CAPÍTULO 1
1.4 Exercícios — pág 18
(1 a 11)

Observação para o leitor: os gráficos apresentados foram construídos em softwares livres. Em geral os de duas dimensões foram realizados com o Graph (http://www.padowan.dk) e os gráficos de três dimensões com o Winplot (http://math.exeter.edu/rparris).

1. Encontrar uma função de várias variáveis que nos dê:

a) O comprimento de uma escada apoiada como na figura 1.35.

$$H^2 + L^2 = C^2$$
$$C = \sqrt{H^2 + L^2}$$
$$C(H, L) = \sqrt{H^2 + L^2}\ .$$

b) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.

$$V(x, y) = \pi x^2 y\ .$$

c) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b.

$$f(a, b) = 2a + 2b\ .$$

d) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros.

$$f(x, y, z) = 2yz + 2xz\ .$$

e) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensão x, y e z.

$$V(x, y, z) = x\,y\,z\ .$$

f) A distância entre dois pontos $P(x, y, z)$ e $Q(u, v, w)$.

$$d((x, y, z),(u, v, w)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}\ .$$

g) A temperatura nos pontos de uma esfera se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual à distância do ponto ao centro da esfera.

Para uma esfera centrada em (x_0, y_0, z_0) temos:
$T(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

2. Uma loja vende certo produto P de duas marcas distintas A e B. A demanda do produto com marca A depende do seu preço e do preço da marca competitiva B. A demanda do produto com marca A é
$D_A = 1300 - 50x + 20y$ unidades/mês
e do produto com marca B é
$D_B = 1700 + 12x - 20y$ unidades/mês
onde x é o preço do produto A e y é o preço do produto B.

   Escrever uma função que expresse a receita total mensal da loja, obtido com a venda do produto P.

Receita = (número de unidades A por mês) x + (número de unidades B por mês) y

$$\begin{aligned} R(x,y) &= (1300 - 50x + 20y)x + (1700 + 12x - 20y)y \\ &= 1300x - 50x^2 + 20xy + 1700y + 12xy - 20y^2 \\ &= 1300x + 1700y - 50x^2 - 20y^2 + 32xy. \end{aligned}$$

3. Determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $z = 3 - x - y$

$D(z) = \Re^2$
$\text{Im}(z) = \Re$

b) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

$D(f) = \Re^2$
$\text{Im}(f) = [1, \infty)$

c) $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$
Temos que:
$9 - (x^2 + y^2) \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 9$
Assim,

$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$
$\mathrm{Im}(z) = [0,3]$

d) $w = e^{x^2+y^2+z^2}$

$D(w) = \Re^3$
$\mathrm{Im}(w) = [1,+\infty)$

e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Temos que:
$x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$
Assim,
$D(f) = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\} = \Re^3$
$\mathrm{Im}(f) = [0, \infty) = \Re_+$

f) $f(x, y) = 2x + 5y - 4$
$D(f) = \Re^2$
$\mathrm{Im}(f) = \Re$

g) $z = x^2 + y^2 - 2$
$D(z) = \Re^2$
$\mathrm{Im}(z) = [-2,+\infty)$

h) $f(x, y) = 2x^2 + 5y$
$D(f) = \Re^2$
$\mathrm{Im}(f) = \Re$

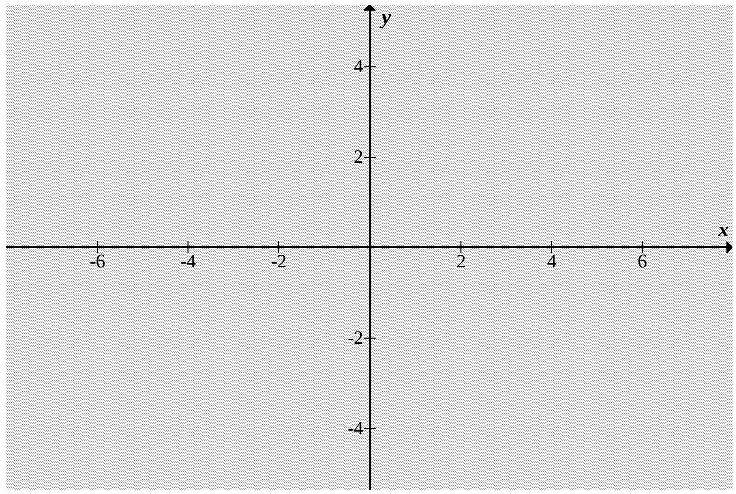
i) $w = 4 + x^2 + y^2$
$D(w) = \Re^2$
$\mathrm{Im}(w) = [4,+\infty)$

j) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
$D(f) = \Re^2$
$\mathrm{Im}(f) = (-\infty,4]$

4. Determinar o domínio das seguintes funções e representar graficamente:

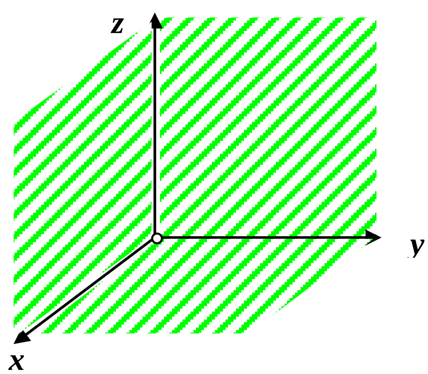
a) $z = xy$

$D(z) = \Re^2$



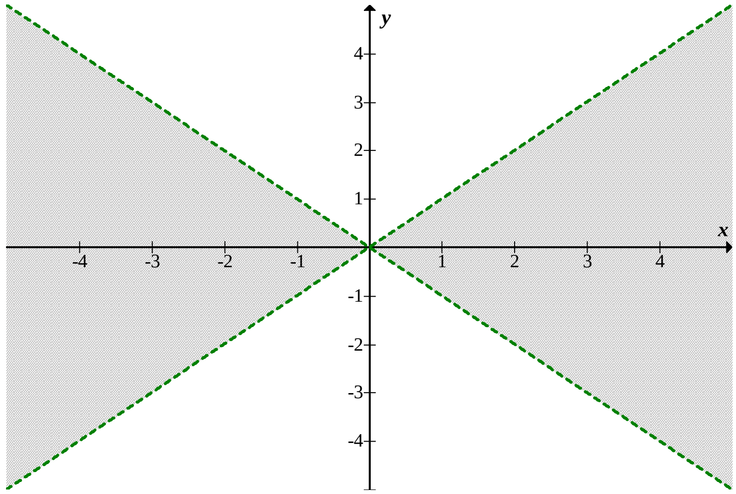
b) $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

$D(w) = \{(x, y, z) \in \Re^3 / (x, y, z) \neq (0,0,0)\}$



c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 / x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \Re^2 / |x| > |y|\}$

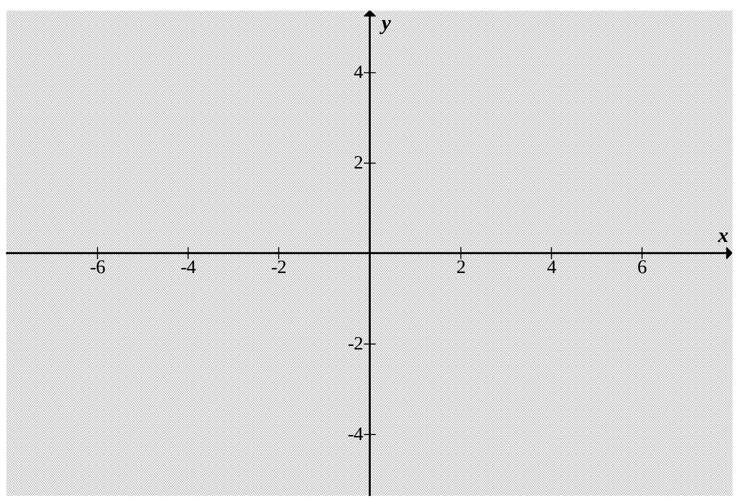


d) $z = \dfrac{x}{y^2 + 1}$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y^2 + 1 \neq 0\}$$

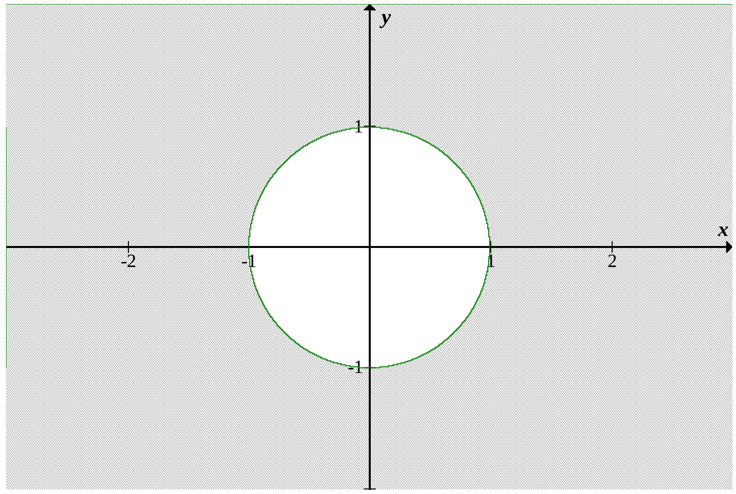
Como $y^2 + 1$ é sempre $\neq 0$, temos que:

$D(z) = \Re^2$



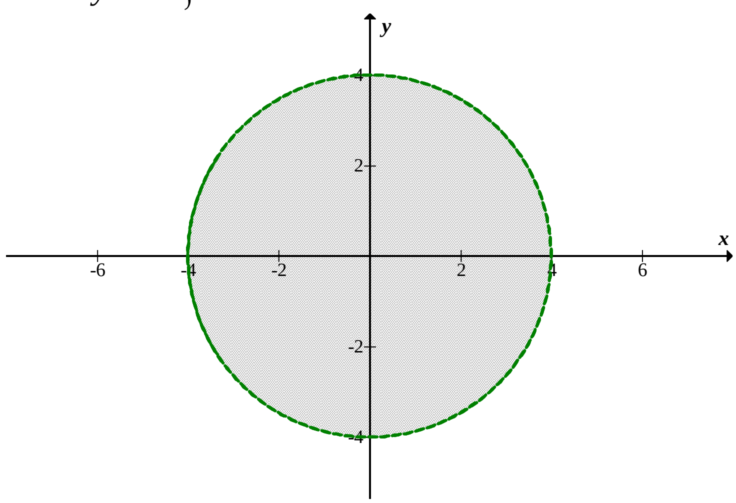
e) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

$$\begin{aligned} D(z) &= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 - 1 \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq 1\} \end{aligned}$$



f) $z = \ln\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$$D(z) = \left\{(x, y) \in \Re^2 / 4 - \sqrt{x^2 + y^2} > 0\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 < 16\right\}$$

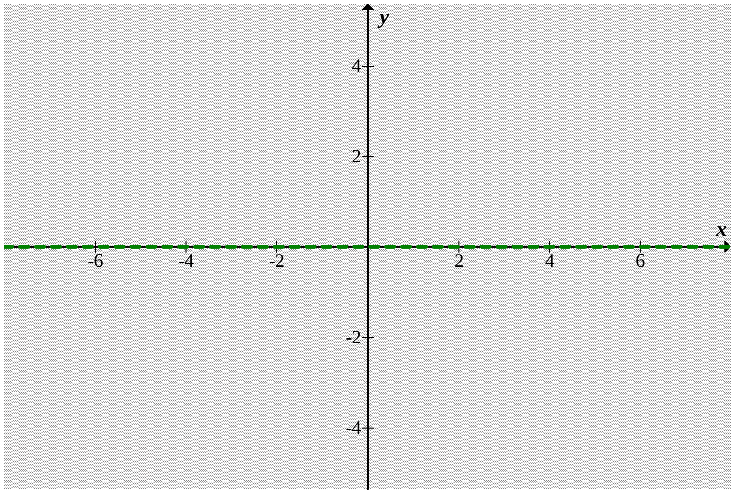


g) $z = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$

$$D(z) = \left\{(x, y) \in \Re^2 / (x, y) \neq (x, 0)\ com\ x \in \Re\right\}$$

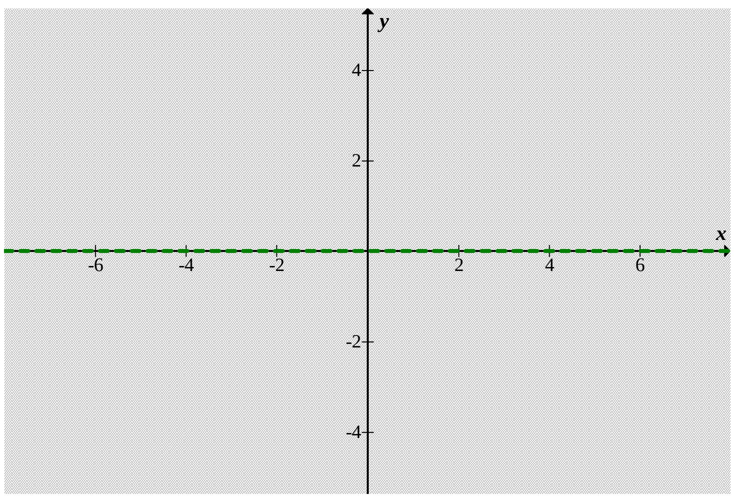
ou

$\Re^2$ - conjunto dos pontos do eixo dos *x*.



h) $z = e^{\frac{x}{y}}$

$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y \neq 0\}$

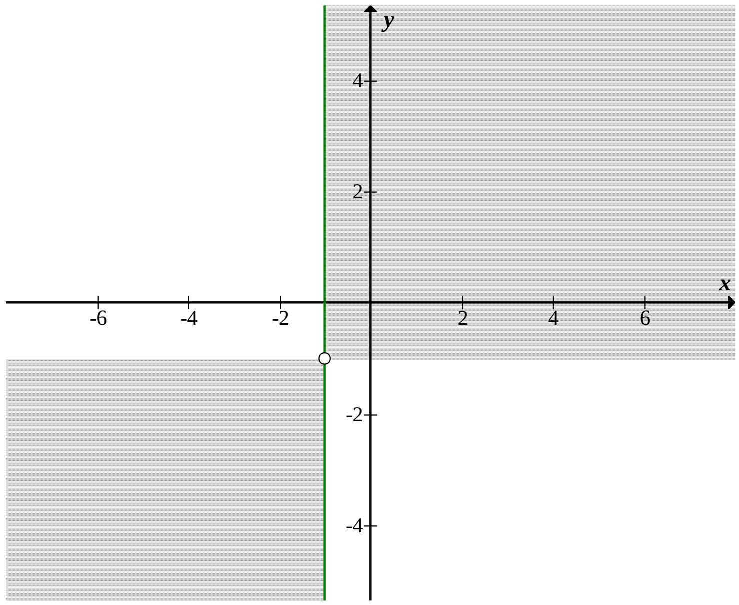


i) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+z}}$

$D(y) = \left\{(x, y) \in \Re^2 \,/\, \dfrac{1+x}{1+z} \geq 0 \;\; e \;\; 1+z \neq 0\right\}$

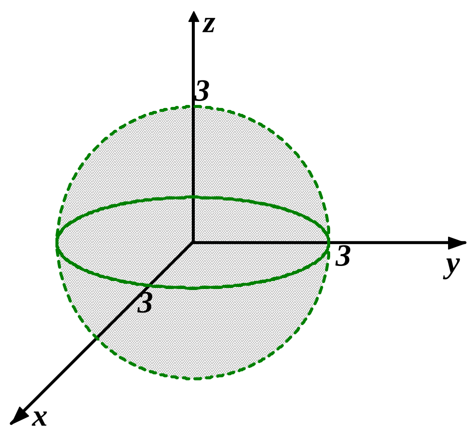
1° caso: $1+x \geq 0 \;\; e \;\; 1+z > 0$
2° caso: $1+x \leq 0 \;\; e \;\; 1+z < 0$

