivo)
11. 0,07 (ou qualquer número menor positivo)
13. (a) $\sqrt{1.000/\pi}$ cm (b) Dentro de aproximadamente 0,0445 c
(c) Raio; área; $\sqrt{1.000/\pi}$; 1.000; 5; $\approx$ 0,0445
35. (a) 0,093 (b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, onde $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$
41. Within 0,1

Exercícios 2.5

1. $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$
3. (a) −4 (removível), −2 (salto), 2 (salto), 4 (infinito),
(b) −4, nenhum dos dois; −2, à esquerda; 2, à direita; 4, à direita
5.



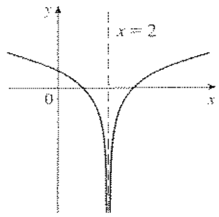
7. (a)

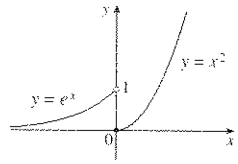


(b) Descontinuidade em $t = 1, 1, 2, 3$

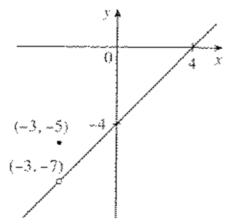
9. 6

15. $f(2)$ não está definida **17.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe





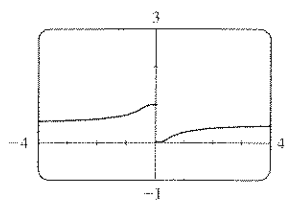
19. $\lim_{x\to -3} f(x) \neq f(-3)$



21. $\{x \mid x \neq -3, -2\}$ **23.** $[\frac{1}{2}, \infty)$ **25.** $\mathbb{R}$

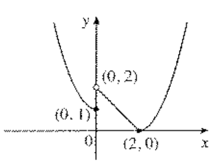
27. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

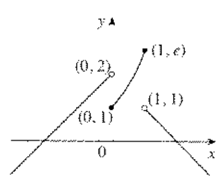
29. $x = 0$



31. $\frac{7}{3}$ **33.** 1

37. 0, à esquerda **39.** 0, à direita; 1, à esquerda





41. $\frac{1}{3}$ **43.** (a) $g(x) = x - 4$

(c) $g(x) = x^2 - 4x + 16$ (d) $g(x) = 1/(3 + \sqrt{x})$

51. (b) (0,44, 0,45) **53.** (b) 1,434 **59.** Nada **61.** Sim

Exercícios 2.6 □

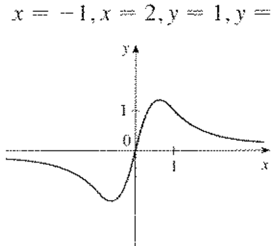
1. (a) Quando x se torna grande, $f(x)$ tende a 5.

(b) Quando x se torna grande, porém negativo, $f(x)$ tende a 3.

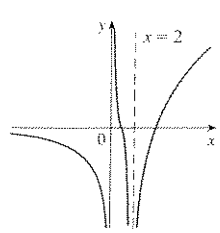
3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) 1 (e) 2

(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

5.



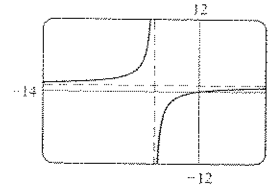
7.

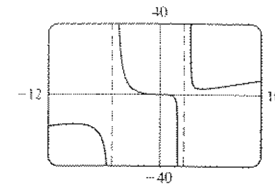


9. 0 **11.** $\frac{3}{2}$ **13.** 0 **15.** $-\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** 2

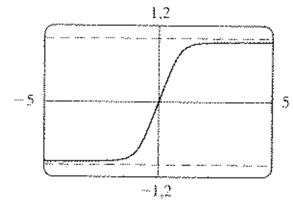
21. 3 **23.** $\frac{1}{6}$ **25.** $(a - b)/2$ **27.** ∞ **29.** ∞ **31.** $-\infty$ **33.** ∞

35. (a) . (b) $-\frac{1}{2}$ **37.** $y = 1, x = -4$ **39.** $x = 2, x = -5$

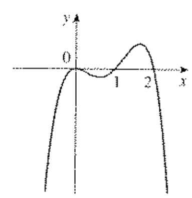


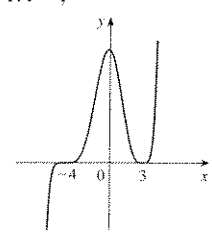


41. $y = \pm 1$ **43.** $f(x) = (2 - x)/[x^2(x - 3)]$

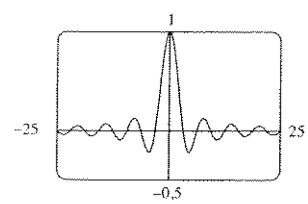


45. $-\infty, -\infty$ **47.** $\infty, -\infty$



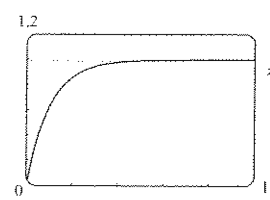


49. 0 (b) Um número infinito de vezes



51. (a) 0 (b) $\pm\infty$ **53.** 4

55. (a) v^* (b)



$\approx$ 0,47 s

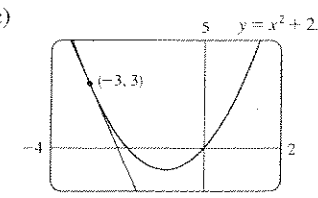
57. $N \geqslant 13$ **59.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$ **61.** (a) $x > 100$

Exercícios 2.7 □

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

3. Inclinação em D, E, C, A, B

5. (a) -4 (b) $y = -4x - 9$ (c)

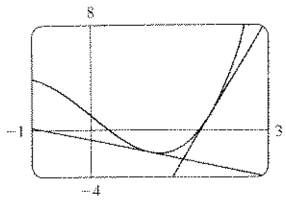


7. $y = -x + 3$ **9.** $y = -x + 5$

11. (a) $-2/(a+3)^2$ (b) (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{2}{9}$ (iii) $-\frac{1}{8}$

13. (a) $3a^2 - 4$ (b) $y = -x - 1, y = 8x - 15$

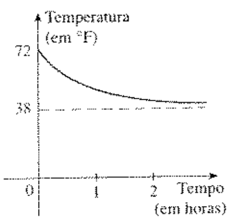
(c)



15. (a) 0 (b) C (c) Aumentando a velocidade, diminuindo a velocidade ou nenhum dos dois (d) O carro parado.

17. −24 pés/s **19.** $(12a^2 + 6)$m/s, 18m/s, 54 m/s, 114 m/s

21.



Maior (em grandeza)

23. (a) (i) −1,2 °C/h (ii) −1,25 °C/h (iii) −1,3 °C/h

(b) −1,9 °C/h

25. (a) (i) 794 mil/ano (ii) 640 mil/ano (iii) 301 mil/ano

(b) 470,5 mil/ano (c) 427,5 mil/ano

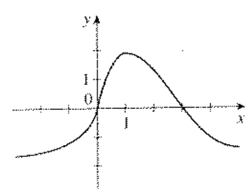
27. (a) (i) \$ 20,25/unidade (ii) \$ 20,05/unidade (b) \$ 20/unidade

Exercícios 2.8 □

1. A reta de $(2, f(2))$ a $(2+h, f(2+h))$

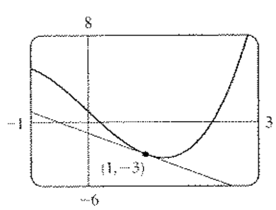
3. $g'(0), 0, g'(4), g'(2), g'(-2)$

5.



7. 7; $y = 7x - 12$

9. (a) -2; $y = -2x - 1$ (b)



11. (a) 3,296 (b) 3,3 **13.** $-2 + 8a$ **15.** $5/(a+3)^2$

17. $-1/\left[2(a+2)^{3/2}\right]$ **19.** $f(x) = x^{10}, a = 1$ ou $f(x) = (1+x)^{10}, a = 0$

21. $f(x) = 2^x, a = 5$ **23.** $f(x) = \cos x, a = \pi$ ou $f(x) = \cos(\pi + x), a = 0$

25. −2 m/s

27. (a) A taxa na qual o custo está mudando pela onça de ouro produzida; dólar por onça.

(b) Quando a 800ª onça de ouro for produzida, o custo da produção será de \$ 17/onça.

(c) Decresce em um termo curto; decresce no longo termo.

29. (a) A taxa do consumo do combustível está variando com relação à velocidade: (gal/h)/(mi/h)

(b) O consumo de combustível é reduzido para 0,05 (gal/h)/(mi/h) quando a velocidade do carro atinge 20 mi/h.

31. A taxa com que a temperatura está variando às 10 horas da manhã: 4° F/h

33. (a) A taxa com que a solubilidade do oxigênio varia com a temperatura da água; (mg/L)/°C

(b) $S'(16) \approx -0{,}25$; como a temperatura aumenta passados 16 °C, a solubilidade do oxigênio decresce a uma txa de 0,25 (mg/L)/°C.

35. Não existe

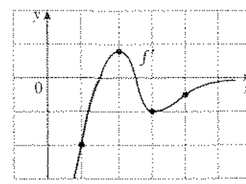
Exercícios 2.9 □

1. (a) −2

(b) 0,8

(c) −1

(d) −0,5



3. (a) 1,5

(b) 1

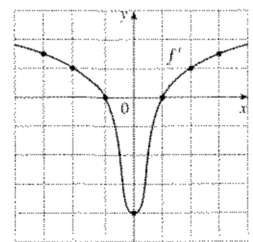
(c) 0

(d) −4

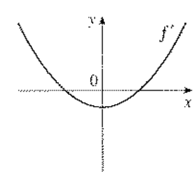
(e) 0

(f) 1

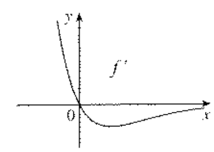
(g) 1,5



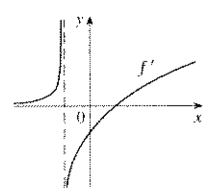
5.



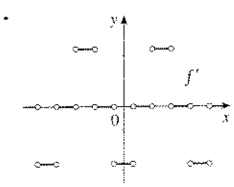
7.



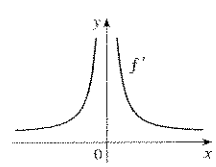
9.



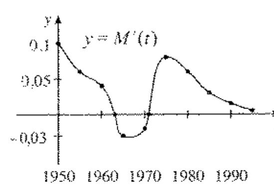
11.



13.

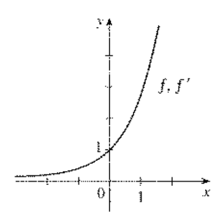


15.



1963 a 1971

17.



$f'(x) = e^x$

19. (a) 0, 1, 2, 4 (b) −1, −2, −4 (c) $f'(x) = 2x$

21. $f'(x) = 0, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **23.** $f'(x) = -6x, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **25.** $f'(x) = 3x^2 - 3, \mathbb{R}, \mathbb{R}$

27. $g'(x) = 1/\sqrt{1+2x}, \left[-\frac{1}{2}, \infty\right), \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

29. $G'(t) = 4/(t+1)^2, (-\infty, -1) \cup (-1, \infty), (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

31. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **33.** (a) $f'(x) = 1 + 2/x^2$

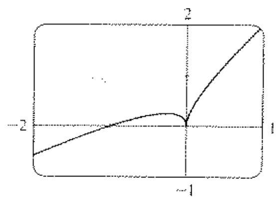
35. (a) A variação segundo a qual a taxa de desemprego está variando, em porcentagem de desemprego por ano.

(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1991	0,70	1996	−0,35
1992	0,05	1997	−0,45
1993	−0,70	1998	−0,35
1994	−0,65	1999	−0,25
1995	−0,35	2000	−0,20

37. 4 (descontinuidade); 8 (bico); −1, 11 (tangentes verticais)

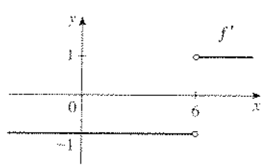
39.



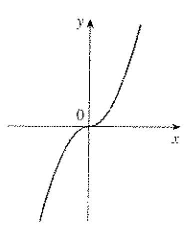
Diferenciável em −1; não diferenciável em 0

41. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

43. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$ ou $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$



45. (a)

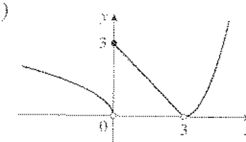


(b) Todo x

(c) $f'(x) = 2|x|$

49. 63°

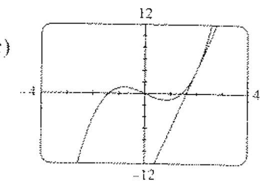
(vi) 0 (b) Em 0 e 3 (c)



33. $\mathbb{R}$ **37.** (a) −8 (b) $y = -8x + 17$

39. (a) (i) 3 m/s (ii) 2,75 m/s (iii) 2,625 m/s (iv) 2,525 m/s (b) 2,5 m/s

41. (a) 10 (b) $y = 10x - 16$ (c)

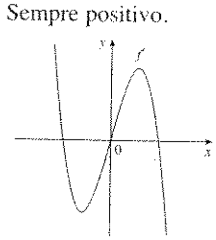


43. (a) A taxa segundo a qual o custo varia em relação à taxa de juros; dólares/(porcentuais por ano).

(b) Passados 10% a taxa de juros cresce, o custo é crescente a uma taxa de $ 1.200/(porcentuais por ano).

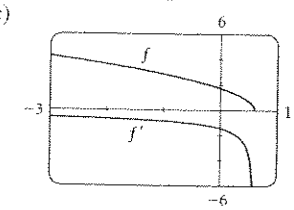
(c) Sempre positivo.

45.



47. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3-5x)^{-1/2}$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right]$, $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

(c)



49. −4 (descontinuidade), −1 (bico), 2 (descontinuidade), 5 (tangente vertical)

51. A taxa com a qual o valor total da moeda norte-americana em circulação está variando em bilhões de dólares por ano; $ 21,95 bilhões/ano. **53.** 0

Capítulo 2 Revisão □

Testes Falso-Verdadeiro

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro **9.** Verdadeiro **11.** Falso **13.** Verdadeiro **15.** Verdadeiro **17.** Falso

Exercícios

1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Não existe (iv) 2 (v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) −1 (b) $y = 4$, $y = -1$ (c) $x = 0$, $x = 2$ (d) −3, 0, 2, 4

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $-\frac{1}{8}$ **13.** −1

15. 0 **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** 0

23. $x = 0$, $y = 0$ **25.** 1

31. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Não existe (iv) 0 (v) 0

Problemas Quentes □

1. $\frac{2}{3}$ **3.** −4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{3}{4}$

11. (b) Sim (c) Sim; não

13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$

Capítulo 3

Exercícios 3.1 □

1. (a) Veja a Definição do Número e (página 189).

(b) 0,99, 1,03; $2{,}7 < e < 2{,}8$

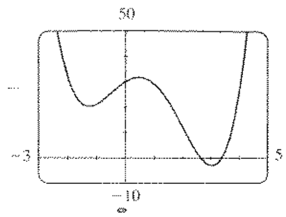
3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(x) = 5$ **7.** $f'(x) = 2x + 3$

9. $f'(t) = t^3$ **11.** $y' = \frac{2}{5}x^{-7/5}$ **13.** $V'(r) = 4\pi r^2$

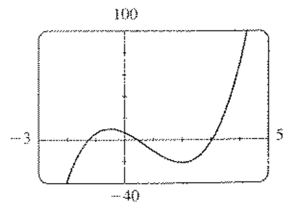
15. $Y'(t) = -54t^{-10}$ **17.** $G'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right) - 2e^x$

19. $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$ **21.** $g'(x) = 2x - (2/x^3)$

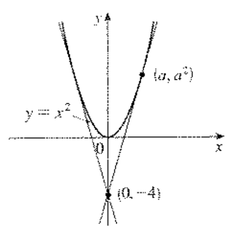
23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \left(2/\sqrt{x}\right) - 3/\left(2x\sqrt{x}\right)$ **25.** $y' = 0$
27. $y' = 2ax + b$ **29.** $v' = 2t + 3/\left(4t\sqrt[4]{t^3}\right)$
31. $z' = -10A/y^{11} + Be^y$ **33.** $f'(x) = e^x - 5$
35. $45x^{14} - 15x^2$ **37.** 3 **39.** $y = 2x + 2$
41. $y = 3x - 1$
43. (a)

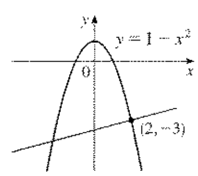


(c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$

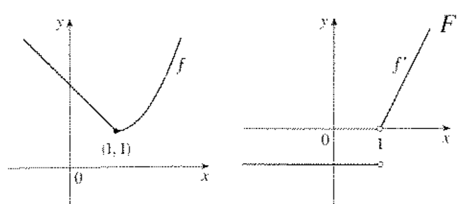


45. $(-2, 21), (1, -6)$
49. $(\pm 2, 4)$ **51.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$





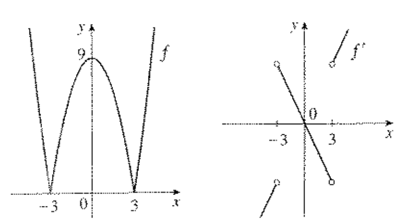
55. Não



57. (a) Não diferenciável em 3 ou −3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } |x| > 3 \\ -2x & \text{se } |x| < 3 \end{cases}$$

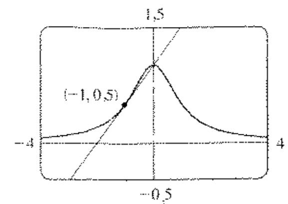
(b)



59. $a = -\frac{1}{2}, b = 2$ **61.** $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$ **63.** 1.000

Exercícios 3.2

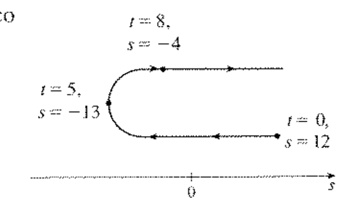
1. $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$ **3.** $f'(x) = x(x + 2)e^x$
5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$
9. $V'(x) = 14x^6 - 4x^3 - 6$
11. $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$
13. $y' = 2t(1 - t)/(3t^2 - 2t + 1)^2$
15. $y' = (r^2 - 2)e^r$ **17.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$
19. $y' = -(4x^3 + 2x)/(x^4 + x^2 + 1)^2$
21. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$ **23.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
25. $y = 2x$
27. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



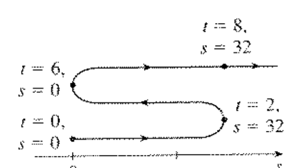
29. (a) $e^x(x - 3x)/x^4$
31. (a) −16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20 **33.** 7
35. (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$ **37.** (a) $y' = xg'(x) + g(x)$
(b) $y' = [g(x) - xg'(x)]/[g(x)]^2$ (c) $y' = [xg'(x) - g(x)]/x^2$
39. $ 1,627 bilhões/ano
41. Dois, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \left(1 \mp \sqrt{3}\right)/2\right)$ **43.** (c) $3e^{3x}$

Exercícios 3.3

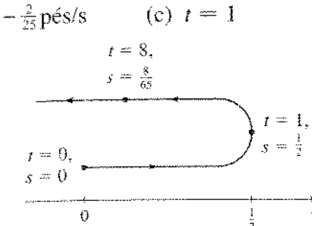
1. (a) $2t - 10$ (b) −4 pés/s (c) $t = 5$ (d) $t > 5$
(e) 34 pés (f) Veja o gráfico à direita.



3. (a) $3t^2 - 24t + 36$ (b) −9 pés/s (c) $t = 2, 6$
(d) $0 \leqslant t < 2, t > 6$ (e) 96 pés
(f) (f) veja o gráfico à direita.



5. (a) $(1 - t^2)/(t^2 + 1)^2$ (b) $-\frac{2}{25}$ pés/s (c) $t = 1$
(d) $0 \leqslant t < 1$ (e) $\frac{57}{65}$ pés
(f) Veja o gráfico à direita.