Logo: 1) $x \geq -1 \;\; e \;\; z > -1$ ou
2) $x \leq -1 \;\; e \;\; z < -1$



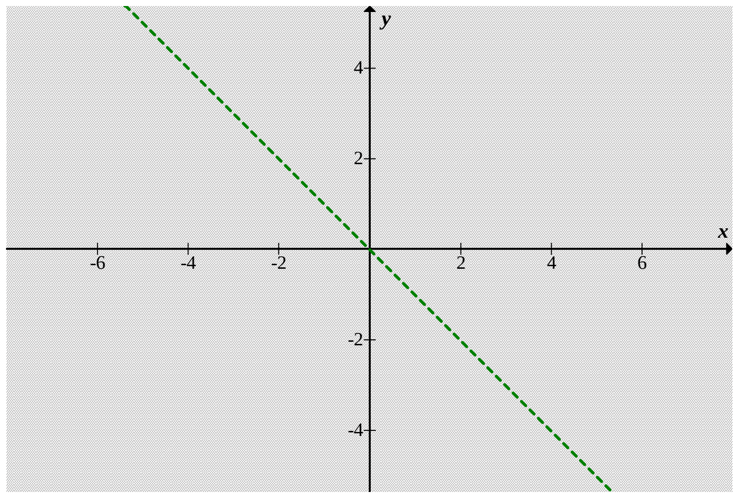
j) $w = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

$$D(w) = \{(x, y, z) \in \Re^3 / 9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\}$$
$$= \{(x, y, z) \in \Re^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$$



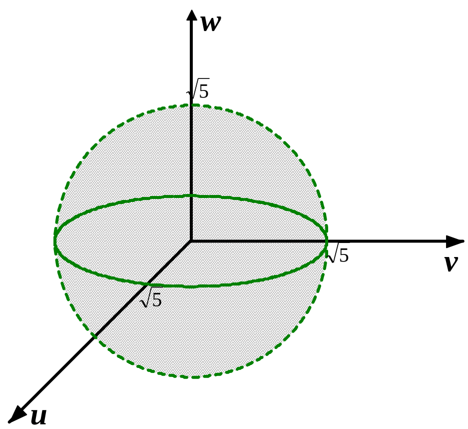
k) $z = \dfrac{4}{x + y}$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 / y \neq -x\}$$



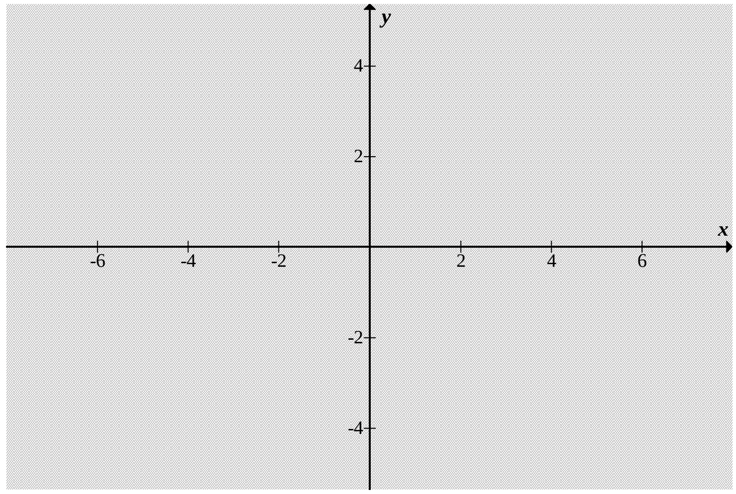
l) $z = \sqrt{5 - u^2 - v^2 - w^2}$

$$D(z) = \{(u, v, w) \in \Re^3 / 5 - u^2 - v^2 - w^2 \geq 0\}$$
$$= \{(u, v, w) \in \Re^3 / u^2 + v^2 + w^2 \leq 5\}$$



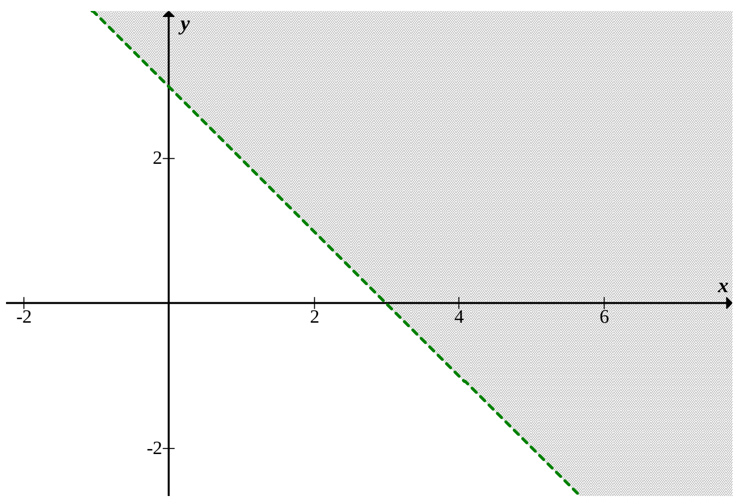
m) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

$$D(f) = \Re^2$$



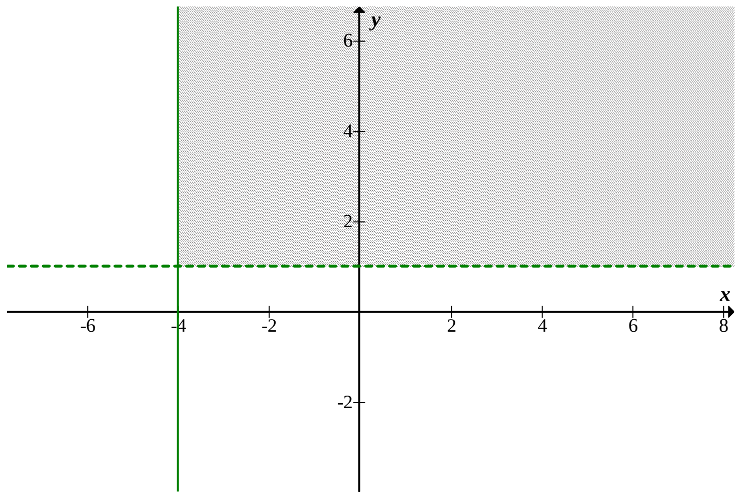
n) $z = \ln(x + y - 3)$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x + y - 3 > 0\}$$
$$= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x + y > 3\}$$



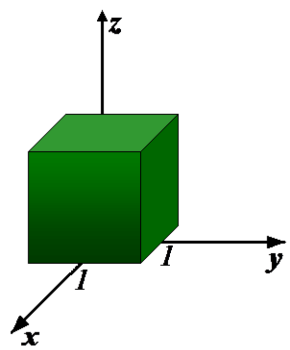
o) $z = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{y-1}}$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x + 4 \geq 0 \;\; e \;\; y - 1 > 0\}$$
$$= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x \geq -4 \;\; e \;\; y > 1\}$$



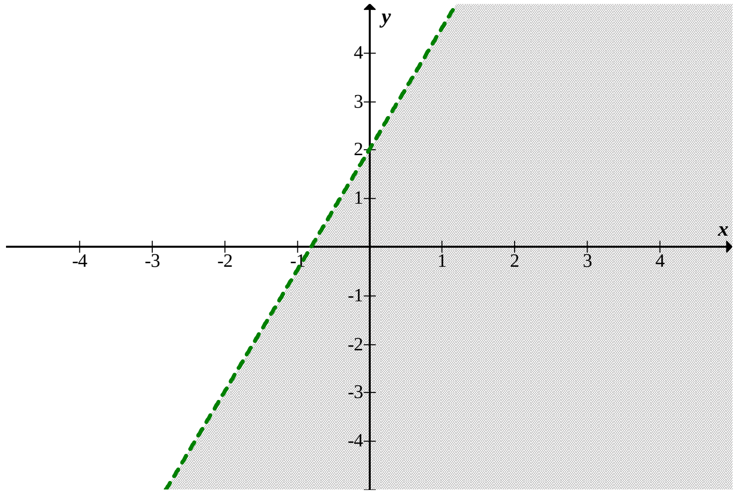
p) $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-z^2}$

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/ 1-x^2 \geq 0 \,,\, 1-y^2 \geq 0 \;\; e \;\; 1-z^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/ (1-x)(1+x) \geq 0 \,,\, (1-y)(1+y) \geq 0 \;\; e \;\; (1-z)(1+z) \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/ (x-1)(x+1) \leq 0 \,,\, (y-1)(y+1) \leq 0 \;\; e \;\; (z-1)(z+1) \leq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/ -1 \leq x \leq 1 \,,\, -1 \leq y \leq 1 \;\; e \;\; -1 \leq z \leq 1\} \end{aligned}$$



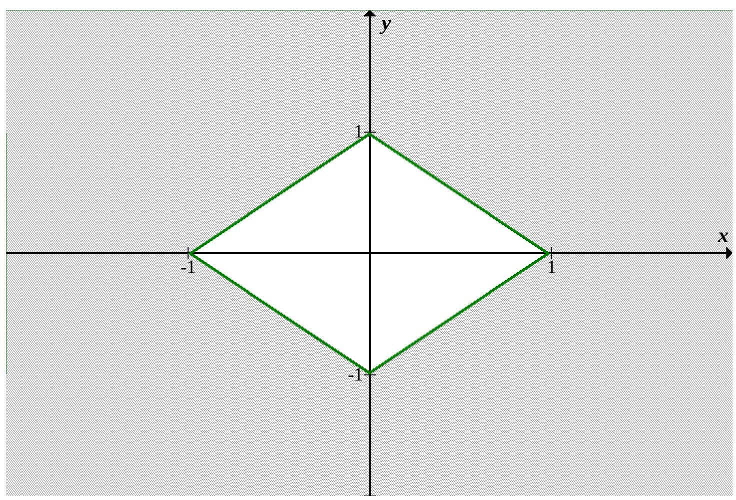
q) $z = \ln(5x - 2y + 4)$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \mid 5x - 2y + 4 > 0\}$$



r) $z = \sqrt{|x| + |y| - 1}$

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \mid |x| + |y| - 1 \geq 0\}$$
$$= \{(x, y) \in \Re^2 \mid |x| + |y| \geq 1\}$$



5. A partir da equação dada, definir 2 funções de duas variáveis, determinando seu domínio.

Obs.: podemos obter outras respostas.

a) $y^2 = x^2(9 - x^2) + z$

$$z = y^2 - x^2(9 - x^2)$$
$$y = \sqrt{x^2(9 - x^2) + z}$$

$$D(z) = \Re^2$$
$$D(y) = \{(x, z) \in \Re^2 \mid z \geq x^2(x^2 - 9)\}$$

b) $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

$$z_1 = \sqrt{9 - x^2 - (y-3)^2}$$
$$z_2 = -\sqrt{9 - x^2 - (y-3)^2}$$

$$D(z_1) = D(z_2) = \{(x, y) \in \Re^2 \mid 9 - x^2 - (y-3)^2 \geq 0\}$$
$$= \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$$

c) $l^2 = m^2 + n^2$

$$l_1 = \sqrt{m^2 + n^2}$$
$$l_2 = -\sqrt{m^2 + n^2}$$

$$D(l_1) = D(l_2) = \Re^2$$

6. Dada a função $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2x + y}$:

a) Dar o domínio:

$$D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \mid 2x + y \neq 0\} :$$

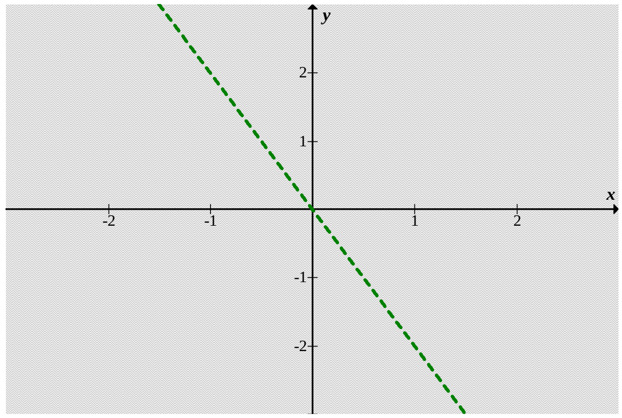
b) Calcular $f(x + \Delta x, y)$

$$f(x + \Delta x, y) = \frac{x + \Delta x + y}{2(x + \Delta x) + y} = \frac{x + \Delta x + y}{2x + 2\Delta x + y}$$

c) Calcular $f(-1,0)$

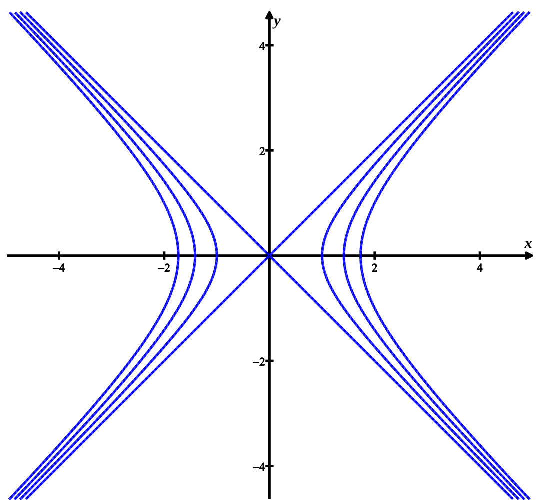
$$f(-1,0) = \frac{-1 + 0}{2(-1) + 0} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} :$$

d) Fazer um esboço gráfico do domínio:

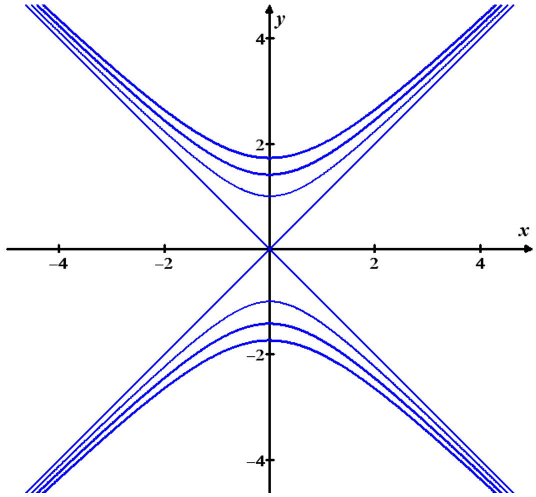


7. Desenhar as curvas de nível C_k para os valores de k dados.

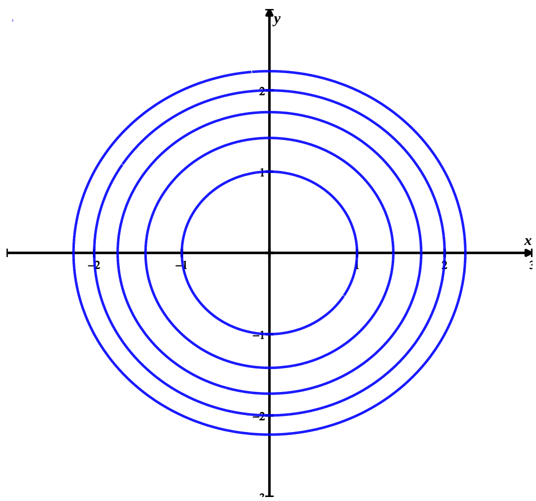
a) $z = x^2 - y^2 \quad ; \quad k = 0,1,2,3$



b) $z = y^2 - x^2 \;\; ; \;\; k = 0,1,2,3$

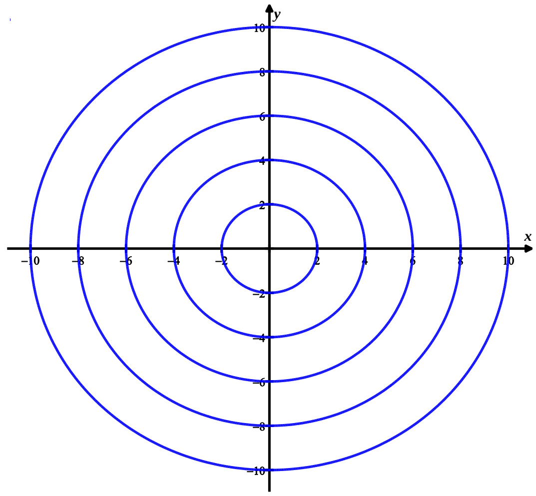


c) $z = 2 - \left(x^2 + y^2\right)$; $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$