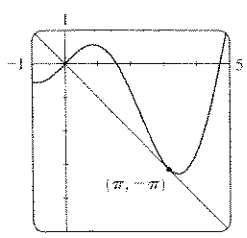


7. $t = 4$ s **9.** (a) 5,02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s
11. (a) 30 mm²/mm; a taxa segundo a qual a área cresce em relação ao comprimento do lado quando x atinge 15 mm.
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$

13. (a) (i) 5π (ii) $4{,}5\pi$ (iii) $4{,}1\pi$
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi r\, \Delta r$
15. (a) 8π pé²/pé (b) 16π pé²/pé
(c) 24π pé²/pé. A taxa aumenta quando o raio cresce
17. (a) 6 kg/m (b) 12 kg/m (c) 18 kg/m; no extremo direito; no extremo esquerdo
19. (a) 4,75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s
21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) No início
23. (a) 16 milhões/ano; 78,5 milhões/ano
(b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a \approx 0{,}00129371$, $b \approx -7{,}061422$, $c \approx 12.822{,}979$, e $d \approx -7.743{,}771$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14,48 milhões/ano; 75,29 milhões/ano
(e) 81,62 milhões/ano
25. (a) $a^2k/(akt + 1)^2$ (c) Tende a a mols/L
(d) Tende a 0 (e) A reação virtualmente pára
27. (a) 0,926 cm/s; 0,694 cm/s; 0
(b) 0; $-92{,}6$ (cm/s)/cm; $-185{,}2$ (cm/s)/cm
(c) No centro; na aresta
29. (a) $C'(x) = 3 + 0{,}02x + 0{,}0006x^2$
(b) \$ 11/ano, a taxa segundo a qual o custo varia quando o centésimo par de *jeans* está sendo produzido; o custo de 101º par.
(c) \$ 11,07/par
31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; a média da produtividade cresce quando novos trabalhos são adicionados
33. $-0{,}2436$ K/min
35. (a) 0 e 0 (b) $C = 0$
(c) (0, 0), (500, 50); é possível para as espécies coexistirem

Exercícios 3.4 □

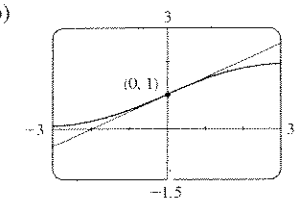
1. $f'(x) = 1 - 3\cos x$ **3.** $y' = \cos x + 10\sec^2 x$
5. $g'(t)\, 3t^2 \cos t - t^3 \operatorname{sen} t$
7. $h'(\theta) = -\operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta\, e^{\theta}(\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cossec}^2\theta)$
9. $y' = \dfrac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$
13. $y'\ (x\cos x - 2\operatorname{sen} x)/x^3$ **15.** $y' = \sec\theta\ \sec^2\theta + \operatorname{tg}^2\theta$
21. $y = 2x + 1 - \frac{1}{2}\pi$ **23.** $y = x + 1$
25. (a) $y = -x$ (b)



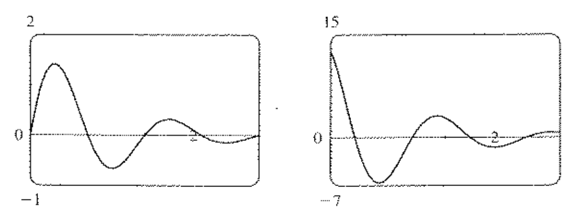
27. (a) $2 - \operatorname{cossec}^2 x$ **29.** $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n é um inteiro
31. (a) $8\cos t$ (b) $4\sqrt{3}$, -4; à esquerda **33.** 5 pé/rad
35. 3 **37.** 3 **39.** sen 1 **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{1}{2}$
45. (a) $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ (b) $\sec x\ \operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/\cos^2 x$
(c) $\cos x - \operatorname{sen} x = (\operatorname{cotg} x - 1)/\operatorname{cossec} x$ **47.** 1

Exercícios 3.5 □

1. $4\cos 4x$ **3.** $-20x(1 - x^2)^9$
5. $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$
7. $F'(x) = 7(x^3 + 4x)^6(3x^2 + 4)$ [ou $7x^6(x^2 + 4)^6(3x^2 + 4)$]
9. $F'(x) = \dfrac{2 + 3x^2}{4(1 + 2x + x^3)^{3/4}}$ **11.** $g'(t) = -\dfrac{12t^3}{(t^4 + 1)^4}$
13. $y' = -3x^2 \operatorname{sen}(a^3 + x^3)$ **15.** $y' = -me^{-mx}$
17. $g'(x) = 4(1 + 4x)^4(3 + x - x^2)^7(17 + 9x - 21x^2)$
19. $y' = 8(2x - 5)^3(8x^2 - 5)^{-4}(-4x^2 + 30x - 5)$
21. $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ **23.** $y' = (\cos x - x \operatorname{sen} x)e^{x\cos x}$
25. $F'(z) = 1/[(z - 1)^{1/2}(z + 1)^{3/2}]$ **27.** $y' = (r^2 + 1)^{-3/2}$
29. $y' = -\operatorname{sen} x \sec^2(\cos x)$ **31.** $y' = 2^{\operatorname{sen}\pi x}(\pi \ln 2)\cos \pi x$
33. $y' = -12\cos x \operatorname{sen} x\,(1 + \cos^2 x)^5$
35. $y' = 4\sec^2 x \operatorname{tg} x$ **37.** $y' = -2\cos\theta \operatorname{cotg}(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{cossec}^2(\operatorname{sen}\theta)$
39. $y' = [1 + 1/(2\sqrt{x})]/(2\sqrt{x + \sqrt{x}})$
41. $y' = \cos(\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen} x})(\sec^2\sqrt{\operatorname{sen} x})[1/(2\sqrt{\operatorname{sen} x})](\cos x)$
43. $y = 20x + 1$ **45.** $y = -x + \pi$
47. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



49. (a) $-1/(x^2\sqrt{1 - x^2})$
51. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n é um inteiro
53. 28 **55.** (a) 30 (b) 36
57. (a) $\frac{3}{4}$ (b) Não existe (c) -2 **59.** $-17{,}4$
61. (a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x) = e^{f(x)} f'(x)$
63. (a) $f'(x) = 4/x$ (b) $g'(x) = 1/x$
(c) $F'(x) = 4[L(x)]^3/x$ (d) $G'(x) = -1/x$
65. $v(t) = \frac{5}{2}\pi\cos(10\pi\, t)$ cm/s
67. (a) $dB/dt = \frac{7}{54}\pi\cos(2\pi t/5{,}4)$ (b) 0,16
69. $v(t) = 2e^{-1{,}5t}(2\pi\cos 2\pi t - 1{,}5\operatorname{sen} 2\pi t)$

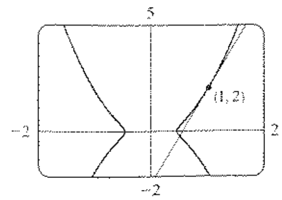


71. (a) $y \approx 100{,}012437e^{-10{,}005531t}$ (b) $-670{,}63\mu$A
73. (b) Forma fatorada **77.** (b) $-n\cos^{n-1}x \operatorname{sen}[(n + 1)x]$

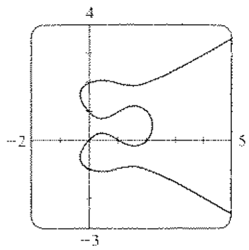
Exercícios 3.6 □

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$
3. (a) $y' = -y^2/x^2$ (b) $y = x/(x - 1)$, $y' = -1/(x - 1)^2$
5. $y' = -x/y$ **7.** $y' = -x(3x + 2y)/(x^2 + 8y)$
9. $y' = (3 - 2xy - y^2)/(x^2 + 2xy)$
11. $y' = (-2xy^2 - \operatorname{sen} y)/(2x^2y + x\cos y)$ **13.** $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$
15. $y' = (1 - 2xye^{x^2y})/(x^2e^{x^2y} - 1)$
17. $y' = (4xy\sqrt{xy} - y)/(x - 2x^2\sqrt{xy})$ **19.** $y' = -y/x$
21. $-\frac{16}{13}$ **23.** $(1 - 4y^3 - 2x^2y - x^4)/(2xy^2 + 4x^3y)$
25. $y = -x + 2$ **27.** $y = x + \frac{1}{2}$ **29.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

31. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)

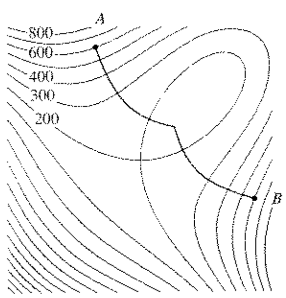


33. (a)

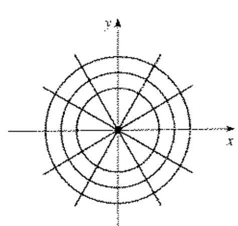


Oito; $x \approx 0{,}42,\ 1{,}58$
(b) $y = -x + 1$,
$y = \frac{1}{3}x + 2$
(c) $1 \mp \sqrt{3}/3$

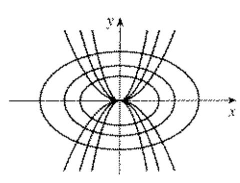
35. $(\pm \frac{5}{4}\sqrt{3},\ \pm \frac{5}{4}$ **37.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$
41. $y' = 1/[2\sqrt{x}(1+x)]$ **43.** $y' = 1/\sqrt{-x^2 - x}$
45. $H'(x) = 1 + 2x\ \text{arctg}\ x$ **47.** $h'(t) = 0$
49. $y' = -2e^{2x}/\sqrt{1 - e^{4x}}$
51. $e^x - x^2/(1 + x^2) - 2x\ \text{arctg}\ x$
57.



59.



61.

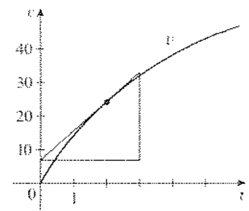


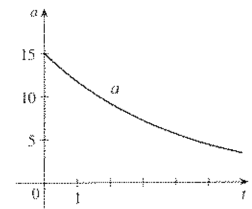
63. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **65.** $(-1, -1), (1, 1)$ **67.** (b) $\frac{3}{2}$ **69.** 2

Exercícios 3.7 □

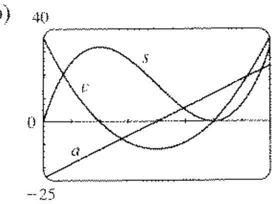
1. $a = f, b = f', c = f''$
3. a = aceleração, b = velocidade, c = posição
5. $f'(x) = 5x^4 + 12x - 7,\ f''(x) = 20x^3 + 12$
7. $y' = -2\ \text{sen}\ 2\theta,\ y'' = -4\cos 2\theta$
9. $F'(t) = -42(1 - 7t)^5$, $F''(t) = 1.470(1 - 7t)^4$
11. $h'(u) = -7/(1 + 3u)^2$, $h''(u) = 42/(1 + 3u)^3$
13. $h'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1},\ h''(x) = 1/(x^2 + 1)^{3/2}$
15. $y' = 2x^2/(x^3 + 1)^{1/3}$, $y'' = 4x/(x^3 + 1)^{1/3} - 2x^4/(x^3 + 1)^{4/3}$
17. $H'(t) = 3\sec^2 3t,\ H''(t) = 18\sec^2 3t\ \text{tg}\ 3t$
19. $g'(t) = t^2e^{5t}(5t + 3),\ g''(t) = te^{5t}(25t^2 + 30t + 6)$
21. (a) $f'(x) = 2\ \text{sen}\ x\,(\cos x - 1) = \text{sen}\ 2x - 2\ \text{sen}\ x$,
$f''(x) = 2(\cos 2x - \cos x)$
23. $3(2x + 3)^{-5/2}$

25. -3 **27.** -80 **29.** $-81/y^9$ **31.** $-2x/y^5$
33. $n!$ **35.** 2^ne^{2x} **37.** $(-1)^n(n + 2)!/(6x^{n+3})$
39. $2^{103}\text{sen}\ 2x$ **41.** 9 pés/s²





43. (a) $v(t) = 6t^2 - 30t + 36,\ a(t) = 12t - 30$
(b) -18 m/s² (c) $a(2) = -6$ m/s², $a(3) = 6$ m/s²
45. (a) $v(t) = (\pi/6)[\cos(\pi t/6) - \text{sen}(\pi t/6)]$
(b) $-\pi^2/72)(1 + \sqrt{3})$ m/s² (c) $a\left(\frac{3}{2}\right) = -(\pi^2/36)\sqrt{2}$ m/s²
47. (a) $t = 0, 2$ (b) $s(0) = 2$ m, $v(0) = 0$ m/s;
$s(2) = -14$ m, $v(2) = -16$ m/s
49. (a) $6t - 24$; -6 m/s² (b)



(c) Aumenta quando $2 < t < 4$ ou $t > 6$;
reduz quando $0 \leqslant t < 2$ ou $4 < t < 6$
51. (a) $v(t) = A\omega\cos\omega t,\ a(t) = -A\omega^2\ \text{sen}\ \omega t$
53. $P(x) = x^2 - x + 3$ **55.** $A = -\frac{3}{10}, B = -\frac{1}{10}$
57. $r = 1, -6$ **59.** $f''(x) = 6xg'(x^2) + 4x^3g''(x^2)$
61. $f''(x) = \left[\sqrt{x}g''(\sqrt{x}) - g'(\sqrt{x})\right]/(4x\sqrt{x})$
63. (a) $f'(x) = -(2x + 1)/(x^2 + x)^2$,
$f''(x) = 2(3x^2 + 3x + 1)/(x^2 + x)^3$,
$f'''(x) = -6(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)/(x^2 + x)^4$,
$f^{(4)}(x) = 24(5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1)/(x^2 + x)^5$
(b) $f^{(n)}(x) = (-1)^nn![x^{-(n+1)} - (x + 1)^{-(n+1)}]$
65. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x,\ f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x,\ f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x,\ f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n - 1)]e^x$.

Exercícios 3.8 □

1. A fórmula da diferenciação é mais simples
3. $f'(\theta) = -\ \text{tg}\ \theta$ **5.** $f'(x) = 3/[(3x - 1)\ln 2]$
7. $f'(x) = 1/\left[5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}\right]$ **9.** $f'(x) = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$
11. $F'(t) = 6/[(2t + 1) - 12/(3t - 1)$ **13.** $g'(x) = -2a/(a^2 - x^2)$
15. $f'(u) = \dfrac{1 + \ln 2}{u[1 + \ln(2u)]^2}$ **17.** $y' = (10x + 1)/(5x^2 + x - 2)$
19. $y' = -x/(1 + x)$ **21.** $y' = 1 + \ln x,\ y'' = 1/x$
23. $y' = 1/(x\ln 10),\ y'' = -1/(x^2\ln 10)$
25. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$; $(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$
27. $f'(x) = 2x\ln(1 - x^2) - 2x^3/(1 - x^2), (-1, 1)$ **29.** 0
31. $x - ey = e$ **33.** $\cos x + 1/x$
35. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$
37. $y' = \dfrac{\text{sen}^2x\ \text{tg}^4x}{(x^2 + 1)^2}\left(2\cot\text{g}x + \dfrac{4\sec^2x}{\text{tg}\ x} - \dfrac{4x}{x^2 + 1}\right)$

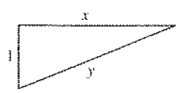
39. $y' = x^x(1 + \ln x)$ **41.** $y' = x^{\text{sen}\,x}[(\text{sen}\,x)/x + \cos x \ln x)$
43. $y' = (\ln x)^x(1/\ln x + \ln \ln x)$ **45.** $y' = e^x x^{e^x}(\ln x + 1/x)$
47. $y' = 2x/(x^2 + y^2 - 2y)$
49. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/(x-1)^n$

Exercícios 3.9 □

1. (a) 0 (b) 1 **3.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}62686$
5. (a) 1 (b) 0
21. $\text{cotgh}\,x = \frac{5}{4}$, $\text{sech}\,x = \frac{3}{5}$, $\cosh x = \frac{5}{3}$, $\text{senh}\,x = \frac{4}{3}$, $\text{cossech}\,x = \frac{3}{4}$
23. (a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) 0 (f) 1
(g) ∞ (h) $-\infty$ (i) 0
31. $f'(x) = x\,\text{senh}\,x + \cosh x$ **33.** $h'(x) = 2x\cosh(x^2)$
35. $G'(x) = -(2\,\text{senh}\,x)/(1 + \cosh x)^2$
37. $h'(t) = -(t\,\text{cossech}^2\sqrt{1+t^2})/\sqrt{1+t^2}$ **39.** $H'(t) = e^t\,\text{sech}^2(e^t)$
41. $y' = 3e^{\cosh 3x}\,\text{senh}\,3x$ **43.** $y' = 1/\left[2\sqrt{x}\,(1-x)\right]$
45. $y' = \text{senh}^{-1}(x/3)$ **47.** $y' = -1/\left(x\sqrt{x^2+1}\right)$
49. (a) 0,3572 (b) 70,34°
51. (b) $y = 2\,\text{senh}\,3x - 4\cosh 3x$ **53.** $\left(\ln(1+\sqrt{2}), \sqrt{2}\right)$

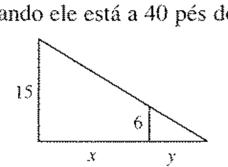
Exercícios 3.10 □

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** 70 **5.** $\pm\frac{46}{13}$
7. (a) A altura do aeroplano é de 1 mi e sua velocidade, 500 mi/h.
(b) A taxa segundo a qual a distância do aeroplano à estação é crescente quando este está a 2 mi da estação.
(c)



(d) $y^2 = x^2 + 1$
(e) $250\sqrt{3}$ mi/h

9. (a) A altura do poste (15 pés), a altura do homem (6 pés), e a velocidade do homem (5 pé/s)
(b) A taxa segundo a qual o topo de sua sombra está se movendo quando ele está a 40 pés do poste
(c)

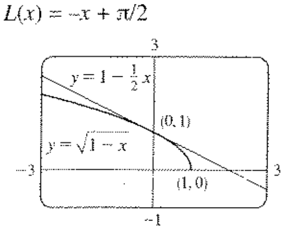


(d) $\dfrac{15}{6} = \dfrac{x+y}{y}$ (e) $\frac{25}{3}$ pés

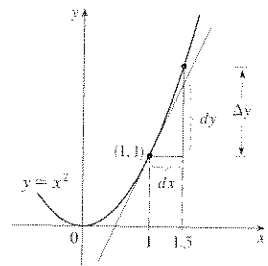
11. 65 mi/h **13.** $837/\sqrt{8.674} \approx 8{,}99$ pé/s **15.** $-1{,}6$ cm/min
17. $\frac{720}{13} \approx 55{,}4$ km/h
19. $(10.000 + 800.000\pi/9) \approx 2{,}89 \times 10^5$ cm³/min
21. $\frac{10}{3}$ cm/min **23.** $6/(5\pi) \approx 0{,}38$ pé/min **25.** 0,3 m²/s
27. 80 cm³/min **29.** $\frac{107}{810}$ 0,132 Ω/s **31.** $\sqrt{2}/5$ rad/s
33. (a) 360 pé/s (b) 0,096 rad/s
35. $1.650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **37.** $7\sqrt{15}/4 \approx 6{,}78$ m/s

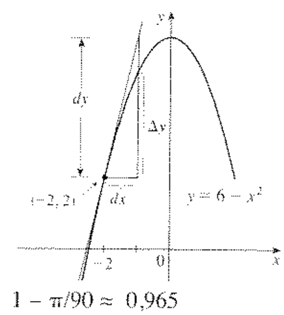
Exercícios 3.11 □

1. 148 °F; subestimada **3.** 22,6%, 24,2%; muito alto; reta tangente se encontre acima da curva
5. $L(x) = 3x - 2$ **7.** $L(x) = -x + \pi/2$
9. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$,
$\sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995$



11. $-1.204 < x < 0.706$ **13.** $-0.045 < x < 0.055$
15. $dy = (4x^5 + 5)\,dx$ **17.** $dy = (1 + \ln x)\,dx$
19. $dy = -2/(u-1)^2\,du$ **21.** (a) $dy = (2x+2)\,dx$ (b) 4
23. (a) $dy = 5/\left(2\sqrt{4+5x}\right)$ (b) 0,05
25. (a) $dy = \sec^2 x$ (b) $-0{,}2$
27. $\Delta y = 1{,}25$, $dy = 1$ **29.** $\Delta y = 1{,}44$, $dy = 1{,}6$





31. 32,08 **33.** 4,02 **35.** $1 - \pi/90 \approx 0{,}965$
41. (a) 270 cm³, 0,01, 1% (b) 36 cm², 0,0006, 0,6%
43. (a) $84/\pi \approx 27$ cm²; $\frac{1}{84} \approx 0{,}012$
(b) $1764/\pi^2 \approx 179$ cm³; $\frac{1}{56} \approx 0{,}018$
45. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$
49. (a) 4,8, 5,2 (b) Muito grande

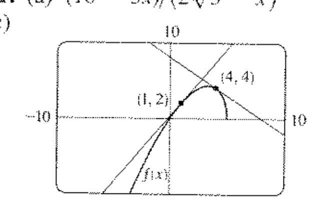
Capítulo 3 Revisão □

Testes Falso–Verdadeiro

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadeiro **11.** Verdadeiro **13.** Falso

Exercícios

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $1/\left(2\sqrt{x}\right) - 4/\left(3\sqrt[3]{x^7}\right)$
5. $2(2x^2+1)/\sqrt{x^2+1}$ **7.** $2\cos 2\theta\, e^{\text{sen}\,2\theta}$
9. $(t^2+1)/(1-t^2)^2$ **11.** $e^{-1/x}(1/x + 1)$
13. $-(\sec^2\sqrt{1-x})/2\sqrt{1-x})$ **15.** $(1 - y^4 - 2xy)/(4xy^3 + x^2 - 3)$
17. $2\sec 2\theta\,(\text{tg}\,2\theta - 1)/(1 + \text{tg}\,2\theta)^2$
19. $(1 + c^2)e^{cx}\,\text{sen}\,x$ **21.** e^{x+e^x} **23.** $-(x-1)^{-2}$
25. $[2x - y\cos(xy)]/[x\cos(xy) + 1]$ **27.** $2/[(1+2x)\ln 5]$
29. $\cot x - \text{sen}\,x\cos x$ **31.** $4x/(1+16x^2) + \text{tg}^{-1}(4x)$
33. $5\sec 5x$ **35.** $-6x\csc^2(3x^2+5)$
37. $\cos\left(\text{tg}\sqrt{1+x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1+x^3}\right)\left[3x^2/\left(2\sqrt{1+x^3}\right)\right]$
41. $\dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}(x+3)^8}$
43. $2x^2\cosh(x^2) + \text{senh}(x^2)$ **45.** $3\,\text{tgh}\,3x$
47. $(\cosh x)/\sqrt{\sinh^2 x - 1}$ **49.** $-\frac{4}{27}$
51. $-5x^4/y^{11}$ **55.** $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$
57. $y = 2x + 1$ **59.** $y = -x + 2$
61. (a) $(10 - 3x)/\left(2\sqrt{5-x}\right)$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$
(c)



63. $(\pi/4, \sqrt{2}), (5\pi/4, -\sqrt{2})$ **67.** (a) 2 (b) 44
69. $f'(x) = 2xg(x) + x^2g'(x)$ **71.** $f'(x) = 2g(x)g'(x)$
73. $f'(x) = g'(e^x)e^x$ **75.** $f'(x) = g'(x)/g(x)$
77. $h'(x) = (f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2)/[f(x) + g(x)]^2$
79. $h'(x) = f'(g(\operatorname{sen} 4x))g'(\operatorname{sen} 4x)(\cos 4x)(4)$
81. $(-3, 0)$ **83.** $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$
85. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$
87. (a) $v(t) = 3t^2 - 12, a(t) = 6t$ (b) Para cima quando $t > 2$, para baixo quando $0 \leq t < 2$ (c) 23
89. 4 kg/m **91.** $\frac{4}{3}$ cm²/min **93.** 13 pé/s **95.** 400 pé/h
97. (a) $L(x) = 1 + x, \sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x, \sqrt[3]{1{,}03} \approx 1{,}01$
(b) $-0{,}23 < x < 0{,}40$
99. $12 + 3\pi/2 \approx 16{,}7$ cm² **101.** $\frac{1}{32}$ **103.** $\frac{1}{4}$ **105.** $\frac{1}{8}x^2$

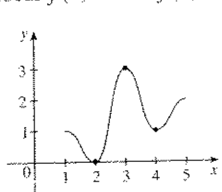
Problemas Quentes

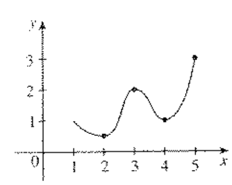
1. $(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4})$ **7.** $(0, \frac{5}{4})$
9. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta})$ cm
(c) $-480\pi \operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s
13. $x_T \in (3, \infty), y_T \in (2, \infty), x_N \in (0, \frac{5}{3}), y_N \in (-\frac{5}{2}, 0)$
15. (b) (i) 53° (ou 127°) (ii) 63° (ou 117°)
17. R aproxima-se do ponto médio do raio AO. **19.** $-\operatorname{sen} a$
21. $2\sqrt{e}$ **25.** $(1, -2), (-1, 0)$
27. $\sqrt{29}/58$ **29.** $2 + \frac{375}{128}\pi \approx 11.204$ cm³/min

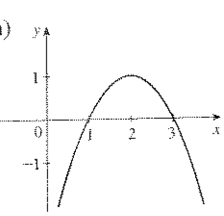
Capítulo 4

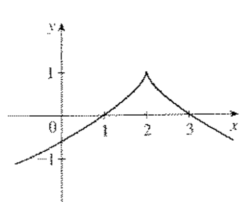
Exercícios 4.1

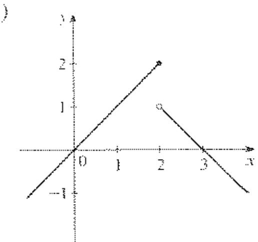
1. Mínimo absoluto: menor valor da função no domínio inteiro da função; mínimo local em c: menor valor da função quando x estiver próximo de c
3. Máximo absoluto em b, máximo local em b e e; mínimo absoluto em d, mínimo local em d e s
5. Máximo absoluto $f(4) = 4$; mínimo absoluto $f(7) = 0$; máximo local $f(4) = 4$ e $f(6) = 3$; mínimo local $f(2) = 1$ e $f(5) = 2$

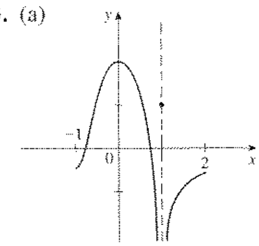
7.


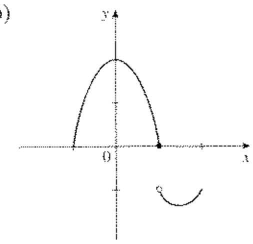
9.


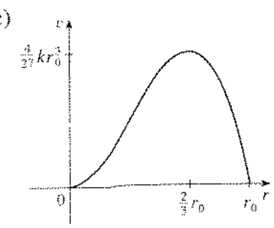
11. (a)


(b)


(c)


13. (a)


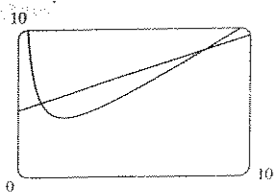
(b)


15. Máximo absoluto $f(1) = 5$
17. Nenhum
19. Mínimo absoluto $f(0) = 0$
21. Máximo absoluto $f(-3) = 9$; mínimo absoluto e local $f(0) = 0$
23. Nenhum
25. Máximo absoluto e local $f(\pi/2) = f(-3\pi/2) = 1$, mínimo absoluto e local $f(3\pi/2) = f(-\pi/2) = -1$
27. Máximo absoluto, $f(0) = 1$
29. Máximo absoluto, $f(3) = 2$
31. $-\frac{2}{5}$ **33.** $-4, 2$
35. $0, (-1 \pm \sqrt{5})/2$
37. $-\frac{3}{2}$ **39.** $-2, 0$ **41.** $0, \frac{8}{7}, 4$
43. $n\pi$ (n é um inteiro) **45.** $1/e$ **47.** $f(0) = 5, f(2) = -$
49. $f(-1) = 8, f(2) = -19$ **51.** $f(3) = 66, f(\pm 1) = 2$
53. $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0$ **55.** $f(\sqrt{2}) = 2, f(-1) = -\sqrt{3}$
57. $f(\pi/4) = \sqrt{2}, f(0) = 1$ **59.** $f(1) = 1/e, f(0) = 0$
61. $f(1) = 1, f(3) = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}296$
63. $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$
65. (a) 9,71, −7,71 (b) $1 \pm 32\sqrt{6}/9$
67. (a) 0,32, 0 (b) $3\sqrt{3}/16, 0$ **69.** 3.9665° C
71. Mais barato, $t = 10$; mais caro, $t \approx 5{,}1309$
73. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$ (c)


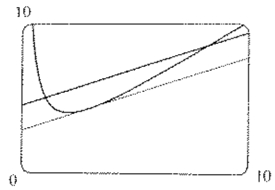
Exercícios 4.2

1. 2 **3.** $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$
5. f não é diferenciável em $(-1, 1)$ **7.** 0,8, 3,2, 4,4, 6,1

9. (a), (b)



(c) $2\sqrt{2}$



11. 0 13. $-\frac{1}{2}\ln[(1 - e^{-6})/6]$

15. f não é diferenciável em 1 23. 16 25. Não 31. Não

Exercícios 4.3 □

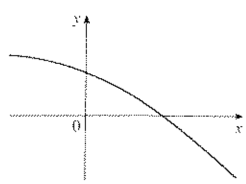
Abreviações: decr. = decrescente; cr. = crescente; máx. = máximo; mín. = mínimo; abs. = absoluto; loc. = local; CB = côncavo para baixo; CC = côncavo para cima; PI = ponto de inflexão; AH = assíntota horizontal; AV = assíntota vertical

1. (a) $(0, 6), (8, 9)$ (b) $(6, 8)$ (c) $(2, 4), (7, 9)$
(d) $(0, 2), (4, 7)$ (e) $(2, 3), (4, 4{,}5), (7, 4)$

3. (a) Teste C/D (b) Teste da Concavidade
(c) Determine os pontos em que a concavidade varia.

5. (a) Cr. em $(1, 5)$; decr. em $(0, 1)$ e $(5, 6)$
(b) Máx. loc. em $x = 5$, mín. loc. em $x = 1$

7. $x = 1, 7$ 9.



11. (a) Cr. em $(-\infty, -2), (2, \infty)$; decr. em $(-2, 2)$
(b) máx. loc. $f(-2) = 17$; mín. loc. $f(2) = -15$
(c) CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$; PI $(0, 1)$

13. (a) Cr. em $(-1, 0), (1, \infty)$; decr. em $(-\infty, -1), (0, 1)$
(b) Máx. loc.; $f(0) = 3$, mín. loc. $f(\pm 1) = 2$
(c) CC em $(-\infty, -\sqrt{3}/3), (\sqrt{3}/3, \infty)$;
CB em $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; PI $\left(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9}\right)$

15. (a) Cr. em $(\pi/3, 5\pi/3), (7\pi/3, 3\pi)$; decr. em $(0, \pi/3), (5\pi/3, 7\pi/3)$
(b) Máx. loc. $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$;
mín. loc. $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, $f(7\pi/3) = 7\pi/3 - \sqrt{3}$
(c) CC em $(0, \pi), (2\pi, 3\pi)$; CB em $(\pi, 2\pi)$; PI $(\pi, \pi), (2\pi, 2\pi)$

17. (a) Cr. em $(-1, \infty)$; decr. em $(-\infty, -1)$
(b) Mín. loc. $f(-1) = -1/e$
(c) CC em $(-2, \infty)$; CB em $(-\infty, -2)$; PI $(-2, -2e^{-2})$

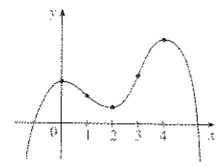
19. (a) Cr. em $(0, e^2)$; decr. em (e^2, ∞)
(b) Máx. loc. $f(e^2) = 2/e$
(c) CC em $(e^{8/3}, \infty)$; CB em $(0, e^{8/3})$; PI $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$

21. Máx. loc. $f(-1) = 7$; mín. loc. $f(1) = -1$

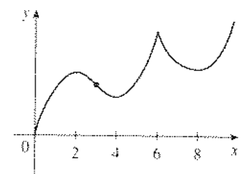
23. Máx. loc. $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$

25. (a) f tem um máximo local em 2
(b) f possui uma tangente horizontal em 6

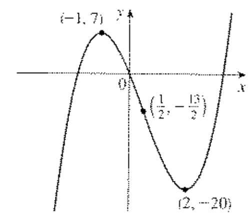
27.



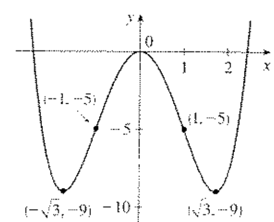
31. (a) Cr. em $(0, 2), (4, 6), (8, \infty)$;
decr. em $(2, 4), (6, 8)$
(b) Máx. loc. em $x = 2, 6$;
mín. loc. em $x = 4, 8$
(c) CC em $(3, 6), (6, \infty)$;
CB em $(0, 3)$
(d) 3 (e) Veja o gráfico à direita.



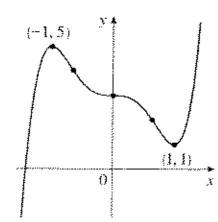
33. (a) Cr. em $(-\infty, -1), (2, \infty)$;
decr. em $(-1, 2)$
(b) Máx. loc. $f(-1) = 7$;
mín. loc. $f(2) = -20$
(c) CC em $(\frac{1}{2}, \infty)$; CB em $(-\infty, \frac{1}{2})$;
PI $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2})$
(d) Veja o gráfico à direita.



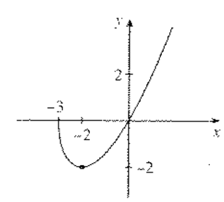
35. (a) Cr. em $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$;
decr. em $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$
(b) Mín. loc. $f(\pm\sqrt{3}) = -9$;
máx. loc. $f(0) = 0$
(c) CB em $(-1, 1)$;
CC em $(-\infty, -1), (1, \infty)$;
PI $(\pm 1, -5)$
(d) Veja o gráfico à direita.



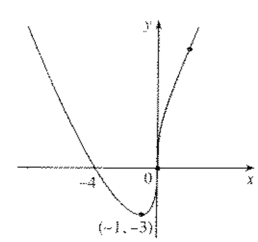
37. (a) Cr. em $(-\infty, -1), (1, \infty)$;
decr. em $(-1, 1)$
(b) Máx. loc. $h(-1) = 5$;
mín. loc. $h(1) = 1$
(c) CB em $(-\infty, -1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2})$;
CC em $(-1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, \infty)$;
PI $(0, 3), \left(\pm 1/\sqrt{2}, 3 \mp \frac{7}{8}\sqrt{2}\right)$
(d) Veja o gráfico à direita.



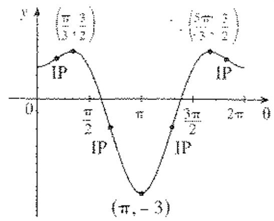
39. (a) Cr. em $(-2, \infty)$; decr. em $(-3, -2)$
(b) Mín. loc. $A(-2) = -2$
(c) CC em $(-3, \infty)$;
(d) Veja o gráfico à direita.



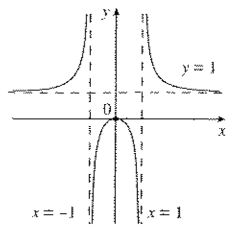
41. (a) Cr. em $(-1, \infty)$;
decr. em $(-\infty, -1)$
(b) Mín. loc. $C(-1) = -3$;
(c) CC em $(-\infty, 0), (2, \infty)$;
CB em $(0, 2)$; PI $(0, 0), (2, 6\sqrt[3]{2})$
(d) Veja o gráfico à direita.



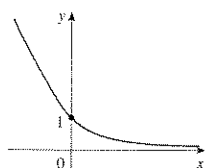
43. (a) Cr. em $(0, \pi/3)$ $\left(\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right)$; decr. em $(\pi/3, \pi)$, $\left(\dfrac{5\pi}{3} 2\pi\right)$
(b) Máx. loc. $f(\pi/3) = f(5\pi/3) = 3/2$, mín. loc. $f(\pi) = -3$
(c) Sejam $\alpha = \cos^{-1}\left((1+\sqrt{33})/8\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left((1-\sqrt{33})/8\right)$,
$y_1 = \dfrac{3}{16}\left(1+\sqrt{33}\right)$ e $y_2 = \dfrac{3}{16}\left(1-\sqrt{33}\right)$. CC em $(0, \alpha)$, $(\beta, 2\pi - \beta)$, $(2\pi - \alpha, 2\pi)$;
CB em (α, β), $(2\pi - \beta, 2\pi - \alpha)$;
PI (α, y_1), (β, y_2), $(2\pi - \beta, y_2)$, $(2\pi - \alpha, y_1)$;
(d) Veja o gráfico à direita.



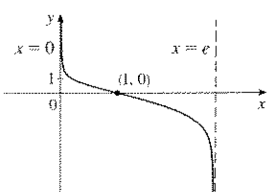
45. (a) AV $y = 1$; AH $x = -1, x = 1$
(b) Cr. em $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$; decr. em $(0, 1)$, $(1, \infty)$
(c) Máx. loc. $f(0) = 0$
(d) CC em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; CB em $(-1, 1)$
(e) Veja o gráfico à direita.



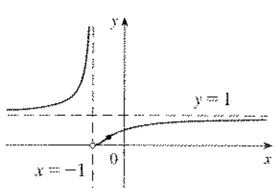
47. (a) AH $y = 0$
(b) Decr. em $(-\infty, \infty)$
(c) Nenhum
(d) CC em $(-\infty, \infty)$
(e) Veja o gráfico à direita.



49. (a) AV $x = 0, x = e$ (b) Decr. em $(0, e)$ (c) Nenhum
(d) CC em $(0, 1)$; CB em $(1, e)$; PI $(1, 0)$
(e) Veja o gráfico abaixo.



51. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$
(b) Cr. em $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
(c) Nenhum
(d) CC em $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; CB em $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; PI $\left(-\frac{1}{2}, 1/e^2\right)$
(e) Veja o gráfico à direita.



53. (a) Máx. loc. e abs. $f(1) = \sqrt{2}$, nenhum mín.
(b) $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$

55. (b) CC em (0,94, 2,57), (3,71, 5,35); CB em (0; 0,94), (2,57; 3,71), (5,35; 2π);
PI (0,94; 0,44), (2,57; –0,63) (3,71; –0,63), (5,35; 0,44)

57. CB em $(-\infty, 0{,}1)$; CC em $(0{,}1, \infty)$

59. $K(3) - K(2)$; CB **61.** Quando $t \approx 7{,}94$

63. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$

Exercícios 4.4 □

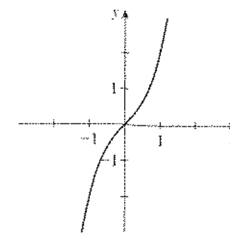
1. (a) Indeterminado (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, ou não existe (e) Indeterminado

3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminado (c) ∞ **5.** -2 **7.** $\frac{9}{5}$
9. $-\infty$ **11.** ∞ **13.** p/q **15.** 0 **17.** $-\infty$ **19.** $\ln \frac{5}{3}$
21. $\frac{1}{2}$ **23.** ∞ **25.** 1 **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** 0 **31.** 1 **33.** $-1/\pi^2$
35. $\frac{1}{2}a(a-1)$ **37.** 0 **39.** 3 **41.** 0 **43.** -2π **45.** 0 **47.** $\frac{1}{2}$
49. ∞ **51.** 1 **53.** e^{-2} **55.** e^3 **57.** 1 **59.** $1/e$ **61.** $1/\sqrt{e}$
63. 5 **65.** $\frac{1}{4}$ **71.** $\frac{16}{9}a$ **73.** 56 **77.** (a) 0

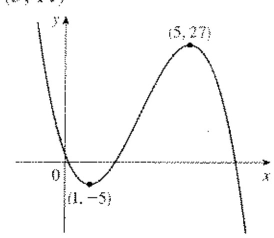
Exercícios 4.5 □

Abreviações: AO = assíntota oblíqua; int. = intercepto.

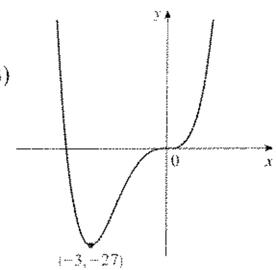
1. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x 0
C. Em torno de $(0, 0)$ D. Nenhum
E. Cr. em $(-\infty, \infty)$ F. Nenhum
G. CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$;
PI $(0, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



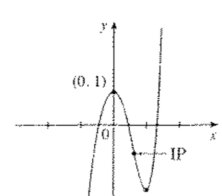
3. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 2; int. x 2, $\frac{1}{2}(7 \pm 3\sqrt{5})$ C. Nenhum
D. Nenhum E. Cr. em $(1, 5)$; decr. em $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
F. Mín. loc. $f(1) = -5$; máx. loc. $f(5) = 27$
G. CC em $(-\infty, 3)$; CB em $(3, \infty)$; PI $(3, 11)$
H. Veja o gráfico à direita.



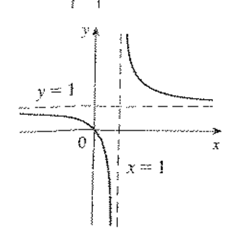
5. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x $-4, 0$
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(-3, \infty)$; decr. em $(-\infty, -3)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -27$
G. CC em $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
CB em $(-2, 0)$; PI $(0, 0)$, $(-2, -16)$
H. Veja o gráfico à direita.



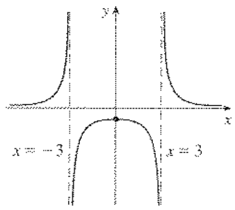
7. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 1
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$; decr. em $(0, 1)$
F. Máx. loc. $f(0) = 1$; Mín. loc. $f(1) = -2$
G. CC em $(1/\sqrt[3]{4}, \infty)$; CB em $\left(-\infty, 1/\sqrt[3]{4}\right)$;
PI $\left(1/\sqrt[3]{4}, 1 - 9/\left(2\sqrt[3]{16}\right)\right)$
H. Veja o gráfico à direita.



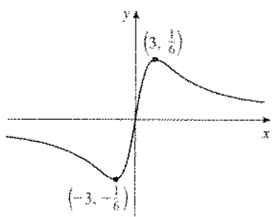
9. A. $\{x \mid x \neq 1\}$ B. int. y 0; int. x 0
C. Nenhum D. AV $x = 1$, AH $y = 1$
E. Decr. em $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ F. Nenhum
G. CC em $(1, \infty)$; CB em $(-\infty, 1)$
H. Veja o gráfico à direita.



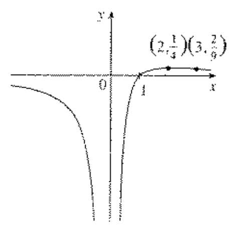
11. A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. int. $y -\frac{1}{9}$
C. Em torno do eixo y
D. AV $x = \pm 3$, AH $y = 0$
E. Cr. em $(-\infty, -3), (-3, 0)$;
decr. em $(0, 3), (3, \infty)$
F. Máx. loc. $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CC em $(-\infty, -3), (3, \infty)$;
CB em $(-3, 3)$
H. Veja o gráfico à direita.



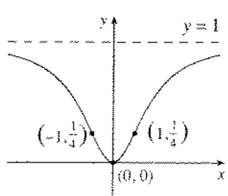
13. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x 0
C. Em torno de $(0, 0)$ D. AH $y = 0$
E. Cr. em $(-3, 3)$;
decr. em $(-\infty, -3), (3, \infty)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -\frac{1}{6}$;
máx. loc. $f(3) = \frac{1}{6}$;
G. CC em $(-3\sqrt{3}, 0), (3\sqrt{3}, \infty)$;
CB em $(-\infty, -3\sqrt{3}), (0, 3\sqrt{3})$;
PI $(0, 0), (\pm 3\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/12)$
H. Veja o gráfico à direita.



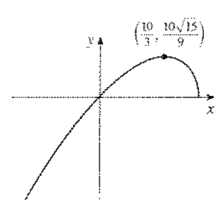
15. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ B. int. x 1
C. Nenhum D. AH $y = 0$ AV $x = 0$
E. Cr. em $(0, 2)$; decr. em $(-\infty, 0), (2, \infty)$
F. Máx. loc. $f(2) = 1/4$;
G. CC em $(3, \infty)$; CB em $(-\infty, 0), (0, 3)$
PI $(3, 2/9)$;
H. Veja o gráfico à direita.



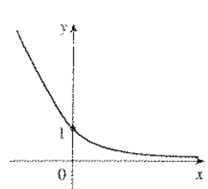
17. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 1, int. x 0
C. Em torno do eixo y D. AH $y = 1$
E. Cr. em $(0, \infty)$; decr. em $(-\infty, 0)$,
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-1, 1)$; CB em $(-\infty, -1), (1, \infty)$;
PI $(\pm 1, 1/4)$
H. Veja o gráfico à direita.



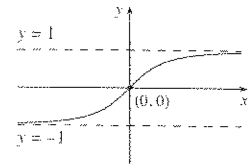
19. A. $(-\infty, 5]$ B. int. y 0; int. x 0, 5
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(-\infty, \frac{10}{3})$; decr. em $(\frac{10}{3}, 5)$
F. Máx. loc. $f(10/3) = \frac{10}{9}\sqrt{15}$
G. CB em $(-\infty, 5)$
H. Veja o gráfico à direita.



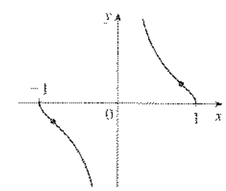
21. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 1
C. Nenhum D. AH $y = 0$
E. Decr. em $(-\infty, \infty)$
F. Nenhum G. CC em $(-\infty, \infty)$
H. Veja o gráfico à direita.



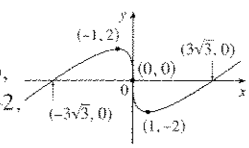
23. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0, int. $x = 0$
C. Em torno da origem
D. AH $y = \pm 1$ E. Cr. em $(-\infty, \infty)$
F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$; DB em $(0, \infty)$;
PI $(0,0)$
H. Veja o gráfico à direita.



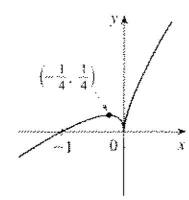
25. A. $\{x \mid |x| \leqslant 1, x \neq 0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$
B. int. $x \pm 1$ C. Em torno de $(0, 0)$
D. AV $x = 0$
E. Decr. em $(-1, 0), (0, 1)$
F. Nenhum
G. CC em $(-1, -\sqrt{2/3}), (0, \sqrt{2/3})$;
CB em $(-\sqrt{2/3}, 0), (\sqrt{2/3}, 1)$;
PI $(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2})$
H. Veja o gráfico à direita.