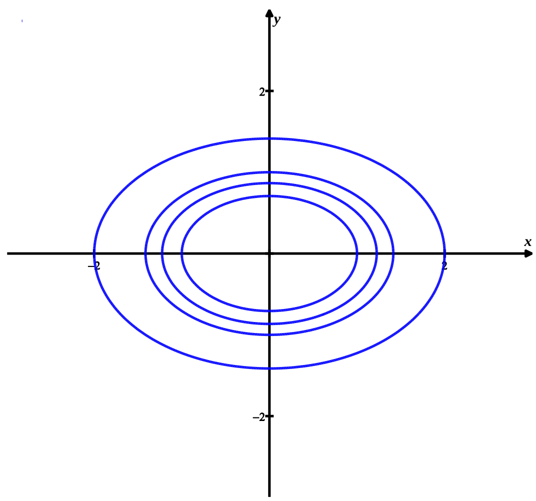
Observamos que para *k=2*, temos uma curva degenerada (*x=y=0)*.

d) $l = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

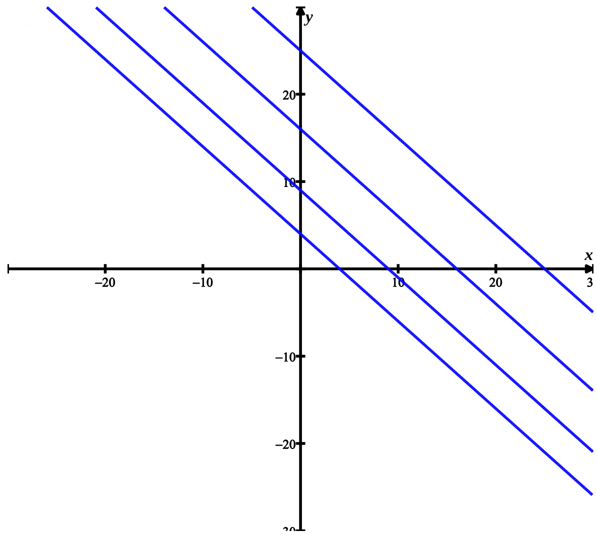


Observamos que para $k=0$ temos uma curva de nível degenerada ($m=n=0$).

e) $f(x,y)=2x^2+4y^2$; $k=2,3,4,8$



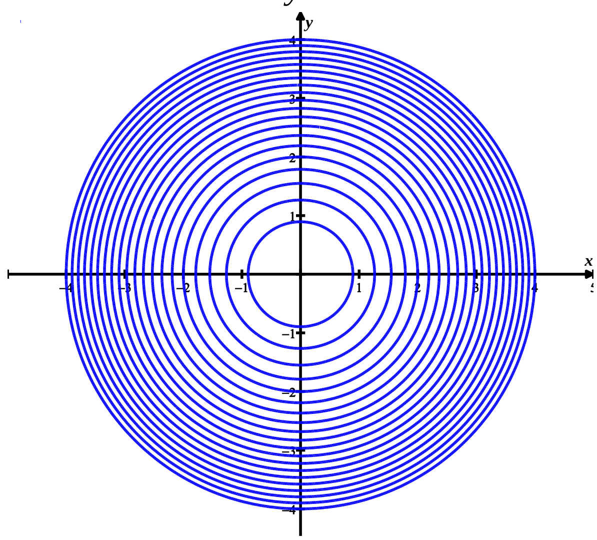
f) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$; $k=5,4,3,2$



Nos exercícios 8 a 10, o conjunto S representa uma chapa plana, e $T(x,y)$, a temperatura nos pontos da chapa. Determinar as isotermas, representando-as geometricamente

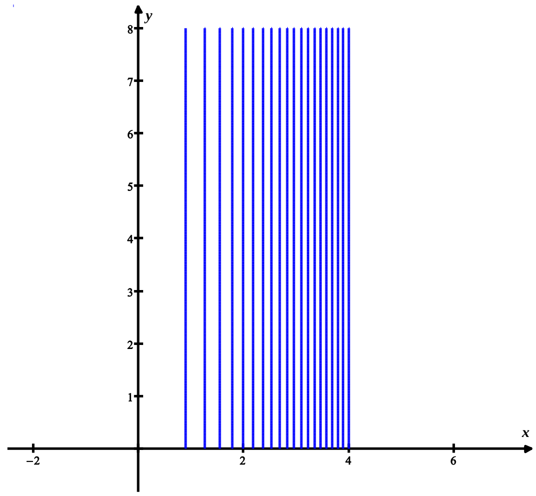
8- $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$; $T(x,y) = x^2 + y^2$

Resposta: circunferências concêntricas $x^2 + y^2 = k \ \ com \ \ 0 \leq k \leq 16$



9 - $S = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 4 \ , \ 0 \leq y \leq 8\}$; $T(x,y) = 4 - x^2$

Resposta: segmentos de retas verticais $x = \sqrt{4-k}$, $-12 \leq k \leq 4$



10- $S=\{(x,y)/\, x^2+y^2\leq 25\}$; $T(x,y)=2(4-x^2-y^2)$

$$2(4-x^2-y^2)=k$$

$$4-x^2-y^2=\frac{k}{2}$$

$$x^2+y^2=4-\frac{k}{2}$$

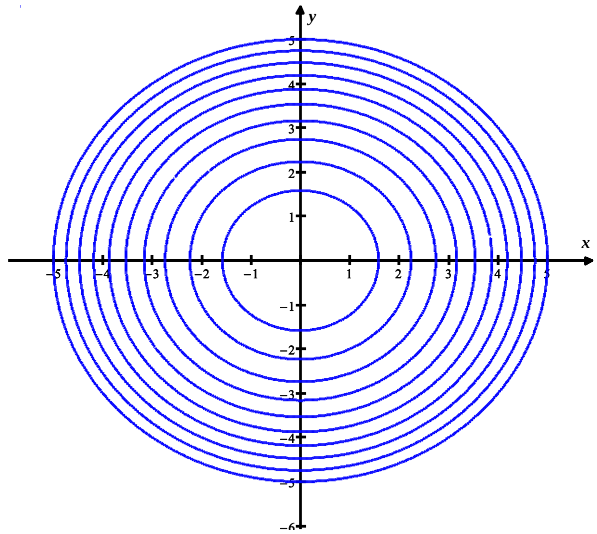
$$0\leq 4-\frac{k}{2}\leq 25$$

$$0\leq 8-k\leq 50$$

$$-8\leq -k\leq 42$$

$$8\geq k\geq -42$$

$$-42\leq k\leq 8$$

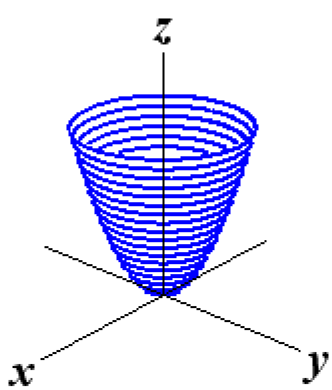


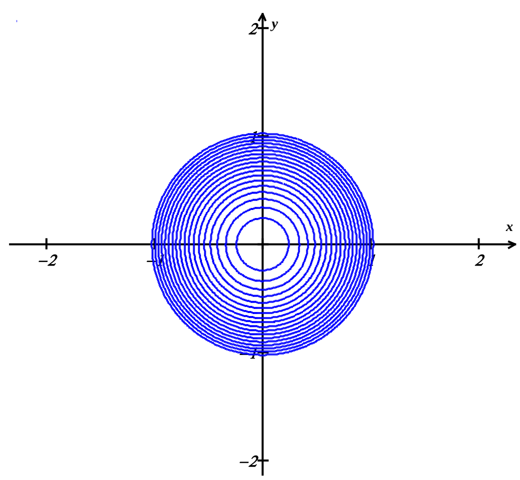
Resposta: circunferências concêntricas $x^2 + y^2 = 4 - \frac{k}{2}$, $-42 \le k \le 8$; para $k=8$, temos uma curva de nível degenerada ($x=y=0$).

11. Desenhar algumas curvas de nível e esboçar o gráfico dos seguintes parabolóides.

a) $z = 2x^2 + 2y^2$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

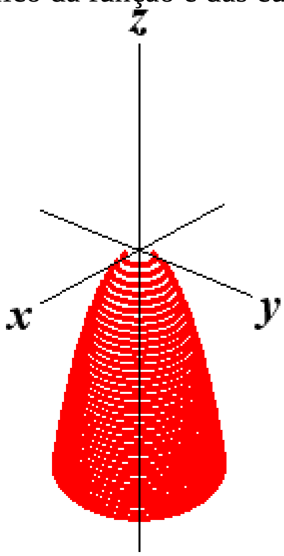
$$2 = 2x^2 + 2y^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

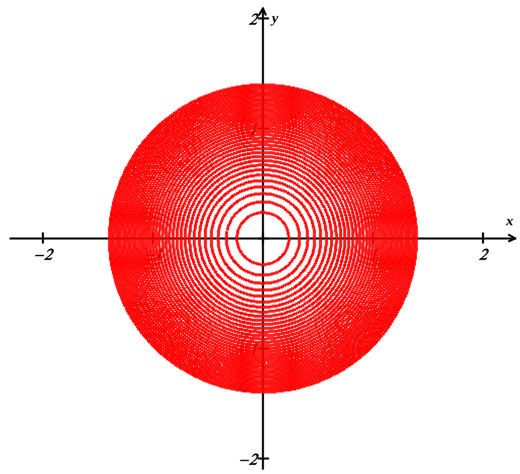
e

$$1 = 2x^2 + 2y^2$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

b) $z = -2x^2 - 2y^2$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

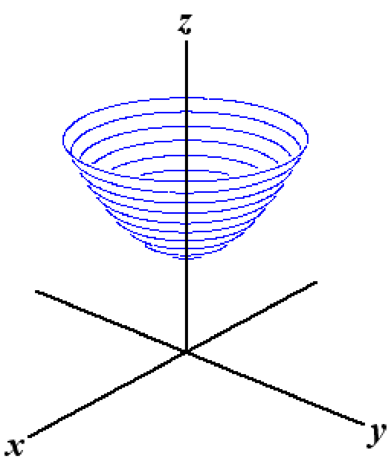
$$-2 = -2x^2 - 2y^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

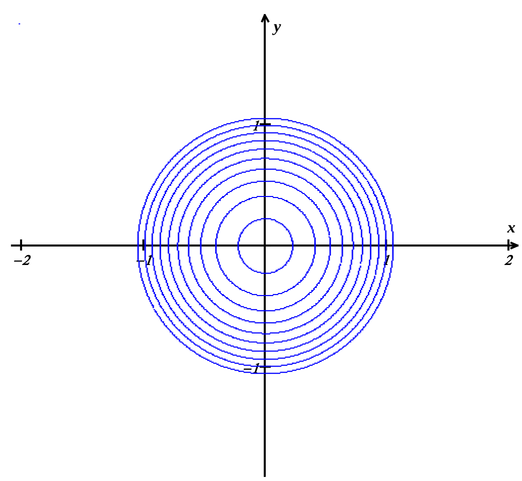
e

$$-1 = -2x^2 - 2y^2$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

c) $z = x^2 + y^2 + 1$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

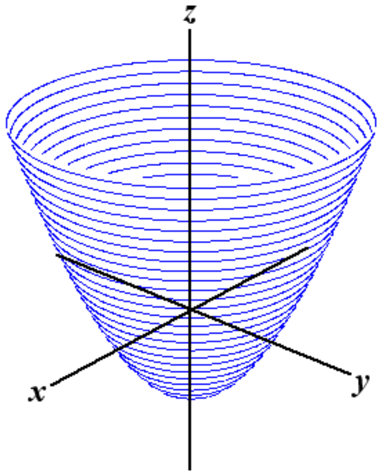
$$x^2 + y^2 + 1 = 2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

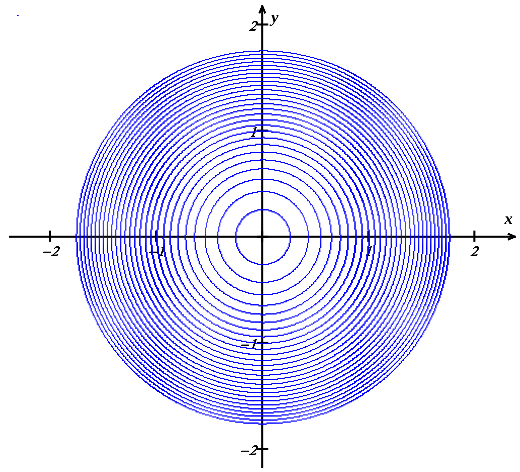
e

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{3}{2}$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

d) $z = x^2 + y^2 - 1$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

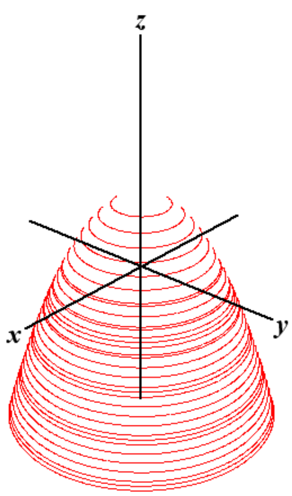
$x^2 + y^2 - 1 = 2$, $x^2 + y^2 = 3$,

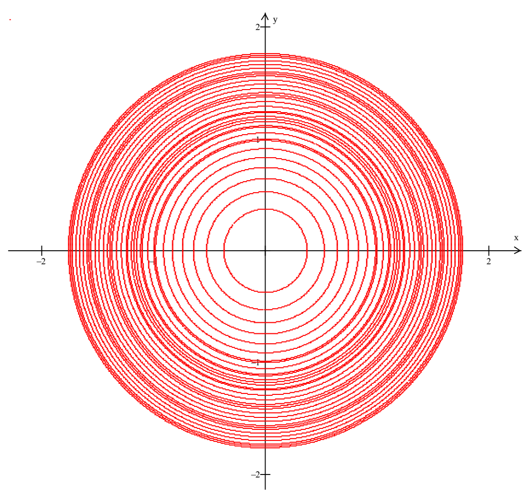
$x^2 + y^2 - 1 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ e

$x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

e) $z = 1 - x^2 - y^2$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

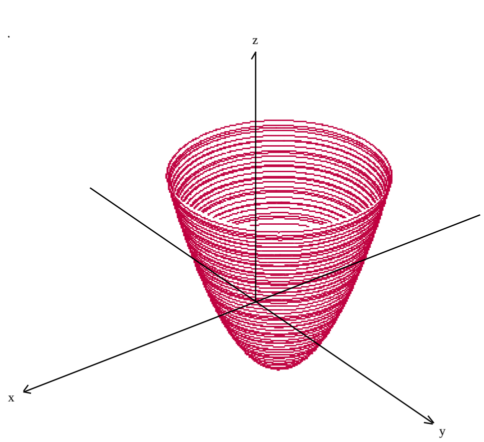
$1 - x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$,

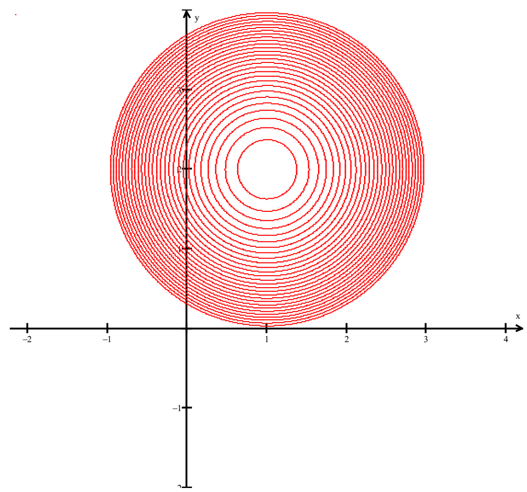
$1 - x^2 - y^2 = -1$, $x^2 + y^2 = 2$ e

$1 - x^2 - y^2 = -2$, $x^2 + y^2 = 3$

f) $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





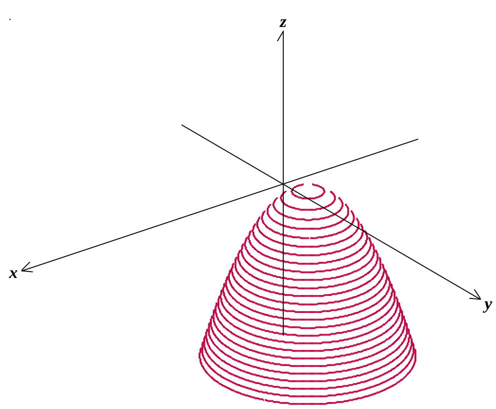
Exemplos de curvas de níveis

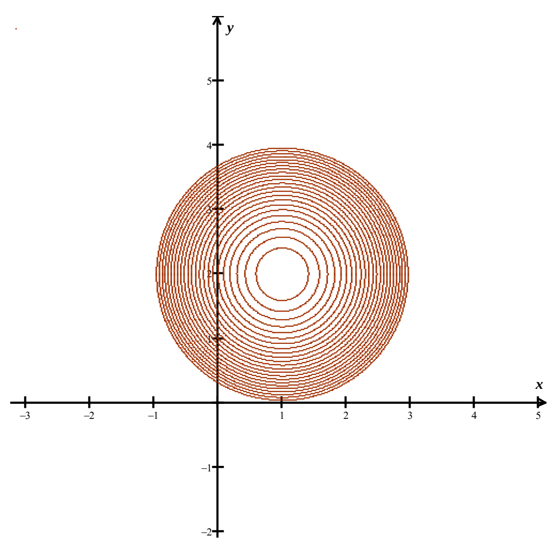
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

g) $z = 1-(x-1)^2 - (y-2)^2$

Gráfico da função e das curvas de nível.