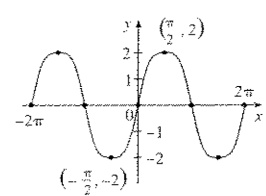
27. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. $x \pm 3\sqrt{3}$
C. Em torno da origem D. Nenhum
E. Cr. em $(-\infty, -1), (1, \infty)$; decr. em $(-1, 1)$,
F. Máx. loc. $f(-1) = 2$; mín. loc. $f(1) = -2$,
G. CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$;
PI $(0, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



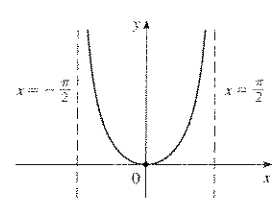
29. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x −1, 0
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(-\infty, -\frac{1}{4}), (0, \infty)$; decr. em $(-\frac{1}{4}, 0)$
F. Máx. loc. $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$;
mín. loc. $f(0) = 0$
G. CB em $(-\infty, 0), (0, \infty)$
H. Veja o gráfico à direita.



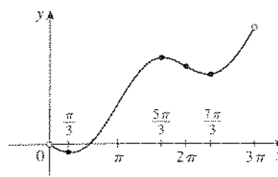
31. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x $n\pi$ (n inteiro)
C. Em torno da origem, período 2π
D. Nenhuma
E. Cr. em $(2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2)$;
decr. em $(2n\pi + \pi/2, 2n\pi + 3\pi/2)$
F. Máx. loc. $f(2n\pi + \pi/2) = 2$;
Mín. loc. $f(2n\pi + 3\pi/2) = -2$
G. CC em $((2n-1)\pi, 2n\pi$;
CB em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$;
PI $(n\pi, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



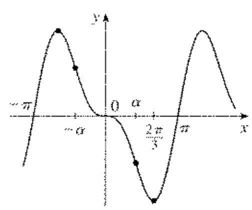
33. A. $(-\pi/2, \pi/2)$
B. int. y 0; int. x 0
C. Em torno do eixo y
D. AV $x = \pm\pi/2$
E. Cr. em $(0, \pi/2)$;
decr. em $(-\pi/2, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-\pi/2, \pi/2)$
H. Veja o gráfico à direita.



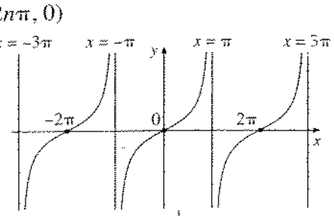
35. A. $(0, 3\pi)$ C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(7\pi/3, 3\pi)$; decr. em $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 7\pi/3)$
F. Mín. loc. $f(\pi/3) = (\pi/6) - \frac{1}{2}(\sqrt{3})$,
$f(7\pi/3) = (7\pi/6) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}/2)$;
máx. loc. $f(5\pi/3) = (5\pi/6) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
G. CC em $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$;
CB em $(\pi, 2\pi)$;
PI $(\pi, \pi/2)$, $(2\pi, \pi)$
H. Veja o gráfico à direita.



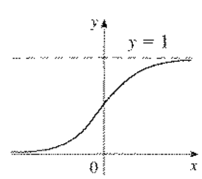
37. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x $n\pi$
C. Em torno de $(0, 0)$, período 2π D. Nenhum
E. Cr. em $(-\pi, -2\pi/3)$, $(2\pi/3, \pi)$; decr. em $(-2\pi/3, 2\pi/3)$
F. Máx. loc. $f(-2\pi/3) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$;
mín. loc. $f(2\pi/3) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$
G. CC em $(-\alpha, 0)$, (α, π)
Quando $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;
CB em $(-\pi, -\alpha)$, $(0, \alpha)$;
PI quando $x = 0, \pm\alpha, \pm\pi$
H. Veja o gráfico à direita.



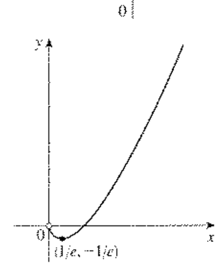
39. A. Todos os reais, exceto $(2n + 1)\pi$ (n inteiro)
B. int. y 0, int. x $2n\pi$
C. Em torno da origem, período 2π
D. AV $x = (2n + 1)\pi$ E. Cr. em $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$
F. Nenhum G. CC em $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; CB em $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$;
Pi $(2n\pi, 0)$
H.



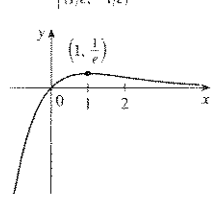
41. A. $\mathbb{R}$ B. int. y $\frac{1}{2}$ C. Nenhum
D. AH $y = 0, y = 1$
E. Cr. em $\mathbb{R}$ F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$; CB em $(0, \infty)$;
PI $(0, \frac{1}{2})$ H. Veja o gráfico à direita.



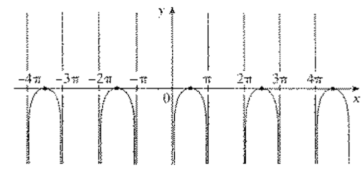
43. A. $(0, \infty)$ B. int. x 1
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(1/e, \infty)$; decr. em $(0, 1/e)$
F. Mín. loc. $f(1/e) = -1/e$
G. CC em $(0, \infty)$
H. Veja o gráfico à direita.



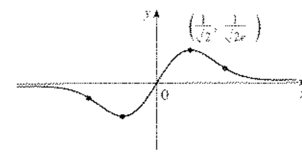
45. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x 0
C. Nenhum D. AH $y = 0$
E. Cr. em $(-\infty, 1)$; decr. em $(1, \infty)$
F. Máx. loc. $f(1) = 1/e$
G. CC em $(2, \infty)$; CB em $(-\infty, 2)$;
PI $(2, 2/e^2)$
H. Veja o gráfico à direita.



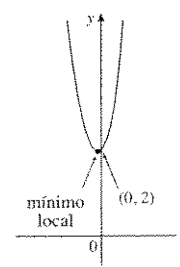
47. A. Todos x em $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$ (n inteiro) B. int. x $2n\pi + \pi/2$
C. Período 2π D. AV $x = n\pi$ E. Cr. em $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$;
decr. em $(\pi/2 + 2n\pi, (2n + 1)\pi)$ F. Máx. loc. $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$
G. CB em $((2n\pi, (2n + 1)\pi)$ H. Veja o gráfico abaixo.



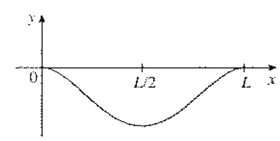
49. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x 0 C. Em torno de $(0, 0)$ D. AH $y = 0$
E. Cr. em $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; decr. em $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, \infty)$
F. Mín. loc. $f(-1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2e}$; máx. loc. $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$
G. CC em $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$; CB em $(-\infty, -\sqrt{3/2})$, $(0, \sqrt{3/2})$
PI $(\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{3/2}e^{-3/2})$, $(0, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



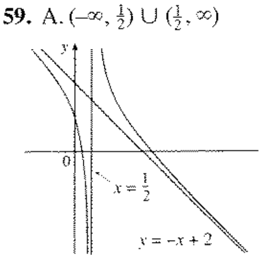
51. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 2 C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}, \infty\right)$, decr. em $\left(-\infty, \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right)$
F. Mín. loc. $f\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\infty\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/5}$
G. CC em $(-\infty, \infty)$ H. Veja o gráfico à direita.



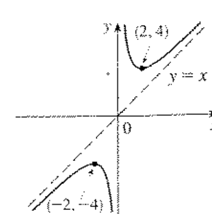
53.



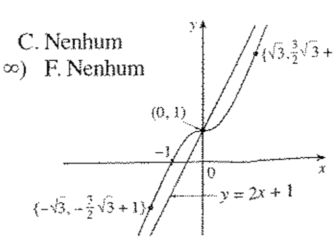
55. $y = x - 1$ **57.** $y = 2x - 2$ **59.** A. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
B. int. y 1; int. x $\frac{1}{4}\left(5 \pm \sqrt{17}\right)$ C. Nenhum
D. AV $x = 1/2$; AI $y = -x + 2$
E. Decr. em $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, \infty)$
F. Nenhum
G. CC em $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, CB em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
H. Veja o gráfico à direita.



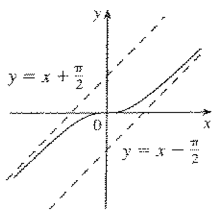
61. A. $\{x \mid x \neq 0\}$ B. Nenhum
C. Em torno de $(0, 0)$ D. AV $x = 0$; AO $y = x$
E. Cr. em $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$;
decr. em $(-2, 0)$, $(0, 2)$
F. Máx. loc. $f(-2) = -4$;
mín. loc. $f(2) = 4$
G. CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



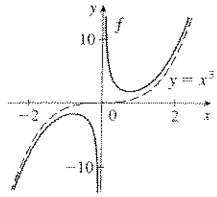
63. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 1, int. x -1 C. Nenhum
D. AI $y = 2x + 1$ E. Cr. em $(-\infty, \infty)$ F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$;
CB em $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$;
PI $\left(\pm\sqrt{3}, 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $(0, 1)$
H. Veja o gráfico à direita.

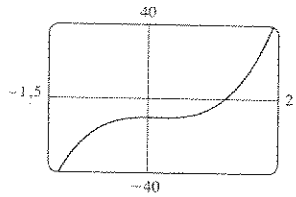


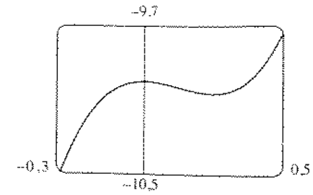
65.



69. AV $x = 0$, assintótico a $y = x^3$

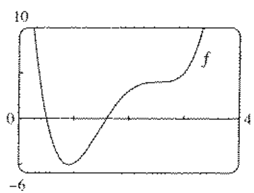


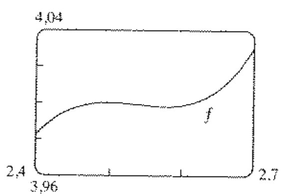




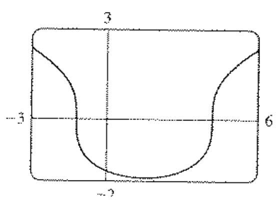
Exercícios 4.6 □

1. Cr. em (0,92, 2,5), (2,58, ∞); decr. em (−∞, 0,92), (2,5, 2,58); Máx. loc. $f(2{,}5) \approx 4$; mín. loc. $f(0{,}92) \approx 5{,}12$; $f(2{,}58) \approx 3{,}998$; CC em (−∞, 1,46), (2,54, ∞); CB em (1,46, 2,54); PI (1,46, −1,40), (2,54, 3,999)

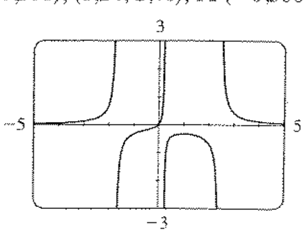




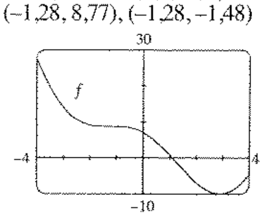
3. Cr. em (1,5, ∞); decr. em (−∞, 1,5); mín. $f(1{,}5) \approx -1{,}9$; CC em (−1,2, 4,2); CB em (−∞, −1,2), (4,2, ∞); PI (−1,2, 0), (4,2, 0)

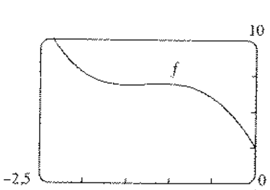


5. Cr. em (−∞, −1,7), (−1,7, 0,24), (0,24, 1); decr. em (1, 2,46), (2,46, ∞); loc. máx. $f(1) = -\frac{1}{3}$; CC em (−∞, −1,7), (−0,506, 0,24), (2,46, ∞); CB em (−1,7, −0,506), (0,24, 2,46); PI (−0,506, −0,192)



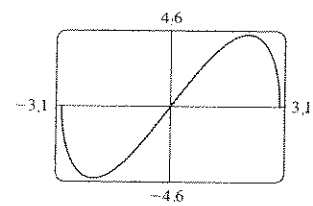
7. Cr. em (−1,49, −1,07), (2,89, 4); decr. em (−4, −1,49), (−1,07, 2,89); Máx. loc. $f(-1{,}07) \approx 8{,}79$, mín. loc. $f(-1{,}49) \approx 8{,}75$, $f(2{,}89) \approx -9{,}99$; CC em (−4, −1,28),(1,28, 4); CB em (−1,28, 1,28); PI (−1,28, 8,77), (−1,28, −1,48)



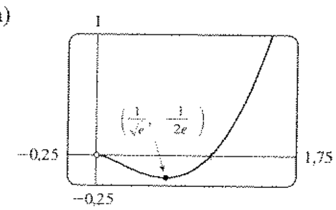


9. Cr. em $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$; decr. em $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; máx. loc. $f(0) = -10$; mín. loc. $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{161}{16} \approx -10{,}1$; CC em $\left(\frac{1}{8}, \infty\right)$; CB em $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$; PI $\left(\frac{1}{8}, -\frac{321}{32}\right)$

11. Cr. em $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$; decr. em $\left(-3, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 3\right)$; máx. $f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 4{,}5$; mín. $f\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -4{,}5$; CC em (−3, 0); CB em (0, 3); PI (0, 0)



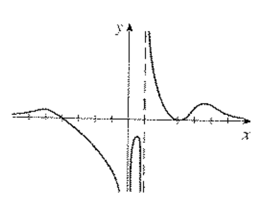
13. (a)

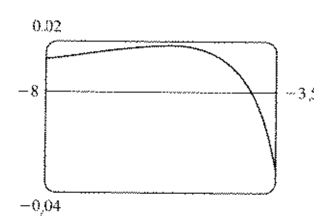


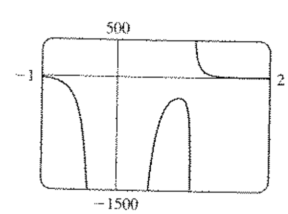
(b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

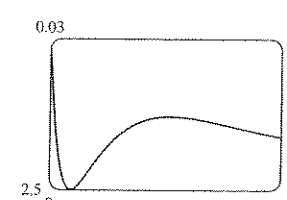
(c) Mín. loc. $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$; CB em $(0, e^{-3/2})$; CC em $(e^{-3/2}, \infty)$

15. Máx. loc. $f(-5{,}6) \approx 0{,}018$, $f(0{,}82) \approx -281{,}5$, $f(5{,}2) \approx 0{,}0145$; mín. $f(3) = 0$







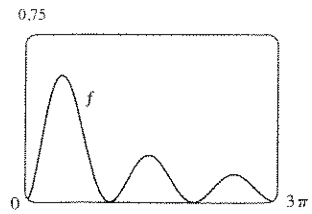


17. $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3+18x^2-44x-16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$

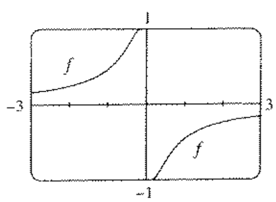
$f''(x) = 2\dfrac{(x+1)(x^6+36x^5+6x^4-628x^3+684x^2+672x+64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$

CC em $(-35{,}3; -5{,}0)$, $(-1, -0{,}5)$, $(-0{,}1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$;
CB em $(-\infty, -35{,}3)$, $(-5{,}0, -1)$; $(-0{,}5, -0{,}1)$; PI $(-35{,}3; -0{,}015)$ $(-5{,}0, -0{,}005)$, $(-1, 0)$, $(-0{,}5, 0{,}00001)$, $(-0{,}1, 0{,}0000066)$

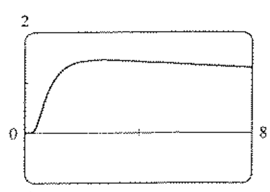
19. Cr. em $(0, 1{,}3)$, $(\pi, 4{,}6)$, $(2\pi, 7{,}8)$;
decr. em $(1{,}3, \pi)$, $(4{,}6, 2\pi)$, $(7{,}8, 3\pi)$;
máx. loc. $f(1{,}3) \approx 0{,}6$, $f(4{,}6) \approx 0{,}21$, $f(7{,}8) \approx 0{,}13$;
mín.loc. $f(\pi) = f(2\pi) = 0$;
CC em $(0, 0{,}6)$, $(2{,}1, 3{,}8)$, $(5{,}4, 7{,}0)$, $(8{,}6, 3\pi)$;
CB em $(0{,}6, 2{,}1)$, $(3{,}8, 5{,}4)$, $(7{,}0, 8{,}6)$; PI $(0{,}6, 0{,}25)$, $(2{,}1, 0{,}31)$, $(3{,}8, 0{,}10)$, $(5{,}4, 0{,}11)$, $(7{,}0, 0{,}061)$, $(8{,}6, 0{,}065)$



21. Cr. em $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; CC em $(-\infty, -0{,}4)$, $(0, 0{,}4)$;
CB em $(-0{,}4, 0)$, $(0{,}4, \infty)$; PI $(\pm 0{,}4, \pm 0{,}8)$

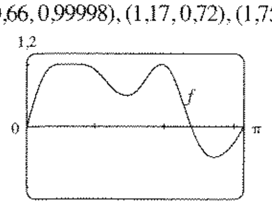


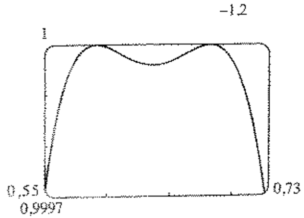
23. (a)

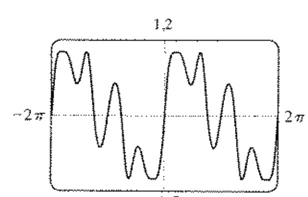


(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$
(c) Máx. valor $f(e) = e^{1/e}$
(d) PI em $x \approx 0{,}58, 4{,}37$

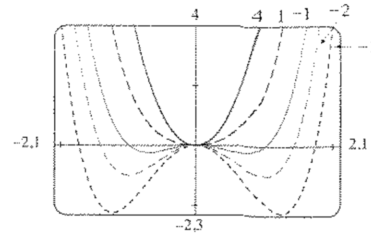
25. Máx. $f(0{,}59) \approx 1$, $f(0{,}68) \approx 1$, $f(1{,}96) \approx 1$;
mín. $f(0{,}64) \approx 0{,}99996$, $f(1{,}46) \approx 0{,}49$, $f(2{,}73) \approx -0{,}51$;
PI $(0{,}61,\ 0{,}99998)$, $(0{,}66, 0{,}99998)$, $(1{,}17, 0{,}72)$, $(1{,}75, 0{,}77)$, $(2{,}28, 0{,}34)$



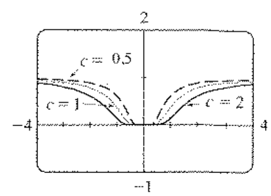


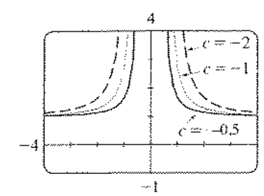


27. Para $c \geqslant 0$, não há PI e somente um ponto extremo, a origem. Pa $c < 0$, há um ponto máximo na origem, dois pontos mínimos, e dois P que se movem para baixo e se afastam da origem quando $c \to -\infty$.

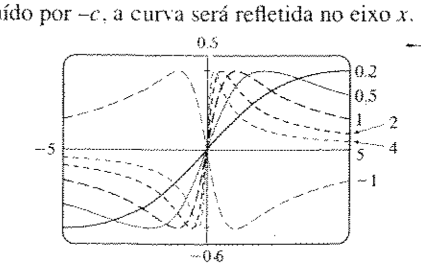


29. Não há máximo nem mínimo, independentemente do valor d c. Para $c < 0$, há uma assíntota vertical em $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.
$c = 0$ é um valor de transição no qual $f(x) = 1$ para $x \neq 0$.
Para $c > 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, e há dois PIs, qu se afastam do eixo y quando $c \to \infty$.

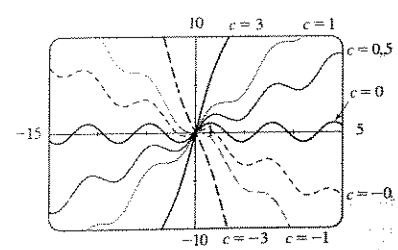




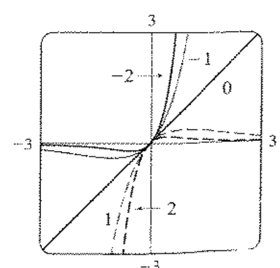
31. Para $c > 0$, os valores máximo e mínimo são sempre $\pm\frac{1}{2}$, ma os pontos extremos e os PIs movem-se cada vez para mais perto c eixo y quando c cresce. $c = 0$ é um valor de transição: quando c for substituído por $-c$, a curva será refletida no eixo x.



33. Para $|c| < 1$ o gráfico tem máximo e mínimo local; mas pa $|c| \geqslant 1$ não. A função cresce para $c \geqslant 1$ e decresce em $c \leqslant -$ Quando c move-se, os pontos de inflexão movem-se verticalmente, m não horizontalmente.

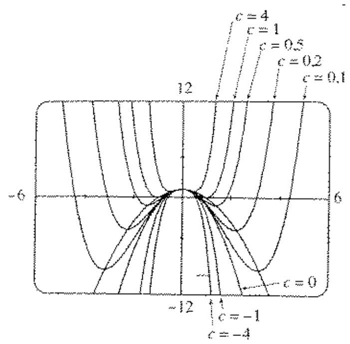


35.



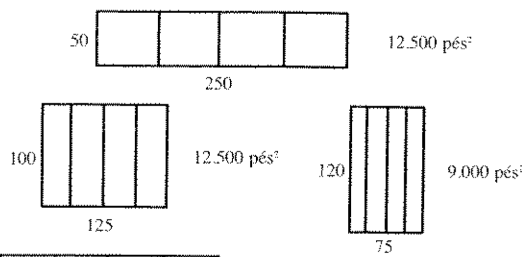
Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Para $c <$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Quando $|c|$ cresce, os pontos de máximo e mínimo e os PIs ficam mais próximos da origem.

37. (a) Positivo (b)

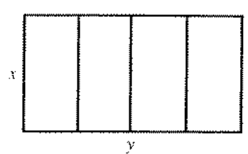


Exercícios 4.7 □

1. (a) 11, 12 (b) 11,5 11,5 **3.** (a) 10, 10
5. 25 m por 25 m
7. (a)



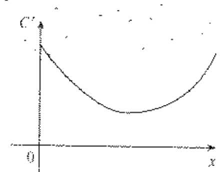
(b)



(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 750$ (e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$
(f) 14.062,5 pé²
9. 1.000 pés por 1.500 pés **11.** 4.000 cm³ **13.** $ 191,28
15. $\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$ **17.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **19.** Quadrado, lado $\sqrt{2}\,r$
21. $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$ **23.** Base $\sqrt{3}$, altura $3r/2$
25. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **27.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **29.** 24 cm, 36 cm
31. (a) Use todo o arame para o qudrado
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m para o quadrado
33. Altura = raio = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm **35.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$
39. (a) $\frac{3}{2}s^2$ cossec θ (cossec $\theta - \sqrt{3}$ cotg θ) (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s\,[h + s/(2/\sqrt{2})]$ **41.** Rema diretamente para B
43. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ pés da fonte mais forte **45.** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$
49. 9,35 m **53.** $x = 6$ pol **55.** $\pi/6$
57. À distância de $5 - 2\sqrt{5}$ de A **59.** $(L + W)^2/2$
61. (a) Em torno de 5,1 km de B
(b) C esteja próximo de B; C está próximo de D;
$W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, onde $x = |BC|$
(c) ≈ 1,07; nenhum valor (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1{,}6$

Exercícios 4.8 □

1. (a) $C(0)$ representa o custo fixo, exposto mesmo quando nada é produzido.
(b) O custo marginal é mínimo lá.
(c)



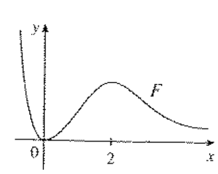
3. $ 17,40/unidade; o custo de produzir as 1.001 primeiras unidades gira em torno de $ 17,40.
5. (a) $ 1.340.000; $ 1.340 unidade; $ 2.300/unidade
(b) 200 (c) $ 700/unidade
7. (a) $ 342.491; $ 342/unidade; $ 390/unidade
(b) 400 (c) $ 320/unidade
9. (a) $c(x) = 3.700/x + 5 - 0{,}04x + 0{,}0003x^2$, $C'(x) = 5 - 0{,}08x + 0{,}0009x^2$
(b) Entre 208 e 209 unidades (c) $c(209) \approx$ $ 27,45/unidade
(d) $ 3,22/unidade
11. 400 **13.** 672 **15.** 100
17. (a) Em torno de 200 jardas (b) 192 jardas
19. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3.000}x$ (b) $ 9,50
21. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) $ 175 (c) $ 100 **21.** 200

Exercícios 4.9 □

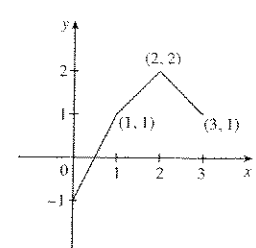
1. (a) $x^2 \approx 2{,}3$, $x^3 \approx 3$ (b) Não **3.** **5.** 1,1797 **7.** 2,1148 **9.** −1,25
11. 3,10723251 **13.** 2,224745 **15.** 0,876726
17. 0,724492; 1,220744 **19.** 0,520269
21. 0,641714
23. −1,39194691, 1,07739428, 2,71987822
25. −1,97806681; −0,82646233
27. −0,51031156, 1,19843871 **29.** (b) 31,622777
35. (a) −0,455, 6,810, 0,645 (b) $f(6{,}810) \approx -1.949{,}07$
37. (0,904557, 1,855277) **39.** 11,28 pé **41.** 0,76286%

Exercícios 4.10 □

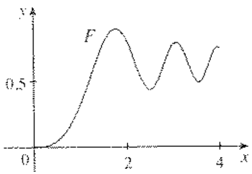
1. $F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + C$ **3.** $F(x) = x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^6 - \frac{3}{8}x^8 + C$
5. $F(x) = 4x^{5/4} - 4x^{7/4} + C$ **7.** $F(x) = 4x^{3/2} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$
9. $F(x) = -5/(4x^8) + C_1$ se $x < 0$;
11. $F(u) = \frac{1}{3}u^3 - 6u^{-1/2} + C$ **13.** $G(\theta) = \operatorname{sen}\theta + 5\cos\theta + C$
15. $F(x) = x^2 + 5\operatorname{sen}^{-1}x + C$ **17.** $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$
19. $x^3 + x^4 + Cx + D$ **21.** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{126}x^{14/5} + Cx + D$
23. $e^t + \frac{1}{2}Ct^2 + Dt + E$ **25.** $x - 3x^2 + 8$
27. $4x^{3/2} + 2x^{5/2} + 4$ **29.** $2\operatorname{sen}t + \operatorname{tg}t + 4 - 2\sqrt{3}$ **31.** $2\ln(-x) + 7$
33. $2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 22x + \frac{59}{3}$ **35.** $-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$
37. $x^2 - 2x^3 + 9x + 9$ **39.** $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$
41. $-\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$ **43.** 10 **45.** b
47.



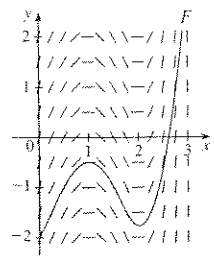
49.



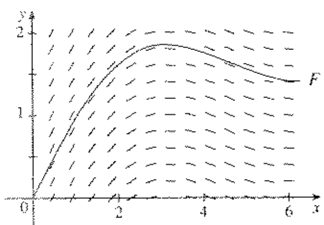
51.



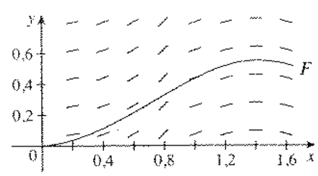
53.



55.



57.



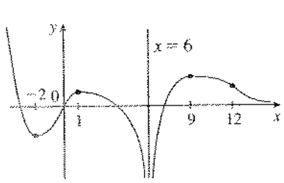
59. $s(t) = 1 - \cos t - \text{sen}\, t$ 61. $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 3t + 1$
63. $s(t) = -10\,\text{sen}\, t - 3\cos t + (6/\pi)t + 3$
65. (a) $s(t) = 450 - 4{,}9t^2$ (b) $\sqrt{450/4{,}9} \approx 9{,}58$ s
(c) $-9{,}8\sqrt{450/4{,}9} \approx -93{,}9$ m/s (d) Em torno de 9,09 s
69. 225 pés 71. \$ 742,08 73. $\frac{130}{11} \approx 11{,}8\ s$ 75. $\frac{88}{15} \approx 5{,}87$ pés/s²
77. 62.500 km/h² ≈ 4,82m/s² 79. (a) 22,9125 mi
(b) 21,675 mi (c) 30 min 33 s (d) 55,425 mi

Capítulo 4 Revisão □
Testes Falso-Verdadeiro

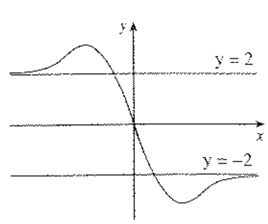
1. Falso 3. Falso 5. Verdadeiro 7. Falso 1. Verdadeiro
11. Verdadeiro 13. Falso 15. Verdadeiro 17. Verdadeiro

Exercícios

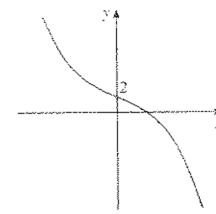
1. Mín. abs. $f(0) = 10$; máx. loc. e abs. $f(3) = 64$
3. Máx. abs. $f(0) = 0$; mín. loc. e abs. $f(-1) = -1$
5. Máx. abs. $f(\pi) = \pi$; mín. abs. $f(0) = 0$; máx. loc. $f(\pi/3) = (\pi/3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; mín. loc. $f(2\pi/3) = (2\pi/3) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
7. π 9. 8 11. 0 13. $\frac{1}{2}$
15.



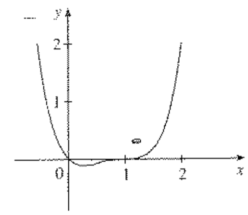
17.



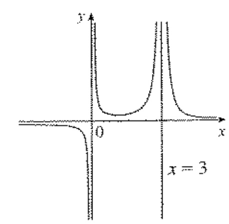
19. A. $\mathbb{R}$ B. int. y -2
C. Nenhum D. Nenhum
E. Decr. em $(-\infty, \infty)$
F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$;
CB em $(0, \infty)$; PI $(0,2)$
H. Veja o gráfico à direita.



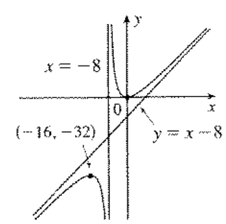
21. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 0; int. x 0,1
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(\frac{1}{4}, \infty)$, decr. em $(-\infty, \frac{1}{4})$;
F. Mín. loc. $f(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}$
G. CC em $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(1, \infty)$;
CB em $(\frac{1}{2}, 1)$; PI$(\frac{1}{2}, \frac{-1}{16})$; $(1, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



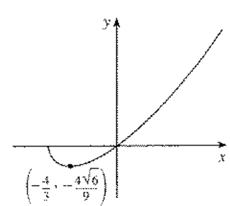
23. A. $\{x \mid x \neq 0{,}3\}$ B. Nenhum
C. Nenhum
D. AH $y = 0$; AV $x = 0, x = 3$
E. Decr. em $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(3, \infty)$;
cr. em $(1,3)$
F. Mín. loc. $f(1) = \frac{1}{4}$
G.CC em $(0,3)$, $(3, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$
H. Veja o gráfico à direita.



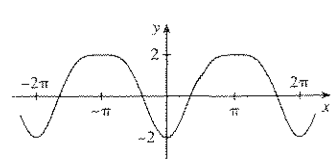
25. A. $\{x \mid x \neq -8\}$ B. int. y 0; int. x 0
C. Nenhum
D. AV $x = -8$; AO $y = -8$
E. Cr. em $(-\infty, -16)$, $(0, \infty)$;
decr. em $(-16, -8)$, $(-8, 0)$
F. máx. loc. $f(-16) = -32$;
mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-8, \infty)$; CB em $(-\infty, -8)$
H. Veja o gráfico à direita.



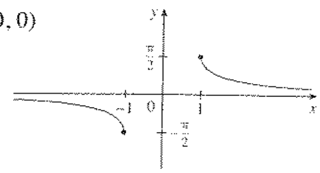
27. A. $[-2, \infty)$
B. int. y 0; int. x -2, 0
C. Nenhum D. Nenhum
Cr. em $(-\frac{4}{3}, \infty)$, decr. em $(-2, -\frac{4}{3})$
mín. loc. $f(-\frac{4}{3}) = -4\sqrt{6/9}$
G. CC em $(-2, \infty)$
H. Veja o gráfico à direita.



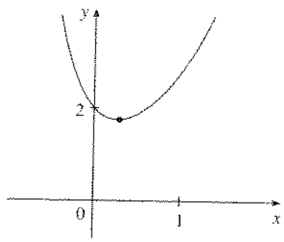
29. A. $\mathbb{R}$ B. int. y -2 C. Em torno do eixo y, período 2π
D. Nenhum E. Cr. em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, n é um inteiro
decr. em $(2n-1)\pi, (2n\pi)$
F. Máx. loc. $f((2n+1)\pi) = 2$; mín. loc. $f(2n\pi) = -2$
G. CC em $(2n\pi - (\pi/3), 2n\pi + (\pi/3))$;
CB em. $(2n\pi + (\pi/3), 2n\pi + (5\pi/3))$; PI $(2n\pi \pm (\pi/3), -\frac{1}{4})$
H.



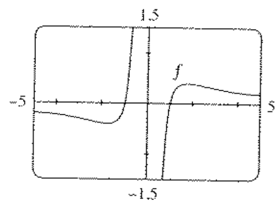
31. A. $\{x \mid |x| \geqslant 1\}$
B. Nenhum C. Em torno de $(0, 0)$
D. AH $y = 0$
E. Decr. em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
F. Nenhum
G. CC em $(1, \infty)$;
CB em $(-\infty, -1)$
H. Veja o gráfico à direita.



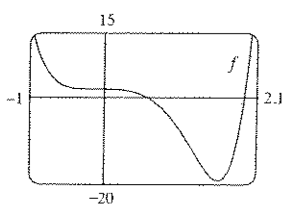
33. A. $\mathbb{R}$ B. int. y 2
C. Nenhum D. Nenhum
E. Cr. em $(\frac{1}{4}\ln 3, \infty)$;
decr. em $(-\infty, \frac{1}{4}\ln 3)$
F. Mín. loc. $f(\frac{1}{4}\ln 3) = 3^{1/4} + 3^{-3/4}$
G. CC em $(-\infty, \infty)$
H. Veja o gráfico à direita.

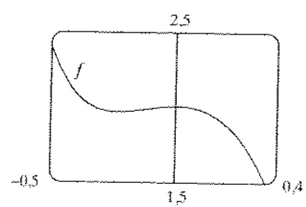


35. Cr. em $(-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3})$;
decr. em $(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$;
Máx. loc $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
Mín. loc $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CC em $(-\sqrt{6}, 0), (\sqrt{6}, \infty)$;
CB em $(-\infty, -\sqrt{6}), (0, \sqrt{6})$;
PI $(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}), (-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6})$

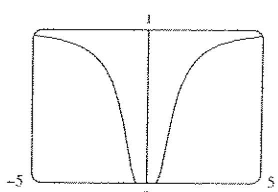


37. Cr. em $(-0{,}23, 0), (1{,}62, \infty)$; decr. em $(-\infty, -0{,}23), (0, 1{,}62)$;
máx. loc $f(0) = 2$; mín. loc $f(-0{,}23) \approx 1{,}96$, $f(1{,}62) \approx -19{,}2$;
CC em $(-\infty, -0{,}12), (1{,}24, \infty)$; CB em $(-0{,}12, 1{,}24)$
PI$(-0{,}12, 1{,}98), (1{,}24, -12{,}1)$





39.



$(\pm 0{,}82, 0{,}22)$; $(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2})$

41. Máx. em $x = 0$, mín. em $x \approx \pm 0{,}87$, PI em $x \approx \pm 0{,}52$

39. Para $C > -1$, f é periódica com período 2π e tem máximo local em $2n\pi + \pi/2$, n é um inteiro. Para $C \leqslant -1$, f não tem gráfico. Para $-1 < C < 1$, f tem assíntotas verticais. Para $C > 1$, f é contínua em $\mathbb{R}$. Quando C cresce, f move-se para cima, e suas oscilações tornam-se menos pronunciadas.

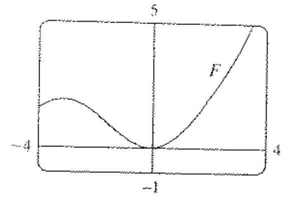
49. (a) 0 (b) CC em $\mathbb{R}$ **53.** $3\sqrt{3}r^2$

55. $4/\sqrt{3}$ cm de D **57.** $L = C$ **59.** \$ 11,50

61. 1,297383 **63.** 1,16718557 **65.** $f(x) \frac{2}{7}\, x^{7/2} - 5x^{4/5} + C$

67. $f(x) = e^x - 4\sqrt{x} + C$ **69.** $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$

71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$ **73.** (b) $0{,}1e^x - \cos x + 0{,}9$
(c)



75. Não **77.** (b) Em torno de 8,5 pol por 2 pol
(c) $20/\sqrt{3}$ pol, $20\sqrt{2/3}$ pol

79. (a) $20\sqrt{2} \approx 28$ pés (b) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{-480k(h-4)}{[(h-4)^2 + 1.600]^{5/2}}$, onde k é a constante de proporcionalidade

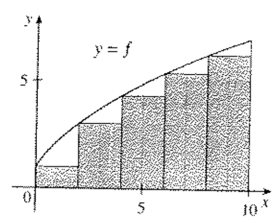
Problemas Quentes □

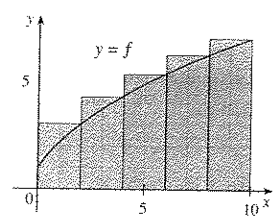
7. $(-2, 4), (2, -4)$ **9.** $(m/2\ m^2/4)$ **11.** $-3{,}5 < a < -2{,}5$
13. (a) $x/(x^2 + 1)$ (b) $\frac{1}{2}$ **15.** $a \leqslant e^{1/e}$
19. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h\sec\theta)/c_1 + (D - 2h\,\mathrm{tg}\,\theta)/c_2$,
$T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3{,}85$ km/s, $c_2 \approx 7{,}66$ km/s, $h \approx 0{,}42$ km
23. $3/(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 11\frac{1}{2}$h

Capítulo 5

Exercícios 5.1 □

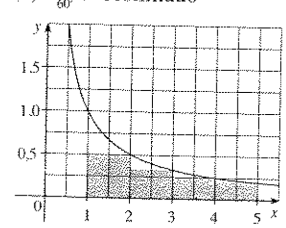
1. (a) 40, 52

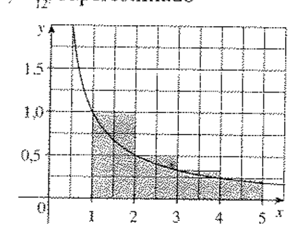




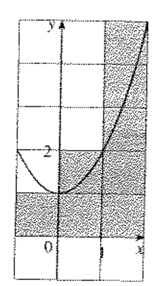
(b) 43,2, 49,2

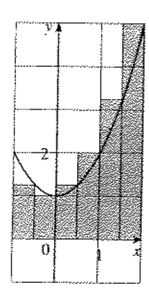
3. (a) $\frac{77}{60}$, subestimado (b) $\frac{25}{12}$, superestimado



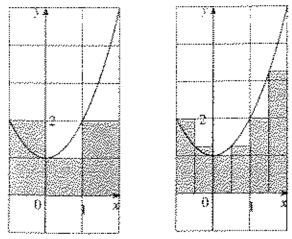


5. (a) 8, 6,875

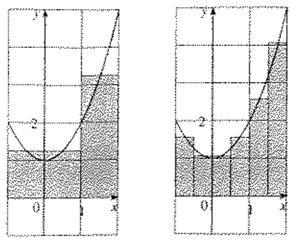




(b) 5, 5,375



(c) 5,75, 5,9375



(d) M_6

7. 1,9835, 1,9982, 1,9993, 2

9. (a) Esquerda: 4,5148, 4,6165, 4,6366; direita: 4,8148, 4,7165, 4,6966

11. 34,7 pés, 44,8 pés **13.** 63,2 L, 70 L **15.** 155 pés

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1+15i/n} \cdot (15/n)$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{2n} \cos \frac{i\pi}{2n}\right) \frac{i\pi}{2n}$

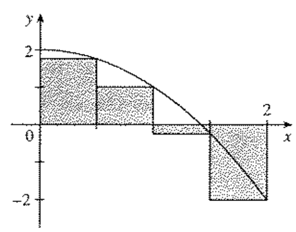
21. A região sobre o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$ de 0 a $\pi/4$.

23. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ (c) $\frac{32}{3}$

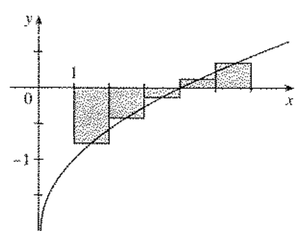
25. sen b, 1

Exercícios 5.2 ☐

1. 0,25
A soma de Riemann representa a soma das áreas dos dois retângulos acima do eixo x menos a soma das áreas dos três retângulos abaixo do eixo x.



3. −0,856759
A soma de Riemann representa a soma das áreas de dois retângulos acima do eixo x menos a soma das áreas dos três retângulos abaixo do eixo x.



5. (a) 4 (b) 6 (c) 10 **7.** −475, −85 **9.** 124,1644 **11.** 0,3084

13. 0,30843908, 0,30981629, 0,31015563

15.

n	R_n
5	1,933766
10	1,983524
50	1,999342
100	1,999836

Os valores de R_n aparentam estar próximos de 2.

17. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$ **19.** $\int_1^8 \sqrt{2x+x^2}\, dx$ **21.** 42 **23.** $\frac{4}{3}$

25. 3,75 **29.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2+4i/n}{1+(2+4i/n)^5} \cdot \frac{4}{n}$ **31.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi i}{n}\right) \frac{\pi}{n} =$

33. (a) 4 (b) 10 (c) −3 (d) 2 **35.** $-\frac{3}{4}$ **37.** $3 + \frac{9}{4}\pi$

39. 2,5 **41.** $-\frac{38}{5}$ **43.** 3 **45.** $e^5 - e^3$ **47.** $\int_{-1}^{5} f(x)\, d$

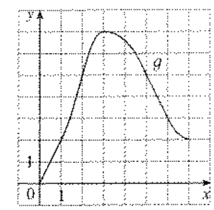
49. 122 **55.** $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 dx/x \leq 1$ **57.** $\frac{\pi}{12} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx \leq \frac{\pi}{12}\sqrt{3}$

59. $0 \leq \int_0^2 xe^{-x}\, dx \leq 2/e$ **67.** $\int_0^1 x^4 \, dx$ **69.** $\frac{1}{2}$

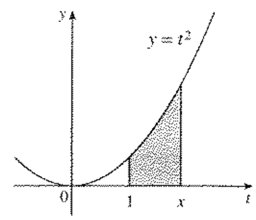
Exercícios 5.3 ☐

1. O processo não dá o mesmo que o outro. Veja o Teorema Fundamental do Cálculo.

3. (a) 0, 2, 5, 7, 3
(b) (0, 3)
(c) $x = 3$
(d)



5. (a), (b) x^2



7. $g'(x) = \sqrt{1+2x}$ **9.** $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$ **11.** $F'(x) = -\cos(x$

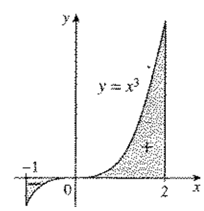
13. $h'(x) = -\operatorname{arctg}(1/x)/x^2$ **15.** $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x}$ **17.** $y' = \frac{3(1-3x)^2}{1+(1-3x)^2}$

19. $\frac{364}{3}$ **21.** 138 **23.** $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** Não existe

29. $\frac{156}{7}$ **31.** 1 **33.** Não existe **35.** ln 3

37. π **39.** $e^2 - 1$ **41.** 10,7 **43.** $\frac{243}{4}$ **45.** 2

47. 3,75

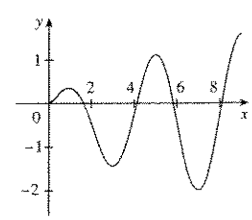


49. $g'(x) = \frac{-2(4x^2-1)}{4x^2+1} + \frac{3(9x^2-1)}{9x^2+1}$

51. $y' = 3x^{7/2} \operatorname{sen}(x^3) - (\operatorname{sen}\sqrt{x})/(2\sqrt[4]{x})$ **53.** $\sqrt{257}$ **55.** 29

57. (a) $-2\sqrt{n}, \sqrt{4n-2}$, n é um inteiro > 0
(b) $(0,1), (-\sqrt{4n-1}, -\sqrt{4n-3})$, e $(\sqrt{4n-1}, \sqrt{4n+1})$, n é um inteiro > 0 (c) 0,74

59. (a) Máx. loc. em 1 e 5;
Mín. loc. em 3 e 7
(b) 9
(c) $(\frac{1}{2}, 2), (4, 6), (8, 9)$
(d) Veja o gráfico à direita.