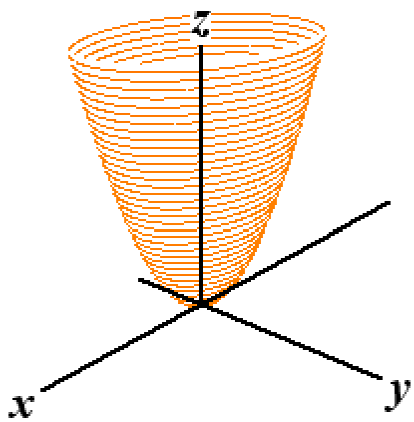
Exemplos de curvas de níveis

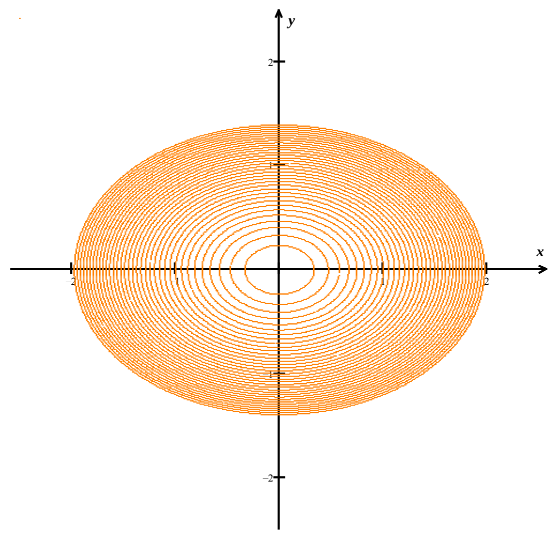
$$-2 = 1 - (x-1)^2 - (y-2)^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$0 = 1 - (x-1)^2 - (y-2)^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

h) $z = x^2 + 2y^2$

Gráfico da função e das curvas de níveis.





Exemplos de curvas de níveis

$$1 = x^2 + 2y^2$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

e

$$4 = x^2 + 2y^2$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

CAPÍTULO 1
1.4 Exercícios – pág. 18 – Continuação
(de 13 até 17- final)

12. Escrever a função que representa o parabolóide circular das figuras 1.36, 1.37 e 1.38.

Para a figura 1.36 temos um parabolóide com concavidade para cima e vértice na origem. Como *z(0,3)=4*, usando a equação $z = c\left(x^2 + y^2\right)$, obtemos $c = \dfrac{4}{3}$. Logo,

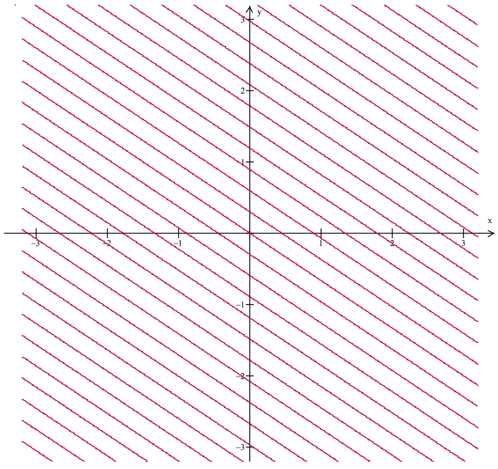
$z = \dfrac{4}{9}\left(x^2 + y^2\right)$.

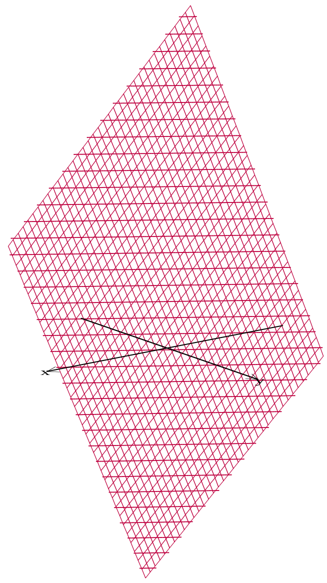
Para a figura 1.37 temos $z = 4 - \dfrac{4}{9}\left(x^2 + y^2\right)$, pois o vértice do parabolóide está no ponto $(0,0,4)$ e o mesmo tem a concavidade para baixo. Usando a equação $z = 4 - c\left(x^2 + y^2\right)$, obtemos $c = \dfrac{4}{9}$.

Para a figura 1.38 temos $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{18}\left(x^2 + y^2\right)$, pois o parabolóide tem o vértice no ponto $(0,0,3/2)$; está virado para cima e tem curva de nível para $z = 4$ igual a $x^2 + y^2 = 9$. Usando as equações $z = \dfrac{3}{2} + c\left(x^2 + y^2\right)$ e *z(0,3)=4*, obtém-se $c = \dfrac{5}{18}$.

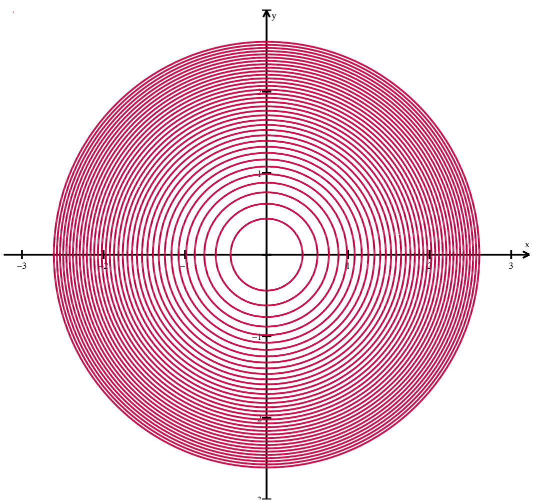
13. Desenhar algumas curvas de nível e esboçar o gráfico:

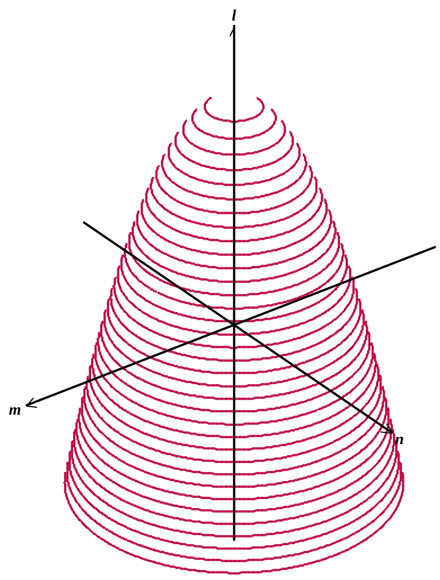
a) $z = 3 - 2x - 3y$



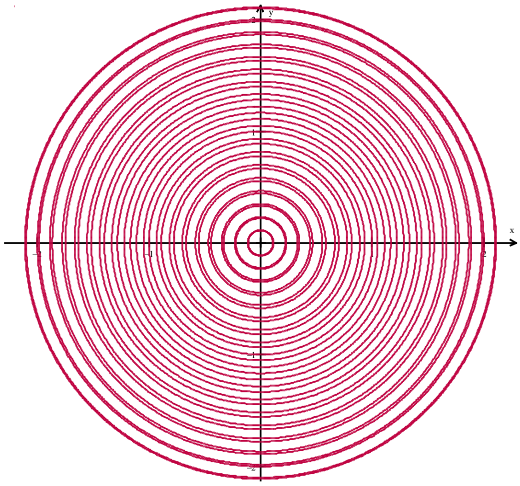


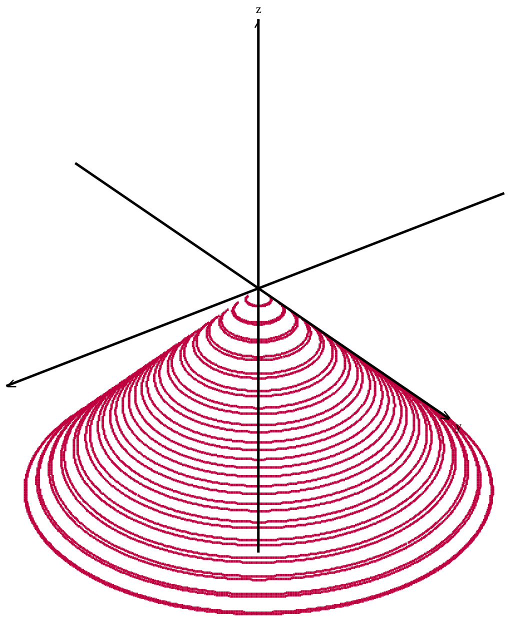
b) $l = 4 - m^2 - n^2$



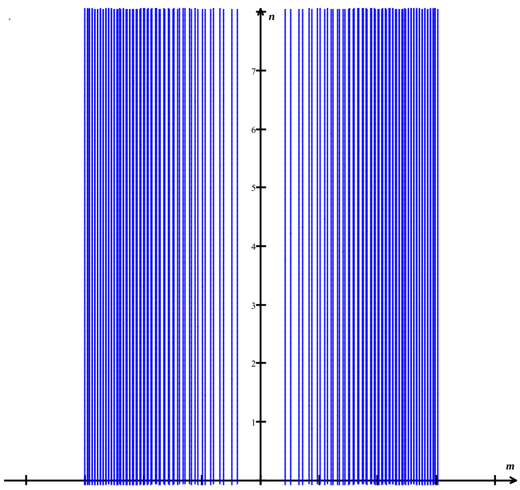


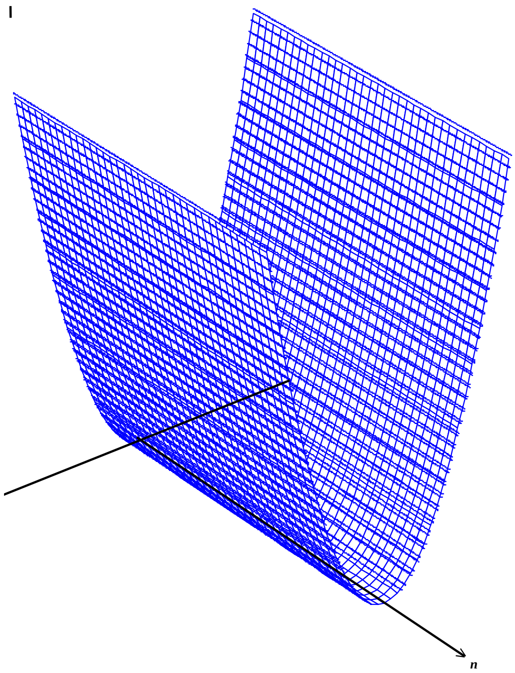
c) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



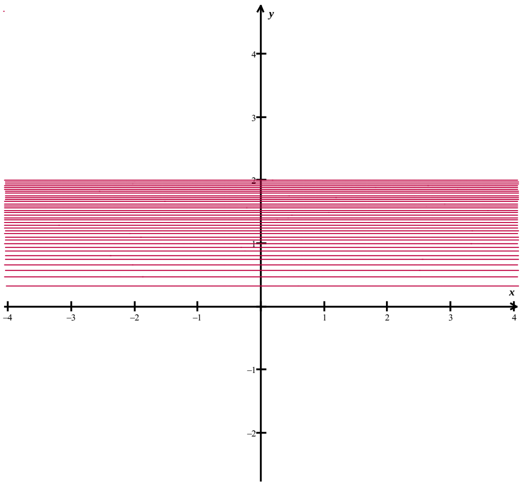


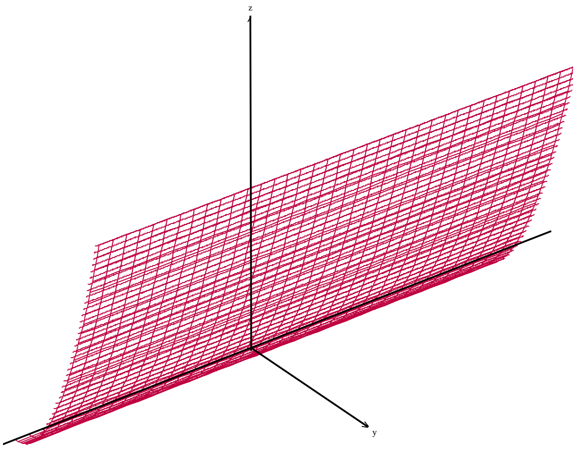
d) $l = m^2, 0 \leq n \leq 8$



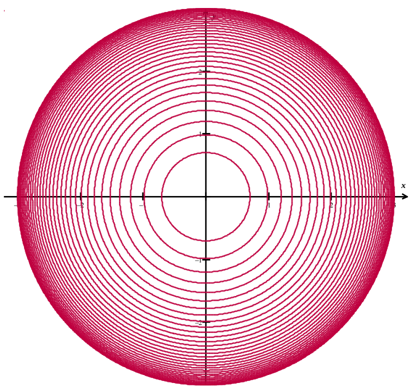


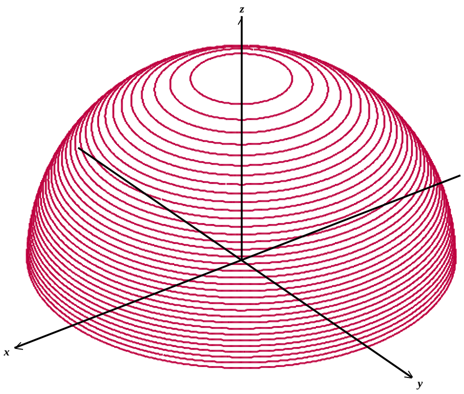
e) $z = y^2, -4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$