61. $\frac{1}{4}$ **67.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

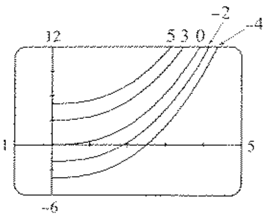
69. (b) Gasto médio sobre $[0, t]$; gasto médio minimizado.

Exercícios 5.4 ☐

5. $4x^{1/4} + C$ **7.** $\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + x + C$

9. $2t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$ **11.** $4x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C$

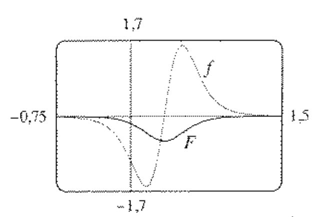
13. $\sec x + C$ **15.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + C$

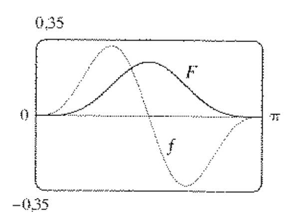


17. 18 **19.** $-2 + 1/e$
21. 52 **23.** $\frac{256}{15}$ **25.** $-\frac{63}{4}$ **27.** $\frac{55}{63}$ **29.** $2\sqrt{5}$
31. 8 **33.** $1 + \pi/4$ **35.** $\frac{256}{5}$ **37.** $\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{2}$
39. $-3{,}5$ **41.** 0, 1,32; 0,84 **43.** $\frac{4}{3}$
45. O aumento do peso da criança (em libras) entre as idades de 5 a 10 anos.
47. Números de galões de óleo derramados nas duas primeiras horas.
49. Aumento no rendimento quando a produção estiver crescendo de 1.000 a 5.000 unidades.
51. Newton-metro (ou joules) **53.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m
55. $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m **57.** $46\frac{2}{3}$ kg
59. 1,4 mi **61.** \$ 58.000 **63.** (b) Mais de 40%; $\frac{5}{36}$

Exercícios 5.5 □

1. $\frac{1}{3}$ sen $3x + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$
5. $-1/(1 + 2x)^2 + C$ **7.** $\frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + C$
9. $\frac{1}{63}(3x - 2)^{21} + C$ **11.** $2\sqrt{1 + x + 2x^2} + C$
13. $-\frac{1}{3}\ln|5 - 3x| + C$ **15.** $\frac{-3}{8(2y+1)^4} + C$
17. $-\frac{2}{3}(4 - t)^{3/2} + C$ **19.** $-\frac{1}{\pi}\cos \pi t + C$
21. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **23.** $2 \operatorname{sen}\sqrt{t} + C$
25. $\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 \theta + C$ **27.** $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$
29. $\frac{1}{2}(1 + z^3)^{2/3} + C$ **31.** $\ln|\ln x| + C$
33. $-\frac{2}{3}(\operatorname{cotg} x)^{3/2} + C$ **35.** $\ln|\operatorname{sen} x| + C$
37. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **39.** $\frac{2(b + cx^{a+1})^{3/2}}{[3c(a + 1)]} + C$
41. $\operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$
43. $\frac{4}{7}(x + 2)^{7/4} - \frac{8}{3}(x + 2)^{3/4} + C$
45. $\dfrac{-1}{6(3x^2 - 2x + 1)^3} + C$ **47.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$





49. 0 **51.** $\frac{182}{9}$ **53.** 4 **55.** 0
57. $e - \sqrt{e}$ **59.** 1 **61.** 3 **63.** $\frac{16}{15}$ **65.** 2
67. Não existe **69.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$ **71.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$
73. 6π **75.** Todas as três áreas são equivalentes.
77. $\frac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{5}\right)$ L **79.** 5 **85.** $\pi^2/4$

Exercícios 5.6 □

1. (b) 0,405

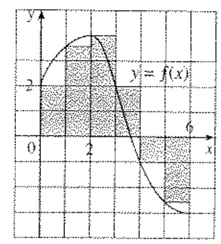
Capítulo 5 Revisão □

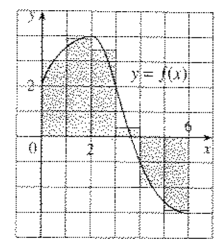
Testes Falso–Verdadeiro

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso

Exercícios

1. (a) 8 (b) 5,7





3. $\frac{2}{5} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** $f = c, f' = b, \int_0^x f(t)\,dt = a$
9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** -76 **15.** $\frac{21}{4}$ **17.** Não existe
19. $\frac{1}{3}$ sen 1 **21.** $(1/\pi)(e^{\pi} - 1)$ **23.** $\ln 2 - \frac{7}{4}$
25. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **27.** $[1/(2\pi)]\operatorname{sen}^2 \pi t + C$
29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$
33. $\frac{1}{4}\ln(1 + x^4) + C$ **35.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$ **37.** $\frac{23}{3}$
39. $2\sqrt{4 + \operatorname{sen} x} + C$ **41.** $\frac{64}{5}$ **43.** $F'(x) = \sqrt{1 + x^4}$
45. $g'(x) = 3x^5/\sqrt{1 + x^9}$ **47.** $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$
49. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **55.** 1,11
57. Número de barris de petróleo consumido desde 1º de janeiro de 2000 até 1º de janeiro de 2003.
59. 72.400 **61.** $F(x) = \int_1^x t^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$
63. $c \approx 1{,}62$ **65.** $e^{2x}(1 + 2x)/(1 - e^{-x})$

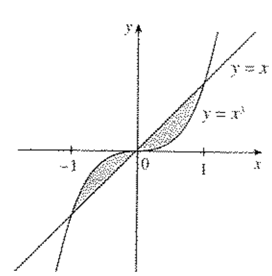
Problemas Quentes □

1. $\pi/2$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$
11. (a) $(n - 1)n/2$
(b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$
13. $f(x) = \frac{1}{2}x$ ou $f(x) = 0$ **17.** $2(\sqrt{2} - 1)$ **19.** $\frac{2}{3}$

Capítulo 6

Exercícios 6.1 □

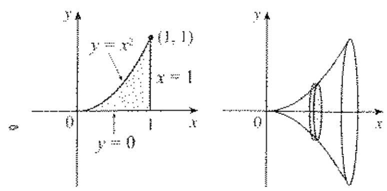
1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** 19,5 **7.** $\frac{1}{6}$ m **9.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$
11. $\frac{1}{3}$ **13.** 72 **15.** $\frac{59}{12}$ **17.** $\frac{9}{8}$ **19.** $\frac{8}{3}$
21. $\frac{1}{2}$ **23.** $2 - \pi/2$ **25.** $\pi - \frac{2}{3}$ **27.** 6,5
29. $\frac{1}{2}$



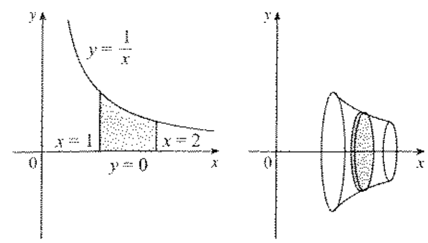
31. 0,6407 **33.** ±1,02; 2,70 **35.** ±0,86; 0; 0,40
37. $12\sqrt{6}-9$ **39.** $117\frac{1}{3}$ pés
41. (a) Carro A (b) A distância na qual A está na frente de B depois de um minuto (c) Carro A (d) $t \approx 2{,}2$ min
43. $24\sqrt{3}/5$ **45.** $4^{2/3}$ **47.** ±6
49. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

Exercícios 6.2 □

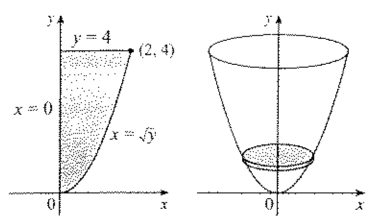
1. $\pi/5$



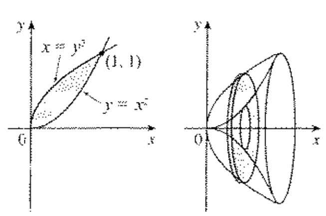
3. $\pi/2$



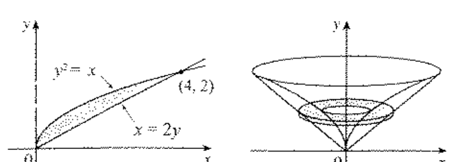
5. 8π



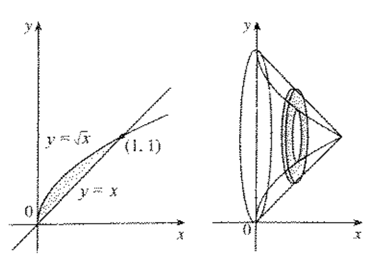
7. $3\pi/10$



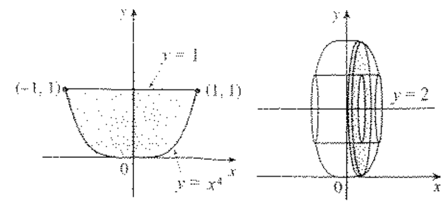
9. $64\pi/15$



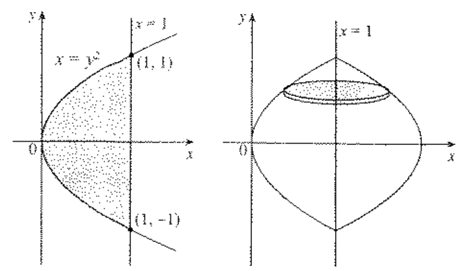
11. $\pi/6$



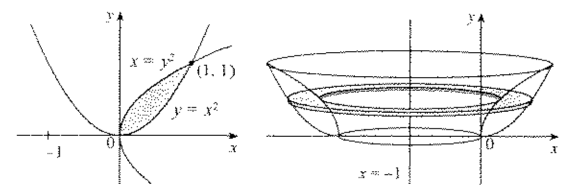
13. $208\pi/45$



15. $16\pi/15$



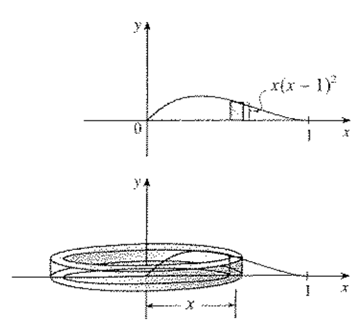
17. $29\pi/30$



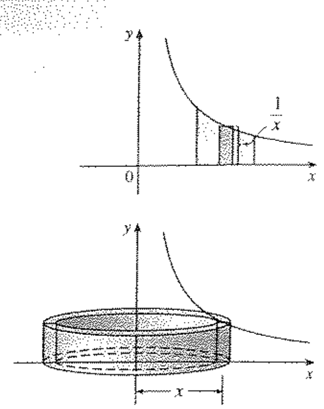
19. $\pi/7$ **21.** $\pi/10$ **23.** $\pi/2$ **25.** $7\pi/15$ **27.** $5\pi/14$
29. $13\pi/30$ **31.** $\pi\int_0 (1-\mathrm{tg}^3 x)^2\,dx$ **33.** $\pi\int_0^{\pi}[1^2-(1-\operatorname{sen} x)^2]\,dx$
35. $\pi\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\{[3-(2)]^2-[\sqrt{y^2+1}-(-2)]^2\}dy$
37. 0, 0,747; 0,132 **39.** $\frac{11}{8}\pi^2$
41. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ em torno do eixo x.
43. Sólido obtido pela rotação da região $y^4 \leqslant x \leqslant y^2, 0 \leqslant y \leqslant 1$ em torno do eixo y.
45. 1.110 cm³ **47.** $\pi r^2 h/3$ **49.** $\pi h^2[r-(h/3)]$
51. $2b^2h/3$ **53.** 10 cm³ **55.** 24 **57.** 2 **59.** 3
61. (a) $8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy$ (b) $2\pi^2r^2R$ **63.** (b) $\pi r^2 h$
65. $\frac{5}{12}\pi r^2$ **67.** $8\int_0^r\sqrt{R^2-y^2}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$

Exercícios 6.3 □

1. Circunferência = $2\pi x$, altura = $x(x-1)^2$; $\pi/15$

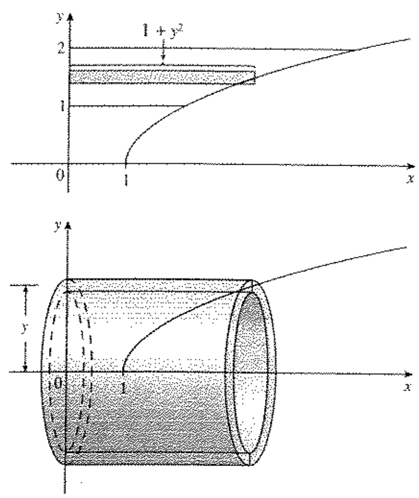


3. 2π



5. $\pi(1 - 1/e)$ **7.** 16π

9. $21\pi/2$



11. $768\pi/7$ **13.** $250\pi/3$ **15.** $17\pi/6$ **13.** $67\pi/6$

19. 24π **21.** $\int_1^2 2\pi(x + 1)$

23. $\int_0^1 2\pi x \ln x \, dx$ $[\text{sen}(\pi x/2) - x^4]\, dx$

25. $\int_0^{\pi} 2\pi(4 - y)\sqrt{\text{sen}\, y}\, dy$ **27.** 1,142

29. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ em torno do eixo y.

31. Sólido obtido pela rotação da região limitada por (i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$ e $y = 0$ ou (ii) $x = y^2$, $x = 1$ e $y = 0$ em torno da reta $y = 3$.

33. 0, 1,32; 4,05 **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** $81\pi/10$

39. $8\pi(3 - \ln 4)$ **41.** $4\pi/3$ **43.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Exercícios 6.1 □

1. 7.200 J **3.** 9 pés-lb **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$pés-lb

9. $\frac{25}{24} \approx 1{,}04$ J **11.** 10,8 cm **13.** (a) 625 pés-lb (b) $\frac{1.875}{4}$pés-lb

15. 650.000 pés-lb **17.** 3.857 J **19.** 2.450 J

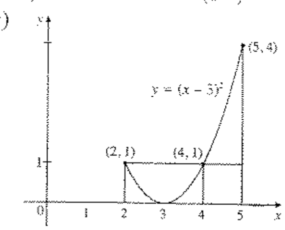
21. $\approx 1{,}06 \times 10^6$ J **23.** $\approx 5{,}8 \times 10^3$ pés-lb

25. 2,0 m **29.** $Gm_1m_2[(1/a) - (1/b)]$

Exercícios 6.5 □

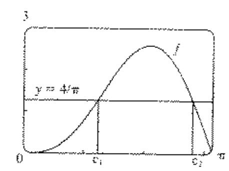
1. $\frac{1}{3}$ **3.** $2/\pi$ **5.** $(1 - e^{-25})/10$ **7.** $2/(5\pi)$

9. (a) 1 (b) 2,4 (c)



11. (a) $4/\pi$ (b) $\approx$ 1,24, 2,81

(c)



15. $38\frac{1}{3}$ **17.** $(50 + 28/\pi)$ °F $\approx$ 59 °F

19. 6 kg/m **21.** $5/(4\pi) \approx 0{,}4$ L

Capítulo 6 Revisão □

Exercícios

1. $\frac{125}{6}$ **3.** $c - \frac{11}{6}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$ **9.** $1.656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_0^1 \pi\,[(1 - x^3)^2 - (1 - x^2)^2]\, dx$

15. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

17. (a) 0,38 (b) 0,87

19. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ em torno do eixo y.

21. Sólido obtido pela rotação da região, no primeiro quadrante, limitada por $x = 4 - y^2$ e os eixos em torno do eixo x.

23. 36 **25.** $125\sqrt{3}/3$ m^3 **27.** 3,2 J

29. (a) $8.000\pi/3 \approx 8.378$ pés-lb (b) 2,1 pés **31.** $f(x)$

Problemas Quentes □

1. (a) $f(t) = 3t^2$ (b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$

5. (a) 0,2261 (c) 0,6736 m

(d) (i) $1/(105\pi) \approx 0{,}003$ pol/s (ii) $370\pi/3$ s $\approx$ 6,5 min

9. $y = \frac{32}{9}x^2$ **11.** (a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\, dy$

(c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\, y^{1/4}$. Vantagens; as marcas sobre o contêiner estão igualmente espaçadas.

13. $B = 16A$

Capítulo 7

Exercícios 7.1 □

1. $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x\,\text{sen}\,5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

5. $2(r - 2)e^{r/2} + C$ **7.** $-\frac{1}{\pi}x^2\cos\pi x + \frac{2}{\pi^2}x\,\text{sen}\,\pi x + \frac{2}{\pi^3}x^2\cos\pi x + C$

9. $\frac{1}{2}(2x + 1)\ln(2x + 1) - x + C$ **11.** $t\,\text{arctg}\,4t - \frac{1}{8}\ln(1 + 16t^2) + C$

13. $x(\ln x)^2 - 2x\ln + 2x + C$ **15.** $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2\,\text{sen}\,3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

17. $y\cosh y - \text{senh}\, y + c$ **19.** $\pi/3$ **21.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

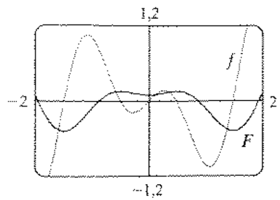
23. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$ **25.** $(\pi + 6 - 3\sqrt{3})/6$

27. $\text{sen}\,x\,(\ln \text{sen}\,x - 1) + C$ **29.** $\frac{1}{2}x(\cos\ln x + \text{sen}\ln x) + C$

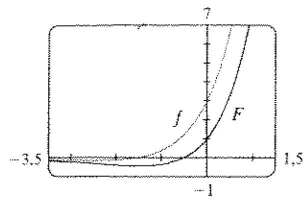
31. $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$ **33.** $2(\text{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$

35. $-\frac{1}{2} - \pi/4$

37. $(x \operatorname{sen} \pi x)/\pi + (\cos \pi x)/\pi^2 + C$



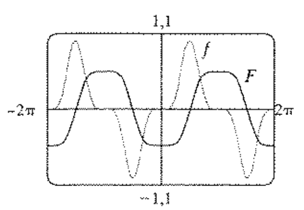
39. $(2x + 1)e^x + C$



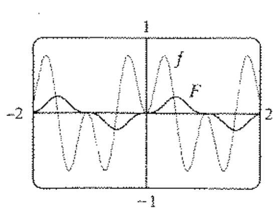
41. (b) $-\frac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$
43. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ **49.** $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x - 6] + C$
51. $\frac{25}{4} - \frac{75}{4}e^{-2}$ **53.** 1,0475, 2,8731, 2,1828 **55.** $4 - 8/\pi$
57. $2\pi e$ **59.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{13}{9}$ **61.** $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m **63.** 2

Exercícios 7.2 □

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$
5. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C$ **7.** $\pi/4$ **9.** $\pi/4$
11. $\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$ **13.** $(3\pi - 4)/192$
15. $(\frac{2}{7}\cos^3 x - \frac{2}{3}\cos x)\sqrt{\cos x} + C$
17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln(1 + \operatorname{sen} x) + C$
21. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ **23.** $\operatorname{tg} x - x + C$
25. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 t + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{tg} t + C$ **27.** $\frac{117}{8}$
29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$
31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \operatorname{tg}^2 x + \ln|\sec x| + C$ **33.** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\theta + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\theta + C$
35. $\sqrt{3} - (\pi/3)$ **37.** $\frac{1}{3}\operatorname{cossec}^3\alpha - \frac{1}{5}\operatorname{cossec}^5\alpha + C$
39. $\ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + C$
41. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + C$ **43.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 12\theta + C$
45. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ **47.** $\frac{1}{10}\operatorname{tg}^5(t^2) + C$
49. $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$



51. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 9x + C$



53. 0 **55.** $\frac{1}{3}$ **57.** 0 **59.** $\pi^2/4$ **61.** $2\pi + (\pi^2/4)$
63. $s = (1 - \cos^3 \omega t)/(3\omega)$

Exercícios 7.3 □

1. $\sqrt{x^2 - 9}/(9x) + C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2 - 18)\sqrt{x^2 + 9} + C$
5. $\pi/24 + \sqrt{3}/8 - \frac{1}{4}$ **7.** $-\sqrt{25 - x^2}/(25x) + C$
9. $\ln(\sqrt{x^2 + 16} + x) + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - 4x^2} + C$
13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3) - \sqrt{x^2 - 9}/(2x^2) + C$,
15. $(x/\sqrt{a^2 - x^2}) - \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + C$ **17.** $\sqrt{x^2 - 7} + C$
19. $\ln|(\sqrt{1 + x^2} - 1)/x| + \sqrt{1 + x^2} + C$ **23.** $\frac{64}{1.215}$
23. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}((x - 2)/3) + \frac{1}{2}(x - 2)\sqrt{5 + 4x - x^2} + C$
25. $\frac{1}{3}\ln|3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x - 8}| + C$
27. $\frac{1}{2}[\operatorname{tg}^{-1}(x + 1) + (x + 1)/(x^2 + 2x + 2)] + C$
29. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}x^2 + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1 - x^4} + C$ **33.** $\frac{1}{6}(\sqrt{48} - \operatorname{sen}^{-1}7)$
37. 0,81, 2, 2,10 **39.** $r\sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2/2 - R^2 \operatorname{arcsen}(r/R)$ **57.** $2\pi^2 R r^2$

Exercícios 7.4 □

1. (a) $\dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{3x + 1}$ (b) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{B}{(x + 1)^2}$ **3.** (a) $\dfrac{A}{x + 4} + \dfrac{B}{x - 1}$
(b) $\dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{3x + 1}$ **5.** (a) $1 + \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x}$
(b) $\dfrac{At + B}{t^2 + 1} + \dfrac{Ct + D}{t^2 + 4} + \dfrac{ET + F}{(t^2 + 4)^2}$ **7.** $x + 6\ln|x - 6| + C$
9. $2\ln|x + 5| - \ln|x - 2| + C$ **11.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ **13.** $a\ln|x - b| + C$
15. $2\ln 2 + \frac{1}{2}$ **17.** $\frac{27}{5}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3$ (ou $\frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}$)
19. $-\frac{1}{36}\ln|x + 5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x + 5} + \frac{1}{36}\ln|x - 1| + C$
21. $2\ln|x| + 3\ln|x + 2| + (1/x) + C$
23. $\ln|x + 1| + 2/(x + 1) - 1/[2(x + 1)^2] + C$
25. $\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-1}(x/3) + C$
27. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + (1/\sqrt{2})\operatorname{tg}^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$
29. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^{-1}((x + 1)/2) + C$
31. $\frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$
33. $\frac{1}{3}\ln\frac{17}{2}$ **35.** $(1/x) + \frac{1}{2}\ln|(x - 1)/(x + 1)| + C$
37. $\dfrac{-1}{2(x^2 + 2x + 4)} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{tg}^{-1} + \dfrac{x + 1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2(x + 1)}{3(x^2 + 2x + 4)^2} + C$
39. $\ln|(\sqrt{x + 1} - 1)/\sqrt{x + 1} + 1)| + C$ **41.** $2 + \ln\frac{25}{9}$
43. $\frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2 + 1)^{2/3} + C$
45. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$
47. $\ln[(e^x + 2)^2/(e^x + 1)] + C$
49. $(x - \frac{1}{2})\ln(x^2 - x + 2) - 2x + \sqrt{7}\operatorname{tg}^{-1}((2x - 1)/\sqrt{7}) + C$
51. $-\frac{1}{2}\ln 3 \approx -0{,}55$
53. $\frac{1}{2}\ln|(x - 2)/x| + C$
57. $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2}\right| + C$
59. $\frac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}(x/2)| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2(x/2) + C$
61. $1 + 2\ln 2$
63. $t = -\ln P - \frac{1}{9}\ln(0{,}9P + 900) + C$, em que $C \approx 10{,}23$

65. (a) $\frac{24.110}{4.879}\frac{1}{5x+2} - \frac{668}{323}\frac{1}{2x+1} - \frac{9.438}{80.155}\frac{1}{3x-7} + \frac{1}{260.015}\frac{22.098x+48.935}{x^2+x+5}$

(b) $\frac{4.822}{4.879}\ln|5x+2| - \frac{334}{323}\ln|2x+1| - \frac{3.146}{80.155}\ln|3x-7| + \frac{11.049}{260.015}\ln(x^2+x+5) + \frac{75.772}{260.015\sqrt{19}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$

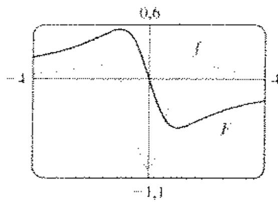
O CAS omite o sinal do valor absoluto e a constante de integração.

Exercícios 7.5 □

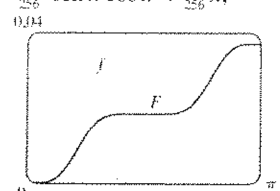
1. $\operatorname{sen} x + \ln|\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg}| + C$ **3.** $4 - \ln 9$
5. $e^{\pi/4} - e^{-\pi/4}$ **7.** $\frac{243}{5}\ln - \frac{242}{25}$
9. $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + \operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C$
11. $\frac{1}{8}\cos^8\theta - \frac{1}{6}\cos^6\theta + C$ (ou $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^6\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8\theta + C$
13. $x/\sqrt{1-x^2} + C$ **15.** $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
17. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x + C$
(ou $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$
19. $e^{e^x} + C$ **21.** $-\frac{1}{8}e^{-2t}(4t^3 + 6t^2 + 6t + 3) + C$
23. $\frac{4.097}{45}$ **25.** $3x + \frac{23}{3}\ln|x-4| - \frac{5}{3}\ln|x+2| + C$
27. $\frac{1}{7}(\ln \operatorname{sen} x)^2 + C$
29. $15 + 7\ln\frac{2}{7}$ **31.** $\operatorname{sen}^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$
33. $2\operatorname{sen}^{-1}((x+1)/2) + ((x+1)/2\sqrt{3-2x-x^2} + C$
35. 0 **37.** $\pi/8 - \frac{1}{4}$ **39.** $-\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C$
41. $\theta\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \ln|\sec\theta| + C$ **43.** $\frac{2}{3}(1+C)^{3/2} + C$
45. $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3} + C$
47. $\ln\sqrt{x^2 + a^2} + \operatorname{tg}^{-1}(x/a) + C$
49. $\ln\left|\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right| + C$ **51.** $-\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+1}+1}{2x}\right| + C$
53. $(1/m)x^2\cosh(mx) - (2/m^2)x\operatorname{senh}(mx) + (2/m^3)\cosh(mx) + C$
55. $3\ln(\sqrt{x+1}+3) - \ln(\sqrt{x+1}+1) + C$
57. $\frac{3}{7}(x+c)^{7/3} - \frac{3}{4}c(x+c)^{4/3} + C$
59. $e^x + \frac{1}{2}\ln|(e^x-1)/(e^x+1)| + C$
61. $\frac{1}{20}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{4}x^5) + C$ **63.** $2(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C$
65. $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}\right] + C$
67. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi - \frac{1}{2}\pi - \ln 2$ **69.** $e^x - \ln(1+e^x) + C$
71. $-\frac{1}{4}\ln(x^2+3) + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$
73. $\frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{16}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\operatorname{tg}^{-1}(x/2) + C$
75. $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **77.** $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{-1}(x^{3/2}) + C$
79. $\frac{1}{3}x\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$ **81.** $xe^{x^2} + C$

Exercícios 7.6 □

1. $(-1/x)\sqrt{7-2x^2} - \sqrt{2}\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}x/\sqrt{7}) + C$
3. $(1/(2\pi))\sec(\pi x)\operatorname{tg}(\pi x) + (1/(2\pi))\ln|\sec(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi x)| + C$
5. $\pi/4$ **7.** $\frac{1}{25}e^{-3x}(-3\cos 4x + 4\operatorname{sen} 4x) + C$
9. $-\sqrt{4x^2+9}/(9x) + C$ **11.** $e - 2$
13. $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$ **15.** $\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} e^x) + C$
17. $((2y-1)/8)\sqrt{6+4y-4y^2} + \frac{7}{8}\operatorname{sen}^{-1}((2y-1)/\sqrt{7}) - \frac{1}{12}(6+4y-4y^2)^{3/2} + C$
19. $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x[3\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + C$ **21.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right| + C$
23. $\frac{1}{4}\operatorname{tg} x\sec^3 x + \frac{3}{8}\operatorname{tg} x\sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4+(\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4+(\ln x)^2}\right] + C$
27. $\sqrt{e^{2x}-1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$ **29.** $\frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}\right| + C$
31. $2\pi^2$ **35.** $-\frac{1}{4}x(5-x^2)^{3/2} + \frac{5}{8}x\sqrt{5-x^2} + \frac{25}{8}\operatorname{sen}^{-1}(x/\sqrt{5}) + C$
37. $-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \frac{2}{15}\cos^3 x + C$
39. $\frac{1}{10}(1+2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1+2x)^{3/2} + C$
41. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$
43. $\frac{2^{x-1}\sqrt{2^{2x}-1}}{\ln 2} - \frac{\ln(\sqrt{2^{2x}-1}+2^x)}{2\ln 2} + C$
45. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$;
máx. em -1, mín. em 1; PI em $-1{,}7$, 0 1,7



47. $F(x) = -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x\cos^7 x - \frac{3}{80}\operatorname{sen} x\cos^7 x + \frac{1}{160}\operatorname{sen} x\cos^5 x + \frac{1}{128}\operatorname{sen} x\cos^3 x + \frac{3}{256}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{3}{256}x$;
máx. em π,
mín. em 0;
PI em 0,68;
$\pi/2$; e 2,46



Exercícios 7.7 □

1. (a) $L_2 = 6$, $R_2 = 12$, $M_2 \approx 9{,}6$
(b) L_2 é uma subestimação; R_2 e M_2 são superestimadas.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$
3. (a) $T_4 \approx 0{,}895759$ (subestimada)
(b) $M_4 \approx 0{,}908907$ (superestimada), $T_4 < I < M_4$
5. (a) 5,932957; $E_M \approx -0{,}063353$ (b) 5,869247; $E_S \approx 0{,}000357$
7. (a) 2,413790 (b) 2,411453 (c) 2,412232
9. (a) 0,146879 (b) 0,147391 (c) 0,147219
11. (a) 0,451948 (b) 0,451991 (c) 0,451976
13. (a) 2,031893 (b) 2,014207 (a) 2,020651
15. (a) 2,031893 (b) 2,014207 (a) 2,02065
17. (a) $-0{,}495333$ (b) $-0{,}543321$ (a) $-0{,}526123$
19. (a) $T_{10} \approx 0{,}881839$, $M_{10} \approx 0{,}882202$
(b) $|E_T| \leqslant 0{,}013$, $|E_M| \leqslant 0{,}006$ (c) $n = 366$ para T_n, $n = 259$ para M_n
21. (a) $T_{10} \approx 1{,}719713$, $E_T = -0{,}001432$;
$S_{10} \approx 1{,}718283$, $E_S = 0{,}000001$
(b) $|E_T| \leqslant 0{,}002266$, $|E_S| \leqslant 0{,}0000016$
(c) $n = 151$ para T_n, $n = 107$ para M_n, $n = 8$ para S_n
23. (a) 2,8 (b) 7,954926518 (c) 0,2894 (d) 7,954926521
(e) O erro real é muito pequeno. (f) 10,9 (g) 7,953789422
(h) 0,0593 (i) O erro real é pequeno. (j) $n \geqslant 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
4	0,140625	0,390625	0,265625	0,242188
8	0,191406	0,316406	0,253906	0,248047
16	0,219727	0,282227	0,250977	0,249512

n	E_L	E_R	E_T	E_M
4	0,109375	−0,140625	−0,015625	0,007813
8	0,058594	−0,066406	−0,003906	0,001953
16	0,030273	−0,032227	−0,000977	0,000488

Mesmas observações dadas no Exemplo 1.

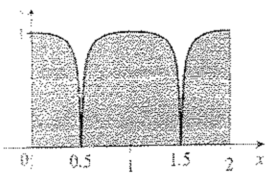
27.

n	T_n	M_n	S_n
6	4,661488	4,669245	4,666563
12	4,665367	4,667316	4,666659

n	E_T	E_M	E_S
6	0,005179	−0,002578	0,000104
12	0,001300	−0,000649	0,000007

Mesmas observações dadas no Exemplo 1.

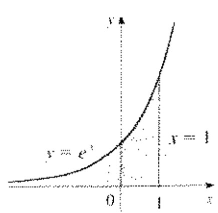
29. (a) 11,5 (b) 12 (c) $11,\bar{6}$ **31.** (a) 23,44 (b) 0,3413
33. 37,73 pés/s
35. 10,177 megawatt/hora **37.** 828 **39.** 12,3251 **41.** 59,4
43.

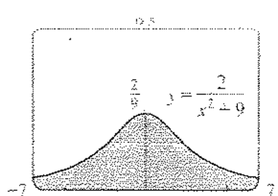


Exercícios 7.8

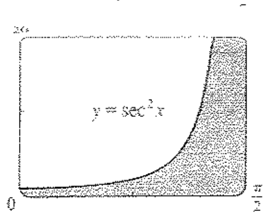
Abreviações: C = convergente; D = divergente

1. (a) Intervalo infinito (b) Descontinuidade infinita
(c) Descontinuidade infinita (d) Intervalo infinito
3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0,495, 0,49995, 0,4999995; 0,5
5. $\frac{1}{12}$ **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D
17. D **19.** $\frac{1}{25}$ **21.** D **23.** $\pi/9$ **25.** 1
27. $2\sqrt{3}$ **29.** D **31.** D **33.** $\frac{75}{4}$ **35.** D
37. D **39.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$
41. e **43.** $2\frac{\pi}{3}$





45. Área infinita

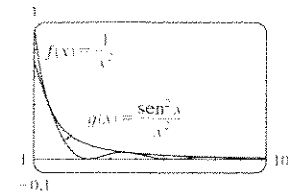


47. (a)

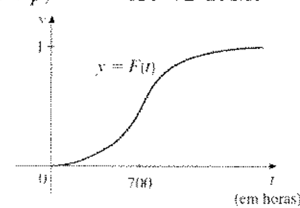
t	$\int_1^t [(\mathrm{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0,447453
5	0,577101
10	0,621306
100	0,668479
1.000	0,672957
10.000	0,673407

Mostrando que a integral é convergente.

(c)



49. C **51.** C **53.** D **55.** π **57.** $p < 1$, $1/(1-p)$
59. $p < -1$, $-1/(1+p)$ **65.** $\sqrt{2GM/R}$
67. (a)



69. 1.000
71. (a) $F(s) = 1/s$, $s > 0$ (b) $F(s) = 1/(s-1)$, $s > 1$
(c) $F(s) = 1/s^2$, 1, $s > 0$ **77.** $C = 1$, $\ln 2$

Capítulo 7 Revisão

Testes Falso–Verdadeiro

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. (a) Verdadeiro (b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Exercícios

1. $5 + 10\ln\frac{2}{3}$ **3.** $\ln 2$
5. $\frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{3}{7}\sec^7 x + \frac{3}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$
7. $-\cos(\ln t) + C$ **9.** $\frac{64}{5}\ln 4 - \frac{124}{25}$ **11.** $\sqrt{3} - (\pi/3)$
13. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
15. $\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3\theta - \frac{2}{5}\mathrm{sen}^5\theta + \frac{1}{7}\mathrm{sen}^7\theta + C$
17. $x\sec x - \ln|\sec x + \mathrm{tg}\, x| + C$
19. $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{1}{9}\mathrm{tg}^{-1}((3x+1)/2) + C$
21. $\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}\right| + C$
23. $\frac{1}{12}(\mathrm{cotg}^3\, 4x + 3\,\mathrm{cotg}\, 4x) + C$
25. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 3\,\mathrm{tg}^{-1}x + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$ **27.** $\frac{2}{5}$
29. 0 **31.** $6 - 3\pi/2$ **33.** $\left(x/\sqrt{4-x^2}\right) - \mathrm{sen}^{-1}(x/2) + C$
35. $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$
39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D
45. $4\ln 4 - 8$ **47.** D **49.** $\pi/4$

51. $(x + 1)\ln(x^2 + 2x + 2) + 2\ \mathrm{arctg}\,(x + 1) - 2x + C$
53. 0 **55.** $\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \mathrm{sen}^{-1}(e^x)\right] + C$
57. $\frac{1}{4}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| + C$
61. Não **63.** (a) 1,090608 (superestimado)
(b) 1,088840 (subestimado) (c) 1,089429 (desconhecido)
65. (a) $0{,}00\overline{6}$, $n \geqslant 259$ (b) $0{,}00\overline{3}$, $n \geqslant 183$ **67.** 8,6 mi **69.** (a) 3,8
(b) 1,7867, 0,000646 (c) $n \geqslant 30$ **71.** C **73.** 2 **75.** $3\pi^2/16$

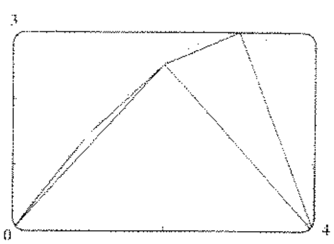
Problemas Quentes □

1. Em torno de 1,85 pol do centro **3.** 0 **5.** $f(\pi) = -\pi/2$
9. $(b^b a^{-a})^{1/(b-a)}e^{-1}$ **11.** $2 - \mathrm{sen}^{-1}(2\sqrt{5})$

Capítulo 8

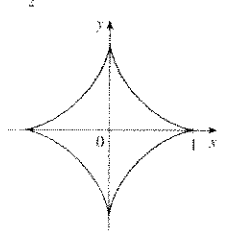
Exercícios 8.1 □

1. $3\sqrt{10}$ **3.** $\frac{46}{3}$ **5.** $\frac{2}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$ **7.** $\frac{1.261}{240}$ **9.** $\frac{32}{3}$
11. $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ **13.** senh 1
15. $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{1 + e^2} - 1\right) - 1 - \ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$
17. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2 x}\ dx$ **19.** $\int_1^4 \sqrt{9y^4 + 6y^2 + 2}\ dy$
21. 5,115840 **23.** 1,569619
25. (a), (b)



$L_1 = 4$, $L_2 \approx 6{,}43$, $L_4 \approx 7{,}50$

(c) $\int_0^4 \sqrt{1 + [4(3 - x)/(3(4 - x)^{2/3})]^2}\,dx$ (d) 7,7988
27. $\ln 3 - \frac{1}{2}$
29. 6



31. $s(x) = \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{3/2} - 10\sqrt{10}\right]$ **33.** 209,1 m
35. 29,36 pol **37.** 12,4

Exercícios 8.2 □

1. $\int_1^3 2\pi\ln x\sqrt{1 + (1/x)^2}\,dx$ **3.** $\int_0^{\pi/4} 2\pi x\sqrt{1 + (\sec x\ \mathrm{tg}\ x)^2}\,dx$
5. $\pi\left(145\sqrt{145} - 1\right)/27$ **7.** $\pi\left(37\sqrt{37} - 17\sqrt{17}\right)/6$
9. $\pi\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^2 - e^{-2}\right)\right]$ **11.** $21\pi/2$
13. $\pi\left(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}\right)/27$ **15.** πa^2
17. 9,023754 **19.** 13,527296
21. $(\pi/4)\left[4\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) - 4\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \sqrt{17} + 4\sqrt{2}\right]$
23. $(\pi/6)\left[\ln\left(\sqrt{10} + 3\right) + 3\sqrt{10}\right]$ **27.** (a) $\pi a^2/3$ (a) $56\pi\sqrt{3}\,a^2/45$
29. $2\pi\left[b^2 + a^2 b\ \mathrm{sen}^{-1}\left(\sqrt{a^2 - b^2}/a\right)/\sqrt{a^2 - b^2}\right]$
31. $\int_a^b 2\pi\left[c - f(x)\right]\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\ dx$ **33.** $4\pi^2 r^2$

Exercícios 8.3 □

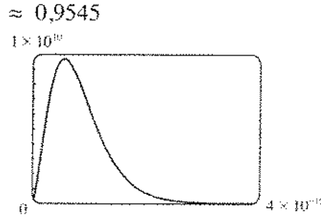
1. (a) 187,5 lb/pé^2 (b) 1.875 lb (c) 562,5 lb **3.** 6.000 lb
5. $6{,}5 \times 10^6$ N **7.** $3{,}5 \times 10^4$ lb
9. $1.000g\pi r^3$ N **11.** $5{,}27 \times 10^5$ N
13. (a) 314 N (b) 353 N
15. (a) $\approx 5{,}63 \times 10^3$ lb (b) $\approx 5{,}06 \times 10^4$ lb (c) $\approx 4{,}88 \times 10^4$ lb
(d) $\approx 3{,}03 \times 10^5$ lb **17.** $2{,}5 \times 10^5$ N
19. 230; $\frac{23}{7}$ **21.** 10; 1; $\left(\frac{1}{21}, \frac{10}{21}\right)$ **23.** (0, 1,6)
25. $(1/(e - 1), (e + 1)/4)$ **27.** $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$
29. $[(\pi\sqrt{2} - 4)/[4(\sqrt{2} - 1)], 1/[4(\sqrt{2} - 1)]$
31. (2, 0) **33.** $\frac{4}{3}$, 0, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ **35.** (0,781 1,330)
39. $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ **41.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Exercícios 8.4 □

1. \$ 38.000 **3.** \$ 43.866.933,33 **17.** \$ 407,25
7. \$ 12.000 **9.** 3727; \$ 37.753
11. $\frac{2}{3}\left(16\sqrt{2} - 8\right) \approx$ \$9,75 milhões **13.** $1{,}19 \times 10^{-4}$ cm^3/s **15.** $\frac{1}{9}$ L/s

Exercícios 8.5 □

1. (a) A probabilidade que um pneu aleatóriamente escolhido tem de ter uma vida útil entre 30.000 e 40.000 milhas
(b) A probabilidade que um pneu escolhido aleatóriamente tem de ter uma vida útil de no mínimo de 25.000 milhas
3. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (b) $1 - \frac{3}{8}\sqrt{3} \approx 0{,}35$
5. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (b) 5
7. $5\ln 2 \approx 3{,}47$ min **9.** (a) $e^{-4/2{,}5} \approx 0{,}20$ (b) $1 - e^{-2/2{,}5} \approx 0{,}55$
(c) Se não for servido dentro de dez minutos você ganha um hambúrguer.
11. $\approx 44\%$ **13.** $\approx 0{,}9545$
15. (b) 0; a_0 (c)



(d) $1 - 41e^{-8} \approx 0{,}986$ (e) $\frac{3}{2}a_0$

Capítulo 8 Revisão □

Exercícios

1. $\frac{15}{2}$ **3.** (a) $\frac{21}{16}$ (b) $41\pi/10$ **5.** 3,292287 **7.** $\frac{124}{5}$
9. ≈ 458 lb **11.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{15}\right)$ **13.** $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ **15.** $2\pi^2$
17. \$ 7.166,67 **19.** $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
(b) $\approx 0{,}3455$ (c) 5, sim **21.** (a) $1 - e^{-3/8} \approx 0{,}31$

(b) $e^{-5/4} \approx 0{,}29$ (c) $8 \ln 2 \approx 5{,}55$ min

Problemas Quentes

1. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$
3. (a) $2\pi r(r \pm d)$ (b) $\approx 3.360.000$ mi² (d) $\approx 78.400.000$ mi²
5. (a) $P(z) = P_0 + g\int_0^z \rho(x)\,dx$
(b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H}\, 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$
7. Altura $\sqrt{2}\,b$, volume $\left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$ 9. 0,14 m 11. $2/\pi$, $1/\pi$

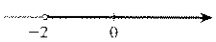
Apêndices

Exercícios A

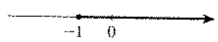
1. 18 3. π 5. $5 - \sqrt{5}$ 7. $2 - x$

9. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{para } x < -1 \end{cases}$ 11. $x^2 + 1$

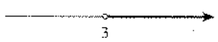
13. $(-2, \infty)$



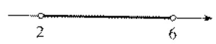
15. $[-1, \infty)$



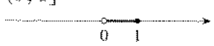
17. $(3, \infty)$



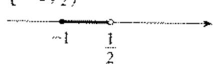
19. $(2, 6)$



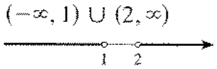
21. $(0, 1]$



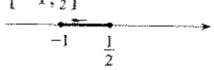
23. $[-1, \frac{1}{2})$



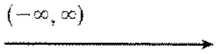
25. $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



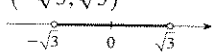
27. $[-1, \frac{1}{2}]$



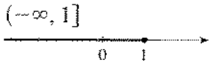
29. $(-\infty, \infty)$



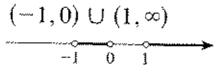
31. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



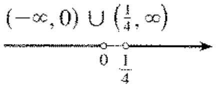
33. $(-\infty, 1]$



35. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$



37. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$

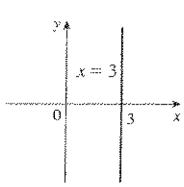


39. $10 \leq C \leq 35$ 41. (a) $T = 20 - 10h, 0 \leq h \leq 12$
(b) $-30\ °C \leq T \leq 20\ °C$ 43. $\pm\frac{3}{2}$ 45. $2, -\frac{4}{3}$
47. $(-3, 3)$ 49. $(3, 5)$ 51. $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$
53. $[1{,}3; 1{,}7]$ 55. $[-4, -1] \cup [1, 4]$
57. $x \geq (a + b)c/(ab)$ 59. $x > (c - b)/a$

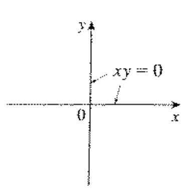
Exercícios B

1. 5 3. $\sqrt{74}$ 5. $2\sqrt{37}$ 7. 2 9. $-\frac{9}{2}$

17.