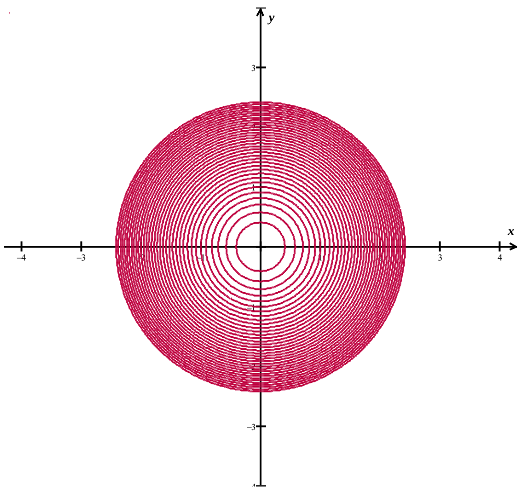


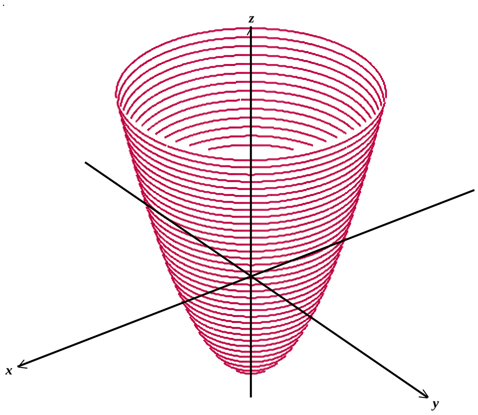
f) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



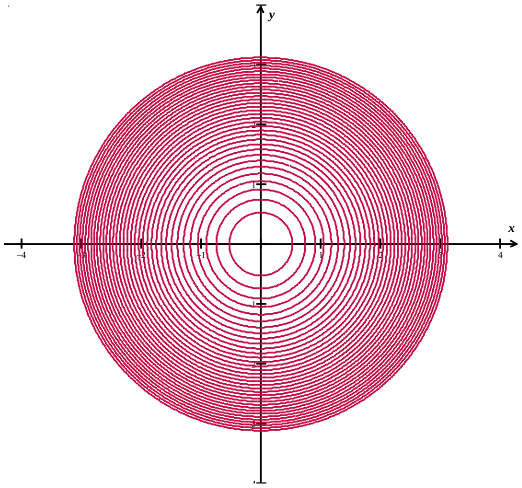


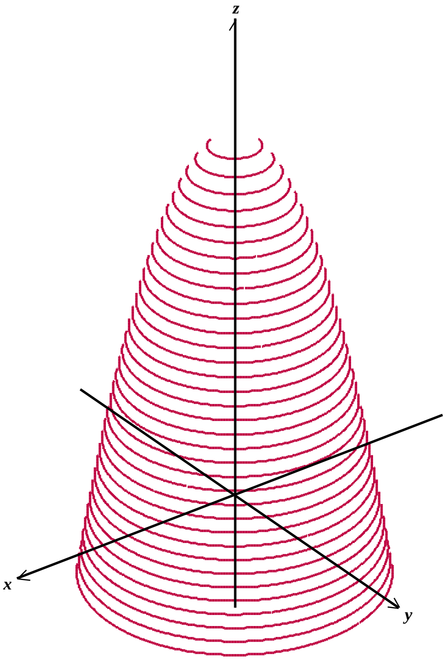
g) $z = x^2 + y^2 - 2$



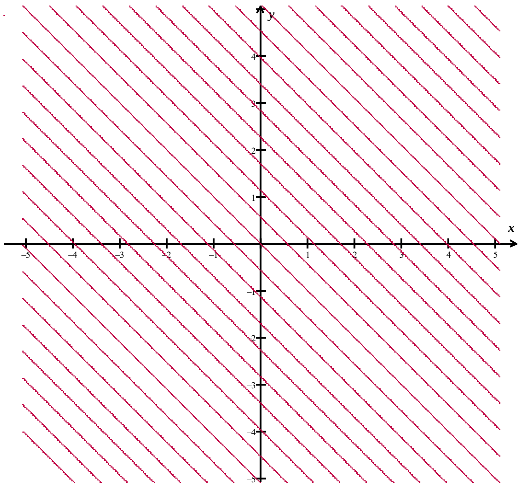


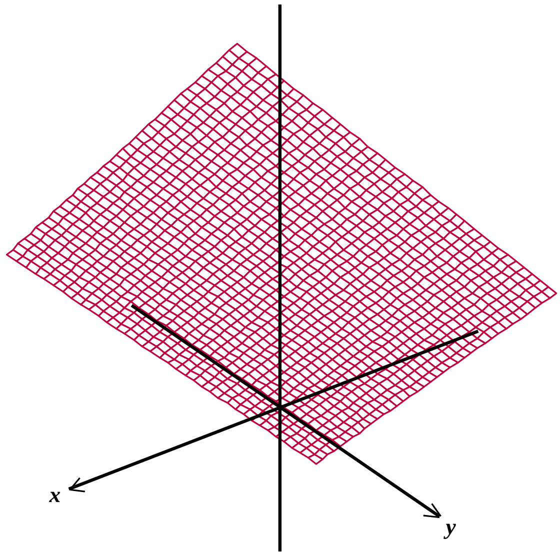
h) $z = 8 - x^2 - y^2$



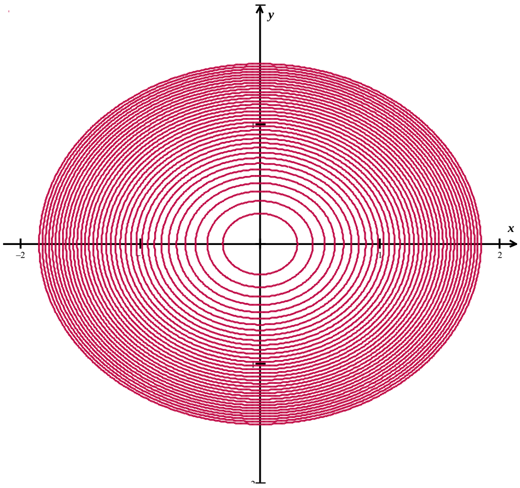


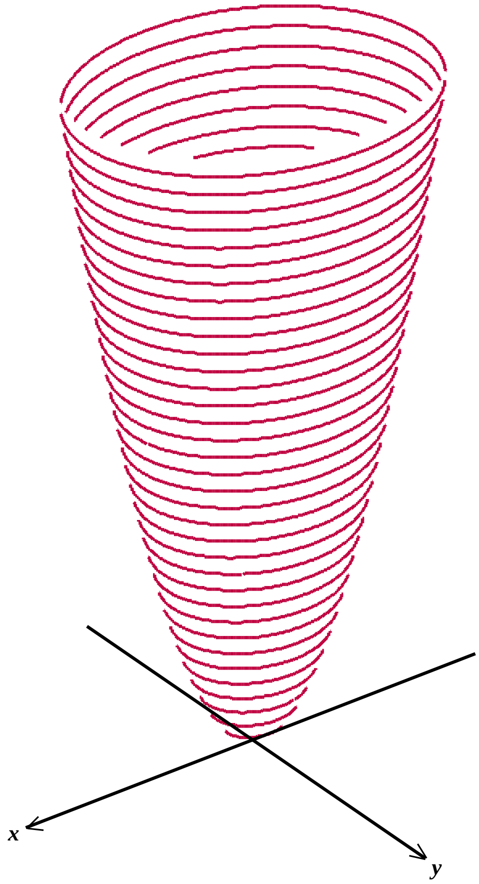
i) $f(x,y) = x + y + 4$



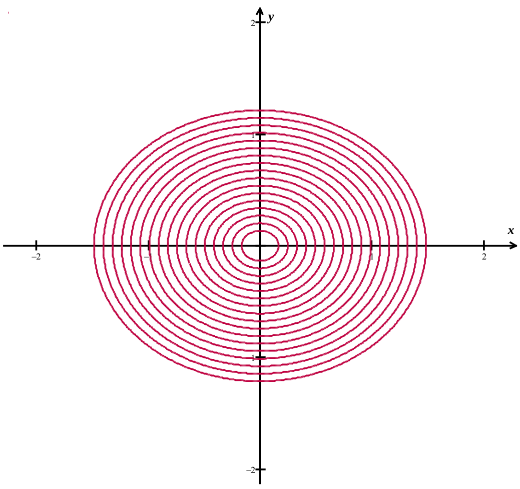


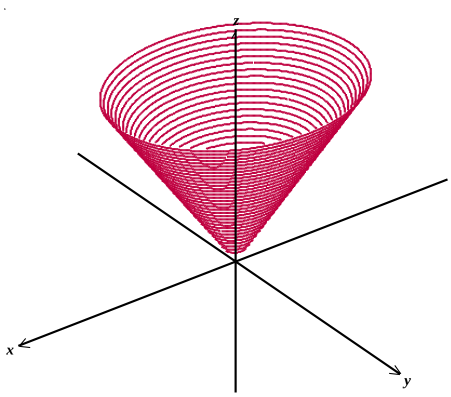
j) $z = 2x^2 + 3y^2$



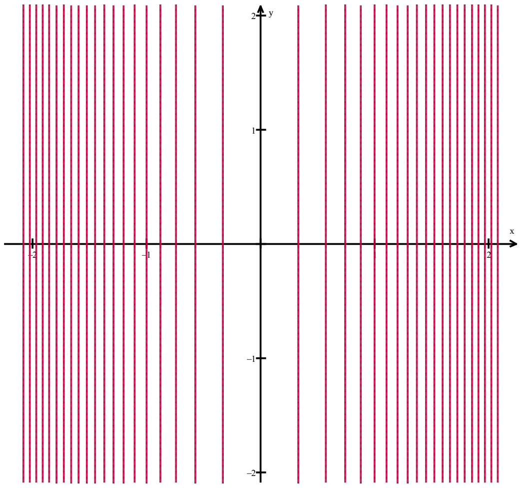


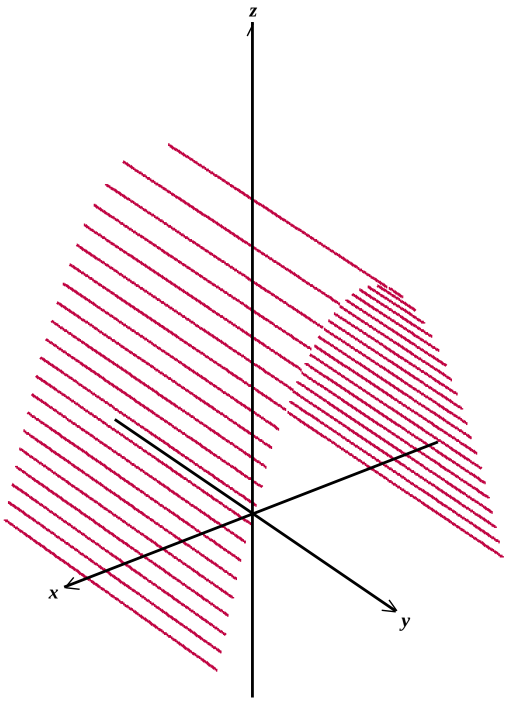
k) $z = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$