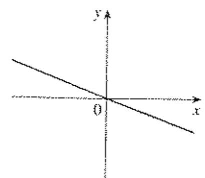
19.



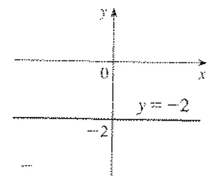
21. $y = 6x - 15$
23. $2x - 3y + 19 = 0$
25. $5x + y = 11$
27. $y = 3x - 2$
29. $y = 3x - 3$

31. $y = 5$ 33. $x + 2y + 11 = 0$ 35. $5x - 2y + 1 = 0$

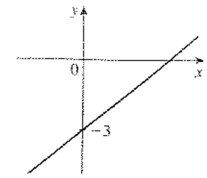
37. $m = -\frac{1}{3}$, $b = 0$



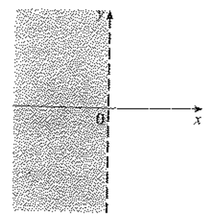
39. $m = 0$, $b = -2$



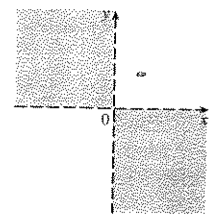
41. $m = \frac{3}{4}$, $b = -3$



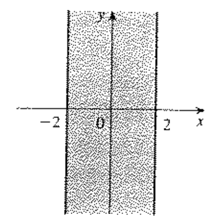
43.



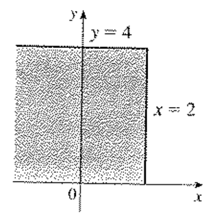
45.



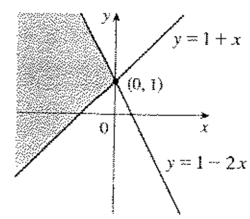
47.



49.



51.

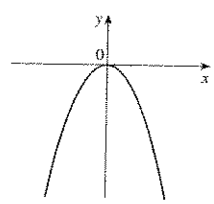


53. $(0, -4)$ 55. (a) $(4, 9)$ (b) $(3{,}5; -3)$ 57. $(1, -2)$
59. $y = x - 3$ 61. (b) $4x - 3y - 24 = 0$

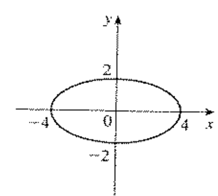
Exercícios C

1. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ 3. $x^2 + y^2 = 65$
5. $(2, -5), 4$ 7. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}$ 9. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \sqrt{10}/4$

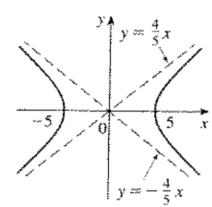
11. Parábola



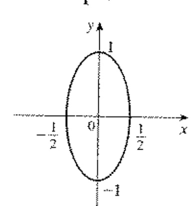
13. Elipse



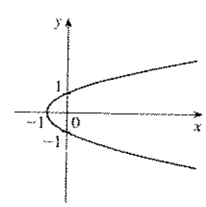
15. Hipérbole



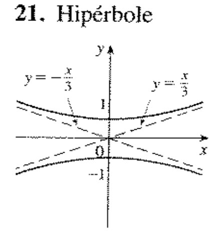
17. Elipse



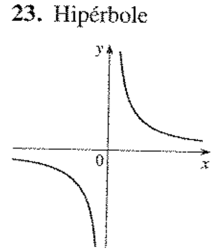
19. Parábola



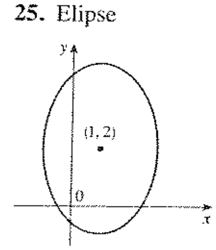
21. Hipérbole



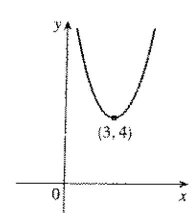
23. Hipérbole



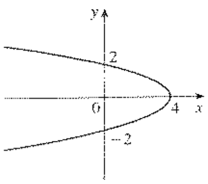
25. Elipse



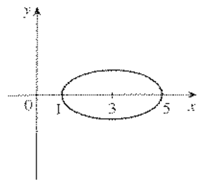
27. Parábola



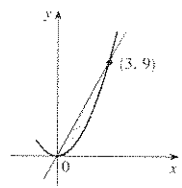
29. Parábola



31. Elipse

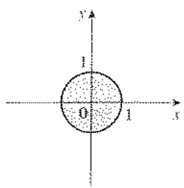


33.

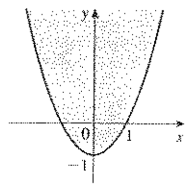


35. $y = x^2 - 2x$

37.



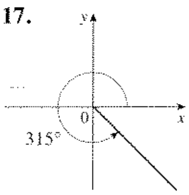
39.



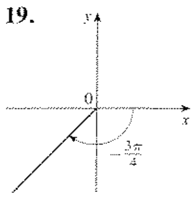
Exercícios D □

1. $7\pi/6$ **3.** $\pi/20$ **5.** 5π **7.** $720°$ **9.** $75°$
11. $-67{,}5°$ **13.** 3π cm **15.** $\frac{2}{3}$ rad $= (120/\pi)°$

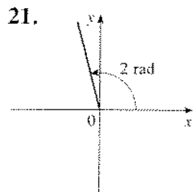
17.



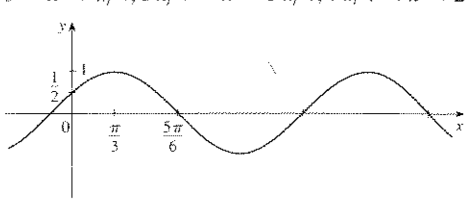
19.



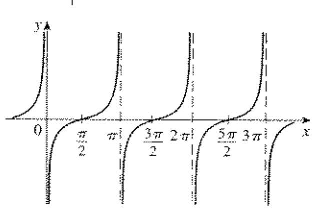
21.



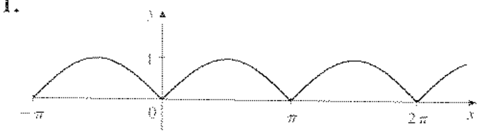
23. $\operatorname{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$, $\operatorname{cossec}(3\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sec(3\pi/4) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}(3\pi/4) = -1$
25. $\operatorname{sen}(9\pi/2) = 1$, $\cos(9\pi/2) = 0$, $\operatorname{cossec}(9\pi/2) = 1$, $\operatorname{cotg}(9\pi/2) = 0$, $\operatorname{tg}(9\pi/2)$ e $\sec(9\pi/2)$ indefinida
27. $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$; $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$; $\operatorname{tg}(5\pi/6) = -1\sqrt{3}$; $\operatorname{cossec}(5\pi/6) = -2$; $\sec(5\pi/6) = -2\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg}(5\pi/6) = -\sqrt{3}$
29. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cossec}\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cotg}\theta = \frac{4}{3}$
31. $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{5}/3$, $\cos\phi = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\phi = -\sqrt{5}/2$ $\operatorname{cossec}\phi = 3/\sqrt{5}$, $\operatorname{cotg}\phi = -2/\sqrt{5}$
33. $\operatorname{sen}\beta = -1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = -3/\sqrt{10}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\operatorname{cossec}\beta = -\sqrt{10}$, $\sec\beta = -\sqrt{10}/3$
35. 5,73576 cm **37.** 24,62147 cm **59.** $(4 + 6\sqrt{2})/15$
61. $(3 + 8\sqrt{2})/15$ **63.** $\frac{24}{25}$ **65.** $\pi/3, 5\pi/3$
67. $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ **69.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$
71. $0, \pi, 2\pi$ **73.** $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$ e $5\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$
75. $0 \leqslant x < \pi/4, 3\pi/4 < x < 5\pi/4, 7\pi/4 < x \leqslant 2\pi$
77.



79.



81.



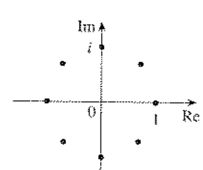
89. 14,34457 cm²

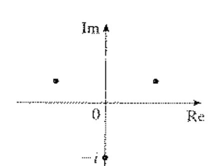
Exercícios E □

1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ **3.** $3^4 + 3^5 + 3^6$
5. $-1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$
7. $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$
9. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ **11.** $\sum_{i=1}^{10} i$
13. $\sum_{i=1}^{19} \frac{i}{i+1}$ **15.** $\sum_{i=1}^{n} 2i$
17. $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ **19.** $\sum_{i=1}^{n} x^i$
21. 80 **23.** 3.276 **25.** 0
27. 61 **29.** $n(n+1)$
31. $n(n^2 + 6n + 17)/3$ **33.** $n(n^2 + 6n + 11)/3$
35. $n(n^3 + 2n^2 - n - 10)/4$
41. (a) n^4 (b) $5^{100} - 1$ (c) $\frac{97}{300}$ (d) $a_n - a_0$
43. $\frac{1}{3}$ **45.** 14 **49.** $2^{n+1} + n^2 + n - 2$

Exercícios G □

1. $8 - 4i$ **3.** $13 - 18i$ **5.** $12 - 7i$
7. $\frac{11}{13} - \frac{10}{13}$ **9.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$
15. $12 + 5i$; 13 **17.** $4i$, 4
19. $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$ **23.** $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$
25. $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i\operatorname{sen}(3\pi/4)]$
27. $5\{\cos[\operatorname{tg}^{-1}\frac{4}{3}] + i\operatorname{sen}[\operatorname{tg}^{-1}\frac{4}{3}]\}$
29. $4[\cos(\pi/2) + i\operatorname{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i\operatorname{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i\operatorname{sen}(-\pi/6)]$
31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i\operatorname{sen}(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i\operatorname{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)]$
33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$
37. $\pm 1, \pm i, (1/\sqrt{2})(\pm 1, \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i, -i$





41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

Índice Analítico

D

E

F

G

H

I

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

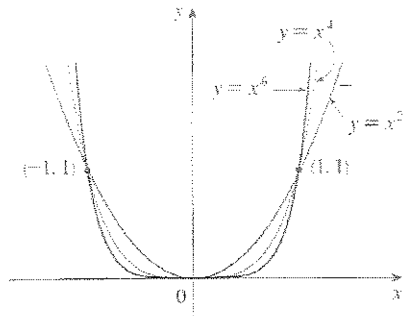
W

Z

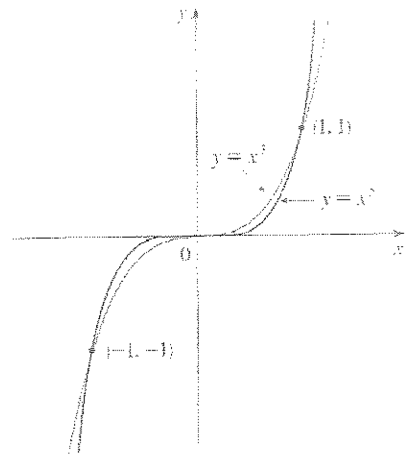
FUNÇÕES ESPECIAIS

FUNÇÕES POTÊNCIA $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n sendo um inteiro positivo

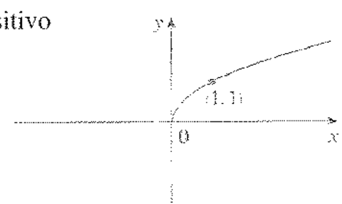


n par

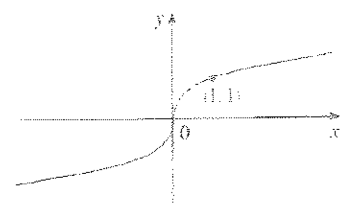


n ímpar

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n sendo um inteiro positivo

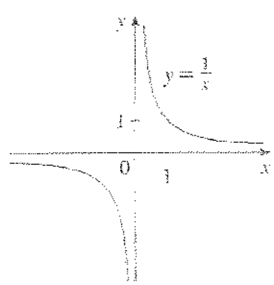


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

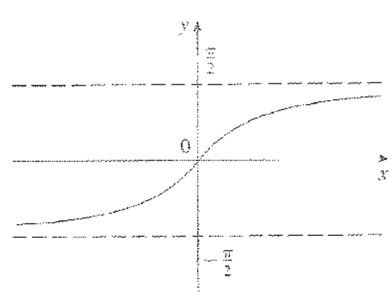


FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$

$\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg}^{-1} x = y \iff \operatorname{tg} y = x$ e $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$



$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

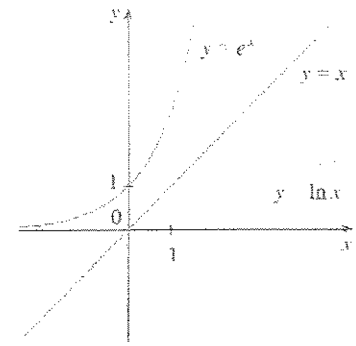
$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = \log_e x$, onde $\ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$



EQUAÇÕES DE CANCELAMENTO

$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$

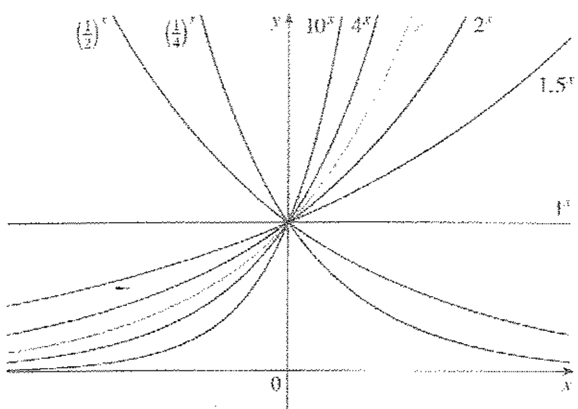
$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

LEIS DOS LOGARÍTMICOS

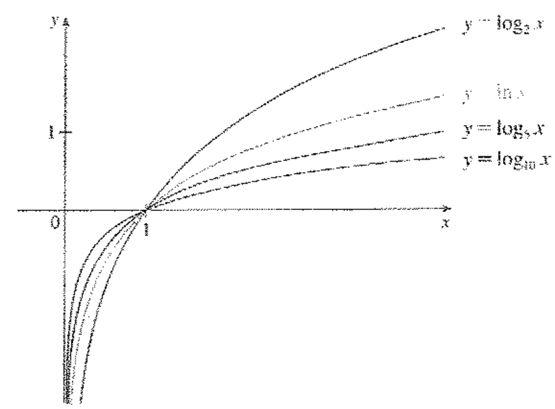
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$



Funções Exponenciais



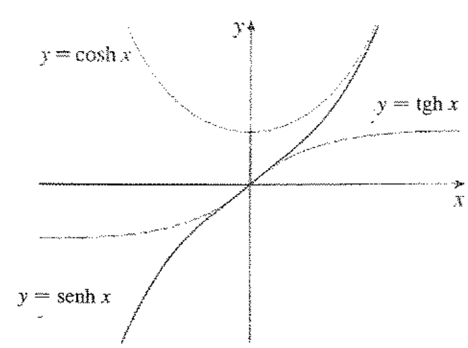
Funções Logarítmicas

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh}}{\cosh x} \qquad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh}}$



FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E INVERSAS

$y = \operatorname{senh}^{-1}x \iff \operatorname{senh} y = x \qquad \operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x$ e $y \geqslant 0 \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$y = \operatorname{tgh}^{-1}x \iff \operatorname{tgh} y = x \qquad \operatorname{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO

FÓRMULAS GERAIS

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regra do Produto)

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regra do Quociente)

7. $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da Cadeia)

8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regra da Potência)

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

13. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

16. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

17. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

18. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$

FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}$

22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$

29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$

30. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cossech}^2 x$

FUNÇÕES INVERSAS HIPERBÓLICAS

31. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$

34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$

TABELA DE INTEGRAIS

FORMAS BÁSICAS

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

9. $\int \operatorname{cossec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

10. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

11. $\int \operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cossec} u + C$

12. $\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

15. $\int \operatorname{cossec} u\,du = \ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

FORMAS ENVOLVENDO $\sqrt{a^2 + u^2},\ a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\int \dfrac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

FORMAS ENVOLVENDO $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

31. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

32. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

34. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

35. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

36. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\dfrac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

37. $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\dfrac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

38. $\int \dfrac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

FORMAS ENVOLVENDO $\sqrt{u^2 - a^2},\ a > 0$

39. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

40. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \dfrac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

41. $\int \dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\dfrac{a}{|u|} + C$

42. $\int \dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

43. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

44. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

45. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

46. $\int \dfrac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\dfrac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

TABELA DE INTEGRAIS

FORMAS ENVOLVENDO $a+bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a+bu-a\ln|a+bu|\right)+C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2-4a(a+bu)+2a^2\ln|a+bu|\right]+C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu}+C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C,\ \text{se } a>0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\ \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C,\quad \text{se } a<0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2}-na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)}-\frac{2na}{b(2n+1)}\int\frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}}-\frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int\frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

63. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2u\,du = \tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2u+C$

64. $\displaystyle\int \cos^2u\,du = \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2u+C$

65. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2u\,du = \mathrm{tg}\,u-u+C$

66. $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^2u\,du = -\mathrm{cotg}\,u-u+C$

67. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3u\,du = -\tfrac{1}{3}(2+\mathrm{sen}^2u)\cos u+C$

68. $\displaystyle\int \cos^3u\,du = \tfrac{1}{3}(2+\cos^2u)\,\mathrm{sen}\,u+C$

69. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3u\,du = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2u+\ln|\cos u|+C$

70. $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^3u\,du = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cotg}^2u-\ln|\mathrm{sen}\,u|+C$

71. $\displaystyle\int \sec^3u\,du = \tfrac{1}{2}\sec u\,\mathrm{tg}\,u+\tfrac{1}{2}\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|+C$

72. $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^3u\,du = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cossec}\,u\,\mathrm{cotg}\,u+\tfrac{1}{2}\ln|\mathrm{cossec}\,u-\mathrm{cotg}\,u|+C$

73. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^nu\,du = -\frac{1}{n}\mathrm{sen}^{n-1}u\cos u+\frac{n-1}{n}\int\mathrm{sen}^{n-2}u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^nu\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1}u\,\mathrm{sen}\,u+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}u\,du$

75. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^nu\,du = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{tg}^{n-1}u-\int\mathrm{tg}^{n-2}u\,du$

76. $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^nu\,du = \frac{-1}{n-1}\,\mathrm{cotg}^{n-1}u-\int\mathrm{cotg}^{n-2}u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^nu\,du = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{tg}\,u\sec^{n-2}u+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}u\,du$

78. $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^nu\,du = \frac{-1}{n-1}\,\mathrm{cotg}\,u\,\mathrm{cossec}^{n-2}u+\frac{n-2}{n-1}\int\mathrm{cossec}^{n-2}u\,du$

79. $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,au\,\mathrm{sen}\,bu\,du = \frac{\mathrm{sen}(a-b)u}{2(a-b)}-\frac{\mathrm{sen}(a+b)u}{2(a+b)}+C$

80. $\displaystyle\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\mathrm{sen}(a-b)u}{2(a-b)}+\frac{\mathrm{sen}(a+b)u}{2(a+b)}+C$

81. $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,au\cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)}-\frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)}+C$

82. $\displaystyle\int u\,\mathrm{sen}\,u\,du = \mathrm{sen}\,u-u\cos u+C$

83. $\displaystyle\int u\cos u\,du = \cos u+u\,\mathrm{sen}\,u+C$

84. $\displaystyle\int u^n\,\mathrm{sen}\,u\,du = -u^n\cos u+n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\,\mathrm{sen}\,u-n\int u^{n-1}\,\mathrm{sen}\,u\,du$

86. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^nu\cos^mu\,du = -\frac{\mathrm{sen}^{n-1}u\cos^{m+1}u}{n+m}+\frac{n-1}{n+m}\int\mathrm{sen}^{n-2}u\cos^mu\,du$

$\displaystyle\qquad = \frac{\mathrm{sen}^{n+1}u\cos^{m-1}u}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}\int\mathrm{sen}^nu\cos^{m-2}u\,du$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \operatorname{tg}^{-1} u\, du = u \operatorname{tg}^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \dfrac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u \cos^{-1} u\, du = \dfrac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u \operatorname{tg}^{-1} u\, du = \dfrac{u^2+1}{2} \operatorname{tg}^{-1} u - \dfrac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \dfrac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \dfrac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

95. $\int u^n \operatorname{tg}^{-1} u\, du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1} \operatorname{tg}^{-1} u - \int \dfrac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right],\ n \neq -1$

FORMAS EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

96. $\int ue^{au}\, du = \dfrac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\, du = \dfrac{1}{a}u^n e^{au} - \dfrac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du$

98. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

100. $\int \ln u\, du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\, du = \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \dfrac{1}{u\ln u}\, du = \ln|\ln u| + C$

FORMAS HIPERBÓLICAS

103. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\int \operatorname{tgh} u\, du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \operatorname{cotgh} u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{tg}^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\int \operatorname{cossech} u\, du = \ln\left|\operatorname{tgh} \frac{1}{2}u\right| + C$

109. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u + C$

110. $\int \operatorname{cossech}^2 u\, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

111. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\int \operatorname{cossech} u \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cossec} u + C$

FORMAS ENVOLVENDO $\sqrt{2au-u^2}$, $a>0$

113. $\int \sqrt{2au-u^2}\, du = \dfrac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\int u\sqrt{2au-u^2}\, du = \dfrac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \dfrac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\int \dfrac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\int \dfrac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\, du = -\dfrac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\int \dfrac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\int \dfrac{u\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

119. $\int \dfrac{u^2\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\dfrac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \dfrac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\dfrac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$