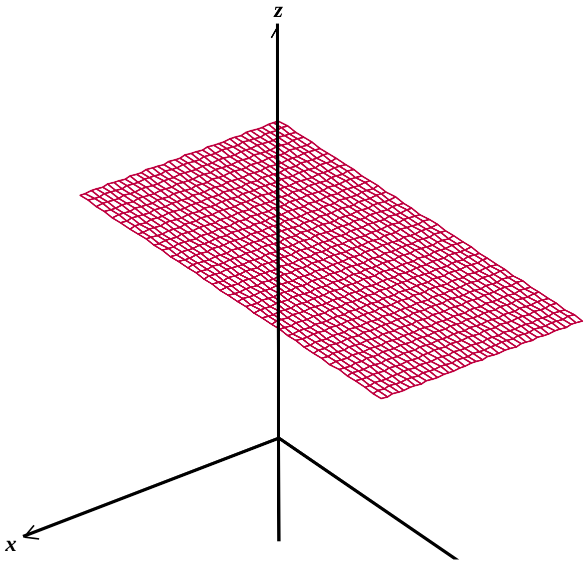


l) $z = 4 - x^2$

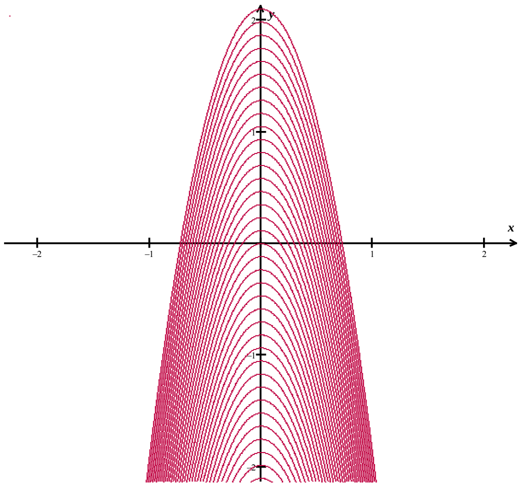


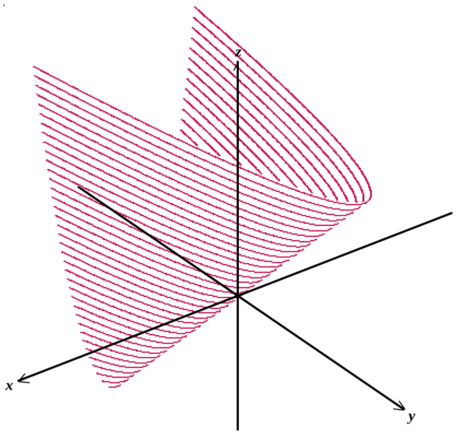


m) $z = 3, 0 \le x \le 2 \quad e \quad 0 \le y \le 4$

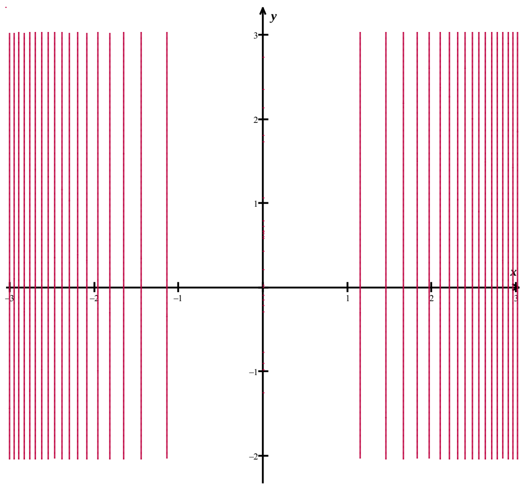


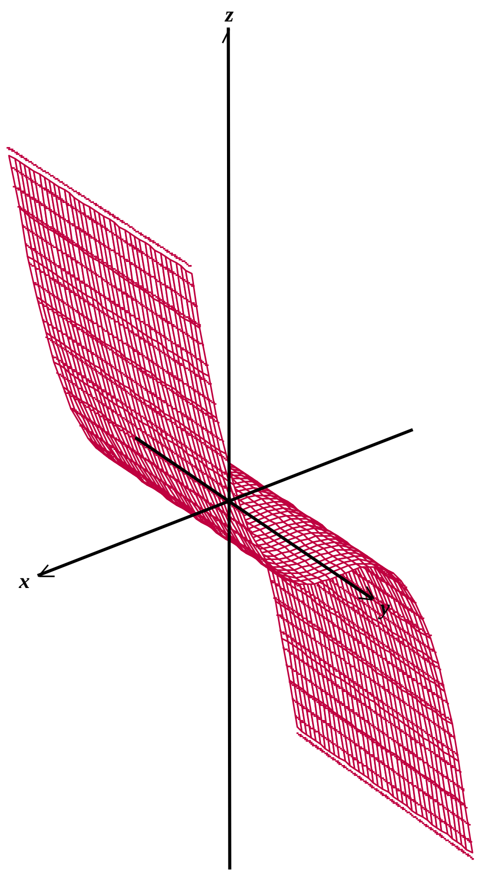
n) $z = 4x^2 + y$



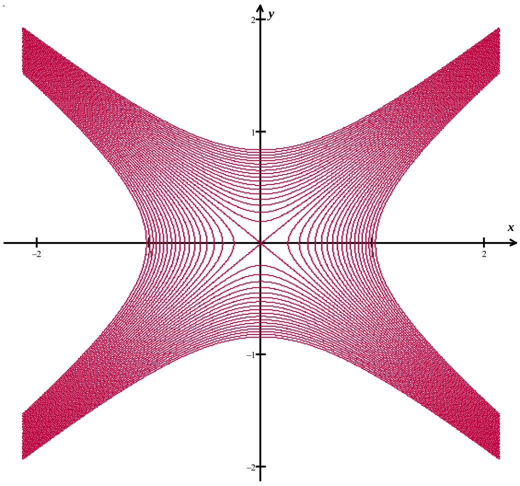


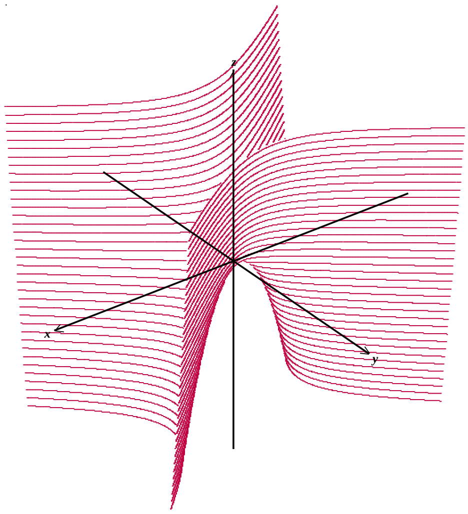
o) $z = \dfrac{1}{4}x^3$



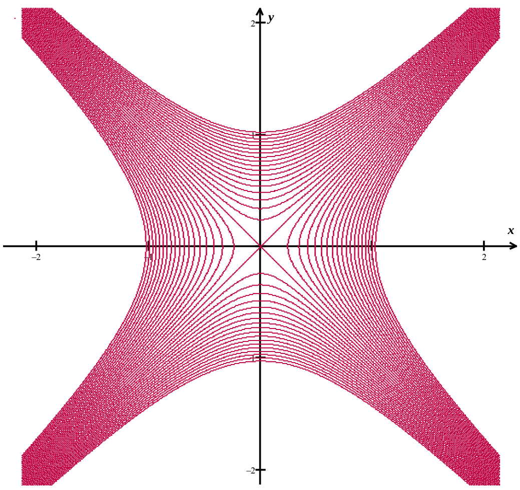


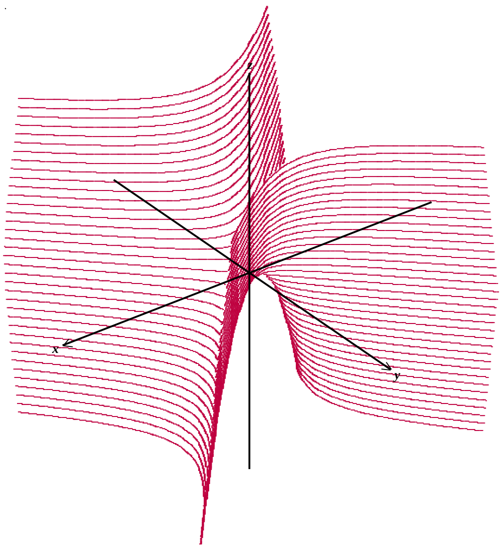
p) $z = 2x^2 - 3y^2$





q) $z = 3y^2 - 2x^2$





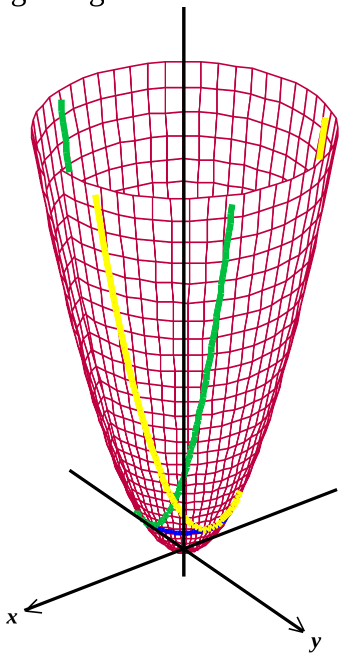
14. Encontrar a curva de intersecção do gráfico da função dada com os planos dados, representando graficamente:

a) $z = x^2 + y^2$ com os planos $z=1$; $x=1$;$y=1$.

As intersecções são dadas por:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 1 + y^2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 1 + x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

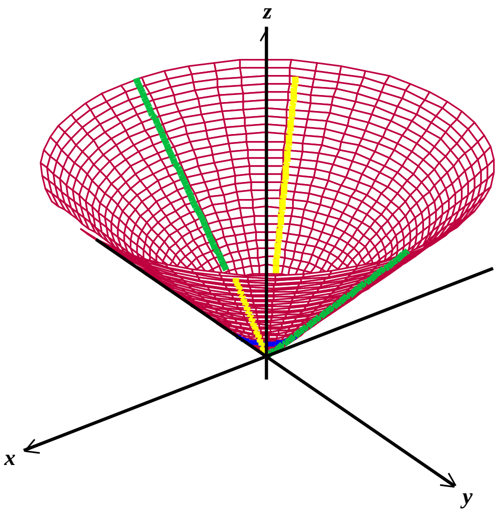
Segue o gráfico com as curvas assinaladas em cores azul, verde e amarela.



b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com os planos *z=1*; *x=0*;*y=x*.
As intersecções são dadas por:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = |\, y \,| \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \sqrt{2}\,|\, x \,| \\ y = x \end{cases}$

Segue o gráfico com as curvas assinaladas em cores azul, verde e amarela.

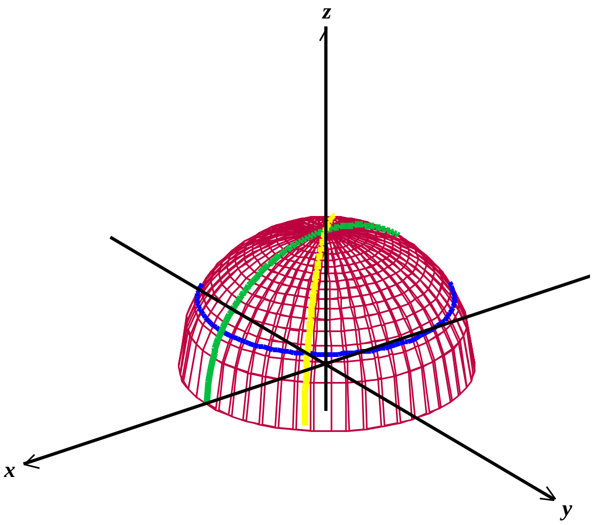


c) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ com os planos *z=1*; *y=0*;*y=x*.

As intersecções são dadas por:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=\sqrt{4-2x^2} \\ y=x \end{cases}$$

Segue o gráfico com as curvas assinaladas em cores azul, verde e amarela.

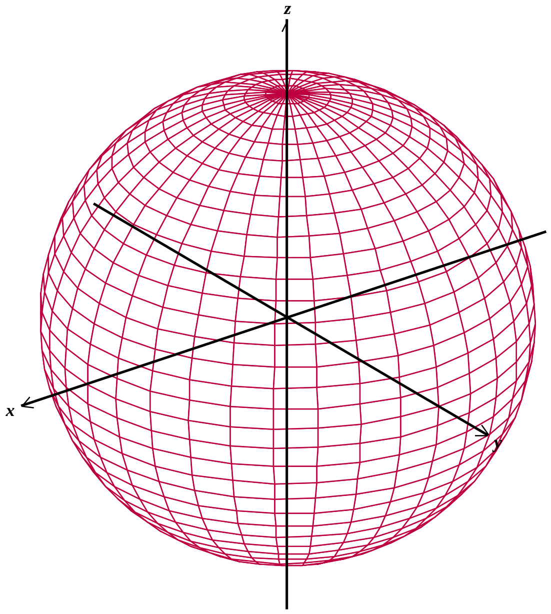


15. Esboçar o gráfico das superfícies de nível S_k correspondentes aos valores de k dados:

a) $w=x^2+y^2+z^2$; *k=0,1,4,9*.

Para k=0, temos $x^2+y^2+z^2=0$, que é uma superfície degenerada, pois temos apenas o ponto (0,0,0).

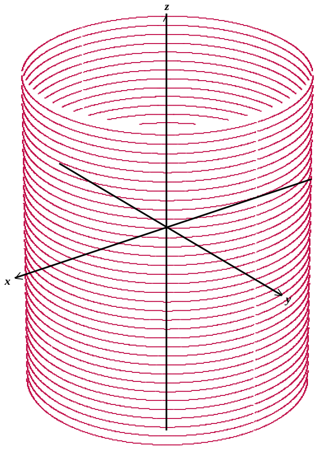
Para k=1,4,9 temos esferas centradas na origem de raio 1, 2 e 3 respectivamente.
Na figura que segue mostramos a esfera de raio 2.



b) $w = x^2 + y^2$; *k = 4,16,25.*

Neste caso vamos ter cilindros verticais infinitos de raio 2, 4,e 5 ($x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 25$).

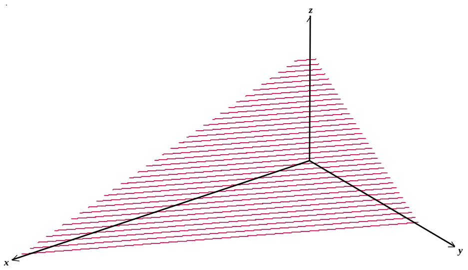
Na figura que segue, mostramos o cilindro de raio 4, delimitado inferiormente e superiormente.



c) $w = x + 2y + 3z$; *k=1,2,3.*

Neste caso, vamos ter planos $x + 2y + 3z = 1$; $x + 2y + 3z = 2$; $x + 2y + 3z = 3$

A figura mostra a parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ do primeiro octante.



16. Sabendo que a função $T(x,y,z) = 30 - \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)$ representa a temperatura nos pontos da região do espaço delimitada pelo elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, pergunta-se:

a) Em que ponto a temperatura é a mais alta possível?

Temos a maior temperatura na origem $(0,0,0)$quando $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0$. Nesse caso, a temperatura mais alta possível assume o valor 30 unidades de temperatura.

b) Se uma partícula se afasta da origem, deslocando-se sobre o eixo positivo dos x, sofrerá aumento ou diminuição de temperatura?
Diminuição.

c) Em que pontos a temperatura é a mais baixa possível?
Na casca da superfície do elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

17. Fazer um esboço de algumas superfícies de nível da função $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. O que ocorre com os valores da função ao longo de semi-retas que partem da origem?

As superfícies de nível são esferas centradas na origem. Os valores da função crescem à medida que nos afastamos da origem.

CAPÍTULO 2
2.8 - Exercícios
pág. 45 - 47

1. A posição de uma partícula no plano xy no tempo t é dada por $x(t) = e^t$, $y(t) = t\,e^t$

a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.

b) Onde se encontrará a partícula em $t = 0$ e em $t = 2$?

a) $\vec{f}(t) = e^t\,\vec{i} + te^t\,\vec{j}$

b) $\vec{f}(0) = e^0\,\vec{i} + 0e^0\,\vec{j} = \vec{i}$ e $\vec{f}(2) = e^2\vec{i} + 2e^2\,\vec{j}$.

2. O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa pode ser expresso pela função vetorial.

$\vec{r}(t) = \dfrac{1-\cos t}{m}\vec{i} + \left(2t + \dfrac{t - sent}{m}\right)\vec{j}$, onde m é a massa do besouro. Determinar a posição do besouro no instante $t = 0$ e $t = \pi$.

Temos:

$$\vec{r}(0) = \frac{1-\cos 0}{m}\vec{i} + \left(2\,.\,0 + \frac{0 - sen0}{m}\right)\vec{j}$$
$$= 0\vec{i} + 0\,\vec{j} = \vec{0}.$$

e

$$\vec{r}(\pi) = \frac{1-\cos \pi}{m}\vec{i} + \left(2\,.\,\pi + \frac{\pi - sen\pi}{m}\right)\vec{j}$$
$$= \frac{2}{m}\vec{i} + \left(2\pi + \frac{\pi}{m}\right)\vec{j}.$$

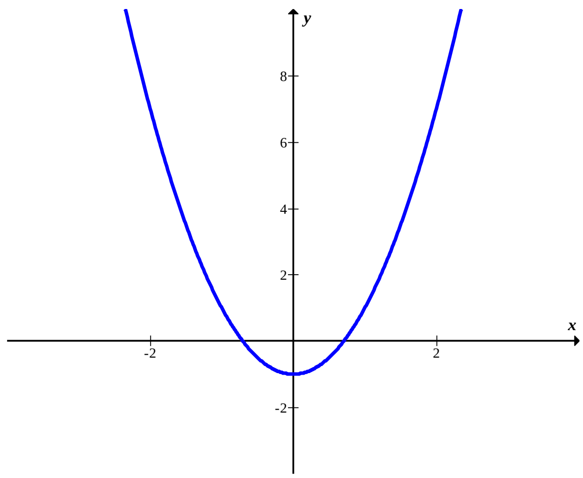
3. Esboçar a trajetória de uma articula P, sabendo que seu movimento é descrito por:

a) $\vec{f}(t) = t\,\vec{i} + \left(2t^2 - 1\right)\vec{j}$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t^2 - 1 \end{cases}$$

ou

$y = 2x^2 - 1$



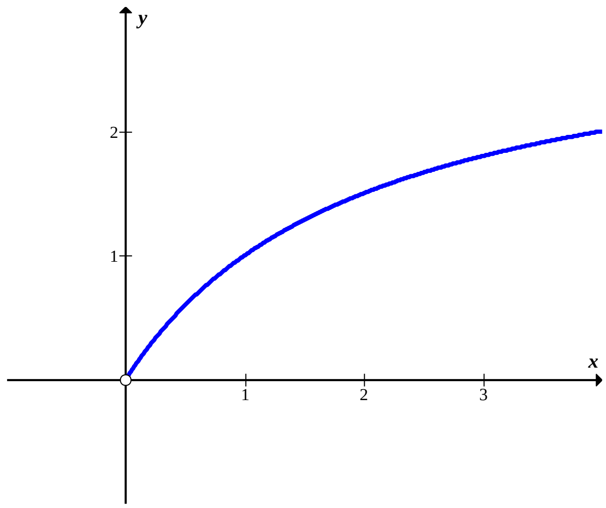
b) $\vec{g}(t) = \dfrac{2}{t}\,\vec{i} + \dfrac{3}{t+1}\,\vec{j}\,,\ t > 0$

Temos:

$x(t) = \dfrac{2}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{2}{x}$

e

$y(t) = \dfrac{3}{t+1}$ ou $y = \dfrac{3}{\dfrac{2}{x} + 1} = \dfrac{3}{\dfrac{2+x}{x}} = \dfrac{3x}{2+x}\,,\ x > 0$



c) $\vec{h}(t) = t\,\vec{i} + \vec{j} + 4t^2\,\vec{k}$

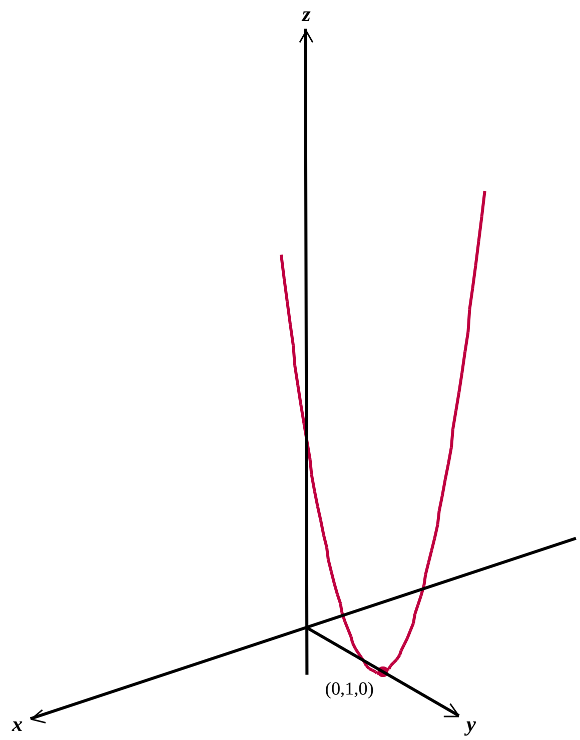
Temos:

$x(t) = t$

$y(t) = 1$

$z(t) = 4t^2$

Assim, $z = 4x^2,\ y = 1$



d) $\vec{v}(t) = \ln t\, \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}\,,\ t > 0$

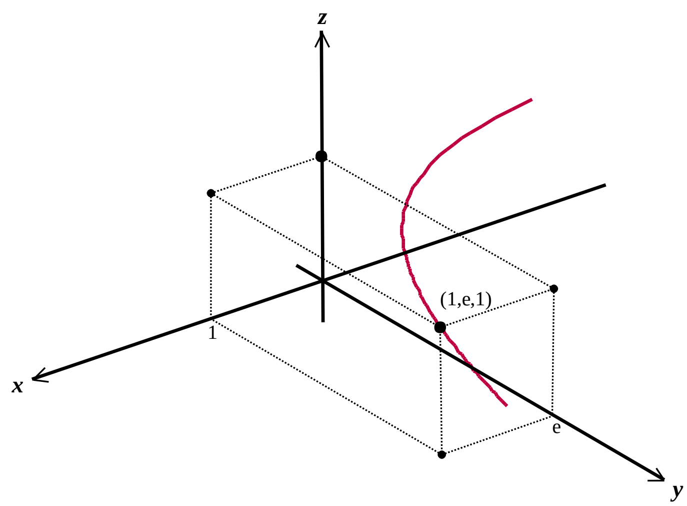
Temos:

$x(t) = \ln t$

$y(t) = t$

$z(t) = 1$

Assim, $x = \ln y\,,\ z = 1$



e) $\vec{w}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\,sen\,t\,\vec{j} + (9 - 3\,sen\,t)\vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$

Temos:

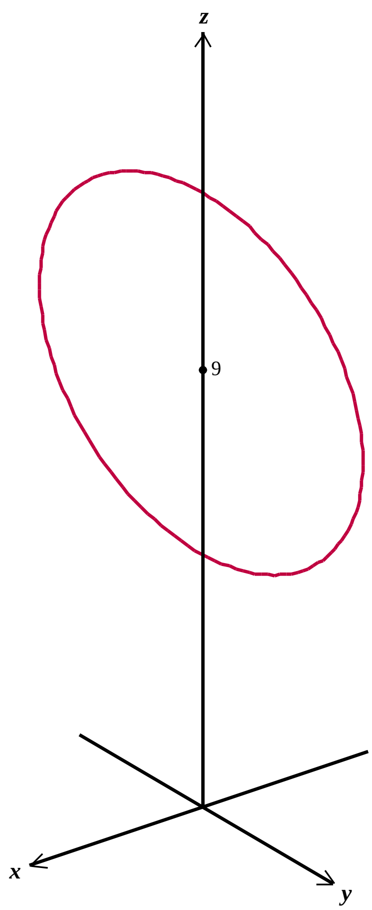
$x(t) = 3\cos t$

$y(t) = 3\,sen\,t$

$z(t) = 9 - 3\,sent$

ou seja

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 9 - y \end{cases}$$



f) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (9-t)\,\vec{j} + t^2\vec{k}\,,\ t > 0$

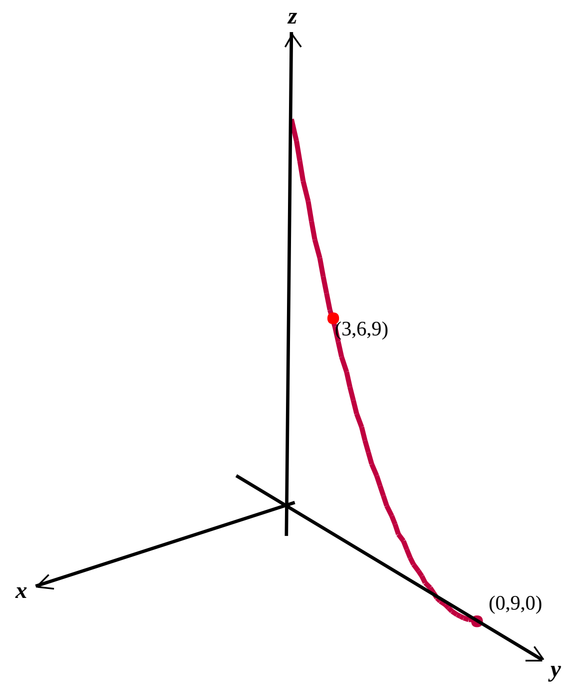
Temos:

$x(t) = t$

$y(t) = 9 - t$

$z(t) = t^2$

Assim, $y = 9 - x\,,\ z = x^2$



g) $\vec{l}(t) = t\,\vec{i} + sen\,t\,\vec{j} + 2\vec{k}$

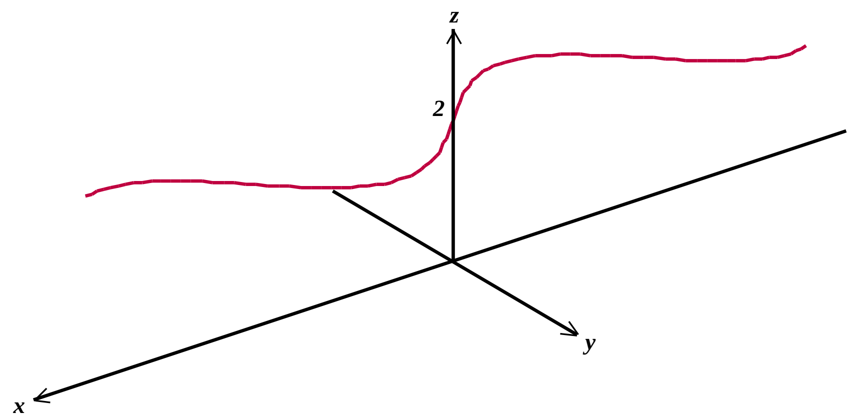
$x(t) = t$

$y(t) = sen\,t$

$z(t) = 2$

ou

$y = sen\,x\,,\;\; z = 2$



h) $\vec{r}(t) = (8 - 4\,sen\,t)\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 4\,sen\,t\,\vec{k}$

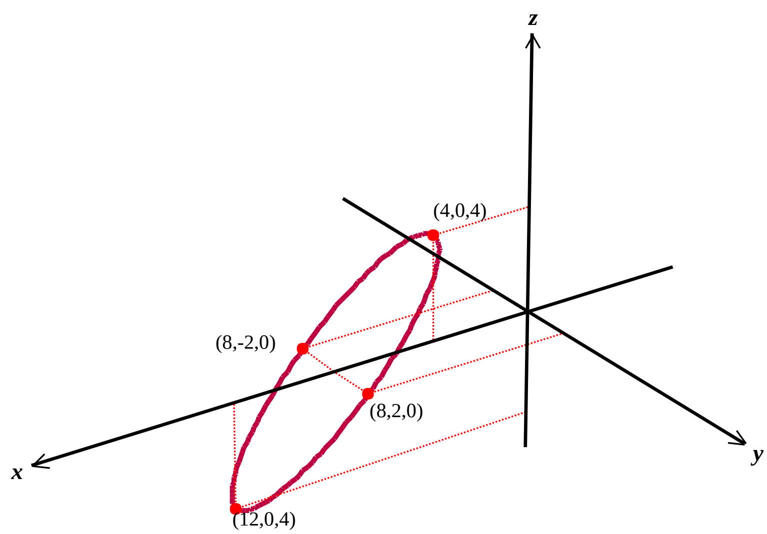
$x(t) = 8 - 4\,sen\,t$

$y(t) = 2\cos t$

$z(t) = 4\,sen\,t$

ou

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \\ x = 8 - z \end{cases}$$



4. Sejam $\vec{f}(t) = \vec{a}t + \vec{b}t^2$ e $\vec{g}(t) = t\,\vec{i} + sen\,t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

$0 \le t \le 2\pi$.

Calcular:

a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) &= (\vec{i} + \vec{j})t + (2\vec{i} - \vec{j})t^2 \\ &= t\vec{i} + t\vec{j} + 2t^2\vec{i} - t^2\vec{j} \\ &= (t + 2t^2)\vec{i} + (t - t^2)\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{f}(t)+\vec{g}(t) &= \left(t+2t^2\right)\vec{i}+\left(t-t^2\right)\vec{j}+t\vec{i}+sen\,t\;\vec{j}+\cos t\;\vec{k}\\ &= \left(2t^2+2t\right)\vec{i}+\left(t-t^2+sen\,t\right)\vec{j}+\cos t\vec{k}\\ &= 2\left(t^2+t\right)\vec{i}+\left(t-t^2+sen\,t\right)\vec{j}+\cos t\;\vec{k}\end{aligned}$$

com $0 \le t \le 2\pi$.

b)

$$\begin{aligned}\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t) &= \left[\left(t+2t^2\right)\vec{i}+\left(t-t^2\right)\vec{j}+0\vec{k}\right].\left[t\vec{i}+sen\,t\;\vec{j}+\cos t\vec{k}\right]\\ &= \left(t+2t^2\right).\,t+\left(t-t^2\right).\,sen\,t+0\,.\cos t\\ &= t^2+2t^3+\left(t-t^2\right)sen\,t\end{aligned}$$

com $0 \le t \le 2\pi$.

c) $\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)=\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)=\left[\left(t+2t^2\right)\vec{i}+\left(t-t^2\right)\vec{j}\right]\times\left[t\vec{i}+sen\,t\;\vec{j}+\cos t\;\vec{k}\right]=$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ t+2t^2 & t-t^2 & 0\\ t & sen\,t & \cos t\end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&=\vec{i}\left(t\cos t-t^2\cos t\right)+\vec{j}\left(-t\cos t-2t^2\cos t\right)+\vec{k}\left(t\;sen\,t+2t^2\;sen\,t-t^2+t^3\right)\\ &=t\cos t\,(1-t)\,\vec{i}-t\cos t\,(1+2t)\,\vec{j}+\left(t^3-t^2+2t^2sen\,t+t\;sen\,t\right)\vec{k}\end{aligned}$$

com $0 \le t \le 2\pi$.

d) $\vec{a}\,.\,\vec{f}(t)+\vec{b}\,.\,\vec{g}(t)=$

$$\begin{aligned}&=\left(\vec{i}+\vec{j}\right).\left[\left(t+2t^2\right)\vec{i}+\left(t-t^2\right)\vec{j}\right]+\left(2\vec{i}-\vec{j}\right).\left[t\;\vec{i}+sen\;t\;\vec{j}+\cos\;t\;\vec{k}\right]\\ &=\left(t+2t^2\right)+t-t^2+2t+\left(-sen\;t\right)\\ &=t^2+4t-sent\end{aligned}$$

com $0 \le t \le 2\pi$.

e) $\vec{f}(t-1)+\vec{g}(t+1)=$

$$=\left[t-1+2(t-1)^2\right]\vec{i}+\left[t-1-(t-1)^2\right]\vec{j}+(t+1)\vec{i}+sen(t+1)\,\vec{j}+\cos(t+1)\vec{k}$$

$$=\left[t-1+2\left(t^2-2t+1\right)+t+1\right]\vec{i}+\left[t-1-\left(t^2-2t+1\right)+sen(t+1)\right]\vec{j}+\cos(t+1)\vec{k}$$

$$=\left(2t^2-2t+2\right)\vec{i}+\left[-t^2+3t-2+sen(t+1)\right]\vec{j}+\cos\,(t+1)\vec{k}$$

com $0\le t\le 2\pi$.

5. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t o seu vetor posição é dado por $\vec{r}(t)=t\vec{i}+\dfrac{1}{t-2}\vec{j}+\vec{k}$.

a) Determinar a posição da partícula no instante $t=0$ e $t=1$

b) Esboçar a trajetória da partícula.

c) Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?

a) $\vec{r}(0)=0\vec{i}-\dfrac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}=-\dfrac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$

$$P_0=\left(0,-1/2,1\right)$$

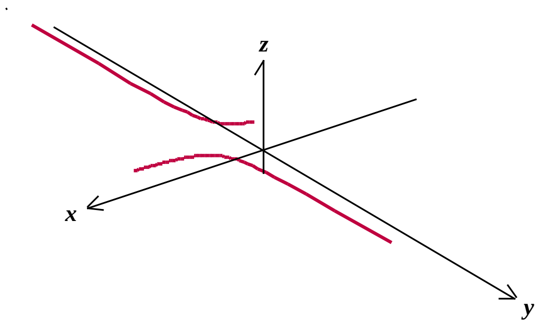
$$\vec{r}(1)=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$P_1=(1,-1,1)$$

b) $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\dfrac{1}{t-2} \\ z(t=1) \end{cases}$

ou

$y=\dfrac{1}{x-2}$, *z=1.*



c) Quando $t \to 2 \Rightarrow x \to 2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

A partícula tende para uma posição infinita.

6. Sejam $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e $\vec{g}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}$, $t \geq 0$. Calcular:

a) $\lim\limits_{t \to 1} \left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right]$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 1} \left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right] &= \lim_{t \to 1} \left(t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}\right) + \lim_{t \to 1} \left(2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}\right) \\
&= \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + \left(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\right) \\
&= 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} \\
&= 3\vec{i} + 3\vec{j}
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{t \to 1} \left[\vec{f}(t) - \vec{g}(t)\right]$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 1} \left[\vec{f}(t) - \vec{g}(t)\right] &= \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\right) \\
&= -\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}
\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{t \to 1} \left[3\vec{f}(t) - \frac{1}{2}\vec{g}(t)\right]$

$$\lim_{t\to 1}\left[3\vec{f}(t)-\frac{1}{2}\vec{g}(t)\right]= 3\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)-\frac{1}{2}\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)$$
$$= 2\vec{i}+\frac{11}{2}\vec{j}+\frac{21}{2}\vec{k}$$

d) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right]$

$$\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t)=\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right).\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)$$
$$= 2+2+(-9)$$
$$= -5$$

e) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]$

$$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]=\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)\times\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$$
$$= -9\vec{i}+9\vec{j}-3\vec{k}$$

f) $\lim_{t\to 1}\left[(t+1)\vec{f}(t)\right]$

$$\lim_{t\to 1}\left[(t+1)\vec{f}(t)\right]= 2\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)$$
$$= 2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$$

g) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]$

$$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]=\vec{0}\times\left(0\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k}\right)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\vec{0}$$

7. Seja $\vec{f}(t) = sen\, t\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2\vec{k}$ e $h(t) = 1/t$. Calcular, se existir, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \vec{f}(t)$

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = sen\, 0\vec{i} + \cos 0\,\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$= \vec{j} + 2\vec{k}$$

b) $\lim\limits_{t\to 0} [h(t).\,\vec{f}(t)]$

$$\lim_{t\to 0} h(t).\,\vec{f}(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{sen\, t}{t}\vec{i} + \frac{\cos t}{t}\vec{j} + \frac{2}{t}\vec{k}\right]$$
$$= \vec{i} + 0\vec{j} + \infty \quad \therefore \quad \nexists$$

8. Calcular os seguintes limites de funções vetoriais de uma variável

a) $\lim\limits_{t\to \pi} (\cos t\vec{i} + t^2\vec{j} - 5\vec{k})$

$$\lim_{t\to \pi}(\cos t\vec{i} + t^2\vec{j} - 5\vec{k}) = \cos \pi\vec{i} + \pi^2\vec{j} - 5\vec{k}$$
$$= -\vec{i} + \pi^2\vec{j} - 5\vec{k}$$

b) $\lim\limits_{t\to -2} \left(\dfrac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}\vec{i} + \vec{j}\right)$

$$\lim_{t\to -2} \frac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}\vec{i} + \vec{j} = \lim_{t\to -2} \frac{(t+2)(t^2+2t)}{(t+2)(t-3)}\vec{i} + \vec{j}$$
$$= \frac{4-4}{-2-3}\vec{i} + \vec{j} = 0\vec{i} + \vec{j} = \vec{j}$$

c) $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{1}{t-2}\left[(t^2-4)\vec{i} + (t-2)\vec{j}\right]$

$$\lim_{t\to 2} \frac{1}{t-2}\left[(t^2-4)\vec{i} + (t-2)\vec{j}\right] = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{t-2}\vec{i} + \frac{t-2}{t-2}\vec{j}$$
$$= 4\vec{i} + \vec{j}$$

d) $\lim_{t\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}\vec{i}+(t-1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}\right]$

$$\lim_{t\to 1}\left[\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\vec{i}+(t-1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}\right]=\lim_{t\to 1}\left[\frac{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}{(t-1)(\sqrt{t}+1)}\vec{i}+(t-1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}\right]$$
$$=\lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{\sqrt{t}+1}\vec{i}+(t-1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{k}$$

e) $\lim_{t\to 0}\left[\dfrac{2^t-1}{t}\vec{i}+(2^t-1)\vec{j}+t\vec{k}\right]$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{2^t-1}{t}\vec{i}+(2^t-1)\vec{j}+t\vec{k}\right]=\ln 2\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$$
$$=\ln 2\vec{i}$$

9. Mostrar que o limite do modulo de uma função vetorial é igual ao modulo do seu limite, se este último existir.

Seja $\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ uma função vetorial tal que $\lim_{t\to a} f(t)$ exista, $\lim_{t\to a} f(t)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$. Assim, existem $\lim_{t\to a} f_1(t)=a_1$, $\lim_{t\to a} f_2(t)=a_2$ e $\lim_{t\to a} f_3(t)=a_3$.

Queremos mostrar que $\lim_{t\to a}\left|\vec{f}(t)\right|=\left|\lim_{t\to a}\vec{f}(t)\right|$.

Como $\left|\vec{f}(t)\right|=\sqrt{(f_1(t))^2+(f_2(t))^2+(f_3(t))^2}$, temos que

$$\lim_{t\to a}\left|f(t)\right|=\lim_{t\to a}\sqrt{f_1(t)^2+f_2(t)^2+f_3(t)^2}\ .$$

Aplicando propriedade de limites vem:

$$\lim_{t\to a}|f(t)| = \sqrt{\lim_{t\to a}(f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2)}$$

ou

$$\lim_{t\to a}|f(t)| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$
$$= \left|a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right|$$
$$= \left|\lim_{t\to a}\vec{f}(t)\right|.$$

10. Mostrar que a função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ é contínua em um intervalo I se, e somente se, as funções reais $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são contínuas em I.

Se $\vec{f}(t)$ é contínua num intervalo I temos por definição que $f(t)$ é contínua em todos os pontos $t_0 \in I$, ou $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$ $\forall\, t_0 \in I$.

Temos então que

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t) = f_1(t_0)\vec{i} + f_2(t_0)\vec{j} + f_3(t_0)\vec{k}, \qquad \forall\, t_0 \in I \tag{1}$$

Por uma propriedade de limite vem

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t) = \lim_{t\to t_0} f_1(t)\vec{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\vec{j} + \lim_{t\to t_0} f_3(t)\vec{k} \tag{2}$$

Comparando (1) e (2), vem

$$\lim_{t\to t_0} f_1(t) = f_1(t_0), \quad \lim_{t\to t_0} f_2(t) = f_2(t_0) \text{ e } \lim_{t\to t_0} f_3(t) = f_3(t_0), \ \forall\, t_0 \in I,$$

o que implica em afirmar que $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são contínuas em I.

Reciprocamente, supor que existem $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$ e $f_3(t_0)$ e existem os limites $\lim_{t\to t_0} f_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\forall\, t_0 \in I$ e são iguais a $f_i(t_0)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Portanto podemos escrever:

$$\vec{f}(t_0) = f_1(t_0)\vec{i} + f_2(t_0)\vec{j} + f_3(t_0)\vec{k}$$
$$= \lim_{t\to t_0} f_1(t)\vec{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\vec{j} + \lim_{t\to t_0} f_3(t)\vec{k}$$
$$= \lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)$$

o que implica em afirmar que $\vec{f}(t)$ é contínua em todo $t_0 \in I$.

11. Calcular o limite e analisar a continuidade das funções vetoriais dadas, nos pontos indicados.

a) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\,\vec{j}, & t \neq 3 \\ \vec{0}, & t = 3 \end{cases}$ em $t = 0$ e $t = 3$.

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j}\right)$$
$$= -\vec{i}$$
$$= \vec{f}(0)$$

Portanto, é contínua em $t = 0$.

$$\lim_{t\to 3} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 3}\left(\frac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j}\right)$$

Temos:

$$\lim_{t\to 3^+} \vec{f}(t) = \vec{i} + 9\vec{j}$$
$$\lim_{t\to 3^-} \vec{f}(t) = \overrightarrow{-i} + 9\vec{j}$$
$$\Rightarrow \nexists \lim_{t\to 3} \vec{f}(t)$$

Portanto, não é contínua em $t = 3$.

b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t\ sen\,\dfrac{1}{t}\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}, & t \neq 0 \\ \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$ em $t=0$

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 0}\left(t\ sen\,\frac{1}{t}\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right)$$
$$= 0\vec{i} + \vec{j}$$
$$= \vec{j} = \vec{f}(0)$$

Portanto, é contínua em $t = 0$.

c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t\vec{i} + \dfrac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{t}\vec{j}, & t \neq 0 \\ \sqrt{2}\,\vec{j}, t = 0 \end{cases}$ em $t=0$.

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t) = \lim_{t\to 0}\left(t\vec{i} + \frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{t}\vec{j}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(t\vec{i} + \frac{(\sqrt{t+2}-\sqrt{2})\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{2}\right)}{t(\sqrt{t+2}+\sqrt{2})}\vec{j}\right)$$

$$= 0\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{j} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{j} = \vec{f}(0)$$

Portanto, é contínua em $t = 0$.

d) $\vec{f}(t) = sen\,t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ em $t = 0$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t) = 0\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$= -\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \vec{f}(0)$$

Portanto, é contínua em $t = 0$.

e) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t-1}\vec{i} + \dfrac{4}{t-2}\vec{j} - 5\vec{k}, t \neq 1 \text{ e t} \neq 2 \\ \vec{0}, t = 1 \;\; e\; t = 2 \end{cases}$ em $t = 1$ e $t = 2$.

O limite $\lim_{t\to 1}\vec{f}(t) = \lim_{t\to 1}\left(\dfrac{2}{t-1}\vec{i} + \dfrac{4}{t-2}\vec{j} - 5\,\vec{k}\right)$ não existe, portanto não é contínua em $t = 1$.

O limite $\lim_{t\to 2}\vec{f}(t) = \lim_{t\to 2}\left(\dfrac{2}{t-1}\vec{i} + \dfrac{4}{t-2}\vec{j} - 5\,\vec{k}\right)$ não existe, portanto não é contínua em $t = 2$.

12. Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \vec{a}\ sen\ t + \vec{b}\cos t$ em $[0, 2\pi]$ onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= sen\ t\ \vec{i} + \left(\vec{i} + \vec{j}\right)\cos t \\ &= \left(sen\ t + \cos t\right)\vec{i} + \cos t\ \vec{j}\end{aligned}$$

Como $sen\, t$ e $\cos t$ são contínuas em $[0, 2\pi]$ temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) &= \lim_{t\to t_0}\left[\left(sen\, t + \cos t\right)\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right] \\ &= \left(sen\, t_0 + \cos t_0\right)\vec{i} + \cos t_0\,\vec{j} \\ &= \vec{f}(t_0)\end{aligned}$$

$\forall\ t_0 \in [0, 2\pi]$.

Assim, $\vec{f}(t)$ é contínua em $[0, 2\pi]$.

b) $\vec{g}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \left(t^2 - 1\right)\vec{j} + e^t\vec{k}$

Analisando a função $f_1 = \frac{1}{t}$, vemos que ela não é contínua em $t = 0$. Ainda $f_2 = t_2 - 1$ e $f_3 = e^t$ são contínuas em R, portanto $\vec{g}(t)$ é contínua em $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $\vec{h}(t) = e^{-t}\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \cos 2t\vec{k}$

Temos que:

- e^{-t} é contínua em todos os reais;
- $\ln t$ é contínua para os reais maiores que zero;
- $\cos 2t$ é contínua para todos os reais.

Assim, $\vec{h}(t)$ é contínua em $(0, +\infty)$.

d) $\vec{v}(t) = \left(\ln\, (t+1), \dfrac{1}{t}, t \right)$

Temos que:

- $\ln\, (t+1)$ é contínua para os reais maiores que (-1);
- $\dfrac{1}{t}$ é contínua para os reais diferentes de zero;
- t é contínua para todos os reais.

Assim, $\vec{v}(t)$ é contínua em $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

e) $\vec{w}(t) = \left(sen\, t, tg\ t, e^t \right)$

Temos que:

- $sen\, t$ é contínua em todos os reais;
- $tg\ t$ é contínua em $\left\{ t \middle| t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$;
- e^t é contínua em todos os reais.

Assim, $w(t)$ é contínua em $\left\{ t \middle| t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ ou $\bigcup_{n \in Z} \left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right)$.

f) $\vec{r}(t) = \left(e^t, \dfrac{t^2 - 1}{t - 1}, \ln\, (t+1) \right)$

Temos que:

e^t é contínua para todos os reais;

$\dfrac{t^2 - 1}{t - 1}$ é contínua em $R - \{1\}$;

$\ln\, (t+1)$ é contínua para todos os t reais tais que $t > -1$.

Assim, $\vec{r}(t) = \left(e^t, \dfrac{t^2 - 1}{t - 1}, \ln\, (t+1) \right)$ é contínua em $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

g) $\vec{f}(t)=\left(\sqrt[3]{t},\ \dfrac{-1}{t^2-1},\ \dfrac{-1}{t^2-4}\right)$

Temos que:

- $\sqrt[3]{t}$ é contínua em todos os reais;
- $\dfrac{-1}{t^2-1}$ é contínua em $R-\{1,-1\}$;
- $\dfrac{-1}{t^2-4}$ é contínua em $R-\{2,-2\}$.

Assim, $\vec{f}(t)=\left(\sqrt[3]{t},\ \dfrac{-1}{t^2-1},\ \dfrac{-1}{t^2-4}\right)$ é contínua em $R-\{-2,-1,1,2\}$ ou

$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

h) $\vec{g}(t)=\left(t^2+1,\ \dfrac{2-t^2}{t^2-2t+1},\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Temos que:

- t^2+1 é contínua em R;
- $\dfrac{2-t^2}{t^2-2t+1}$ é contínua em $R-\{1\}$;
- $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ é contínua para $t>0$.

Assim, $\vec{g}(t)=\left(t^2+1,\ \dfrac{2-t^2}{t^2-2t+1},\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ é contínua em $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

13. Provar os itens (a), (b) e (c) das propriedades 2.5.3.

Para provar os itens vamos usar a proposição 2.5.2 da página 24 e as propriedades de limites das funções escalares do Cálculo A.

Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ duas funções vetoriais definidas em um mesmo intervalo. Se

$\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=\vec{a}$ e $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{g}(t)=\vec{b}$ então:

a) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)\pm g(t)\right]=\vec{a}\pm\vec{b}$.

Sejam $\vec{f}(t)=(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$; $\vec{g}(t)=(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$; $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

Temos:

$\vec{f}(t)\pm\vec{g}(t)=(f_1(t)\pm g_1(t), f_2(t)\pm g_2(t), f_3(t)\pm g_3(t))$ e

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)\pm\vec{g}(t)\right] &= \lim_{t\to t_0}\left[(f_1(t)\pm g_1(t))\vec{i}+(f_2(t)\pm g_2(t))\vec{j}+(f_3(t)\pm g_3(t))\vec{k}\right]\\ &= [\lim_{t\to t_0} f_1(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0} f_2(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0} f_3(t)\vec{k}]\pm[\lim_{t\to t_0} g_1(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0} g_2(t)\vec{j}+g_3(t)\vec{k}]\\ &= \lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\vec{g}(t)\\ &= \vec{a}\pm\vec{b}\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t)=\vec{a}\,.\,\vec{b}$

Temos:

$\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t)= f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t)$

e

$\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0}[f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t)]$

Considerando:

- $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=(a_1, a_2, a_3)$ ou $\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t)=a_1, \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t)=a_2, \lim\limits_{t\to t_0} f_3(t)=a_3$;
- $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=(b_1, b_2, b_3)$ ou $\lim\limits_{t\to t_0} g_1(t)=b_1, \lim\limits_{t\to t_0} g_2(t)=b_2 e \lim\limits_{t\to t_0} g_3(t)=b_3$.

temos que:

$\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\vec{a}.\vec{b}$

c) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]=\vec{a}\times\vec{b}$

Temos o produto vetorial:

$$\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1 & f_2 & f_3\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}=(f_2g_3-f_3g_2)\vec{i}+(f_3g_1-f_1g_3)\vec{j}+(f_1g_2-f_2g_1)\vec{k}$$

Fazendo o limite temos:

$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right)=\lim_{t\to t_0}\left[(f_2g_3-f_3g_2)\vec{i}+(f_3g_1-f_1g_3)\vec{j}+(f_1g_2-f_2g_1)\vec{k}\right]=$$

$$(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}=\vec{a}\times\vec{b}$$

14. Sejam $\vec{f}$ e $\vec{g}$ duas funções vetoriais contínuas em um intervalo I. Mostrar que:

a) $\vec{f}+\vec{g}$ é contínua em I.

b) $\vec{f}\times\vec{g}$ é contínua em I.

Se $\vec{f}$ e $\vec{g}$ são contínuas em I $\Rightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=f(t_0)$ e $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t)=\vec{g}(t_0), \forall t_0\in I$ e:

- $\lim\limits_{t\to t_0} f_i(t)=f_i(t_0)$;
- $\lim\limits_{t\to t_0} g_i(t)=g_i(t_0)$

com i = 1, 2, 3, $\forall t_0\in I$.

Então:

a) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}+\vec{g}\right]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t)=\vec{f}(t_0)+\vec{g}(t_0), \forall t_0\in I\Rightarrow \vec{f}+\vec{g}$ é contínua em I.

b) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}\times\vec{g}\right]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}=\vec{f}(t_0)\times\vec{g}(t_0), \forall t_0\in I\Rightarrow \vec{f}\times\vec{g}$ é contínua em I.

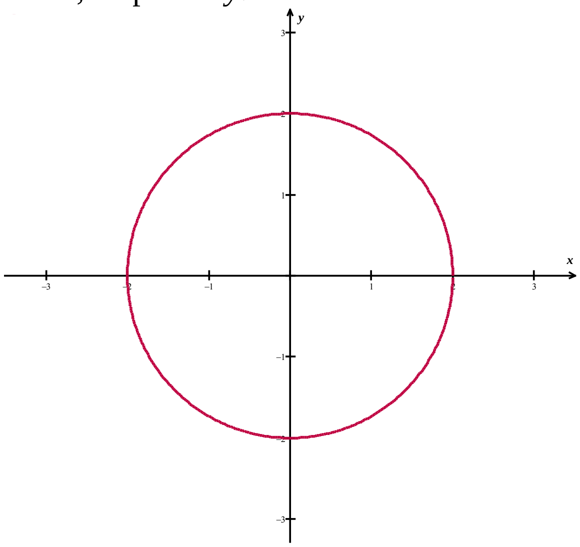
15. Esboçar o gráfico da curva descrita por um ponto móvel $P(x,y)$, quando o parâmetro t varia no intervalo dado. Determinar a equação cartesiana da curva em cada um dos itens:

a)

$$\begin{matrix} x=2\cos t \\ y=2\,sen\,t\end{matrix},\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$x^2=4\cos^2 t$$
$$y^2=4\,sen^2\, t$$
$$\overline{x^2+y^2+4}$$

Assim a equação cartesiana é dada por $x^2 + y^2 + 4$. Segue o gráfico – circunferência de raio 2, no plano *xy*.



b)

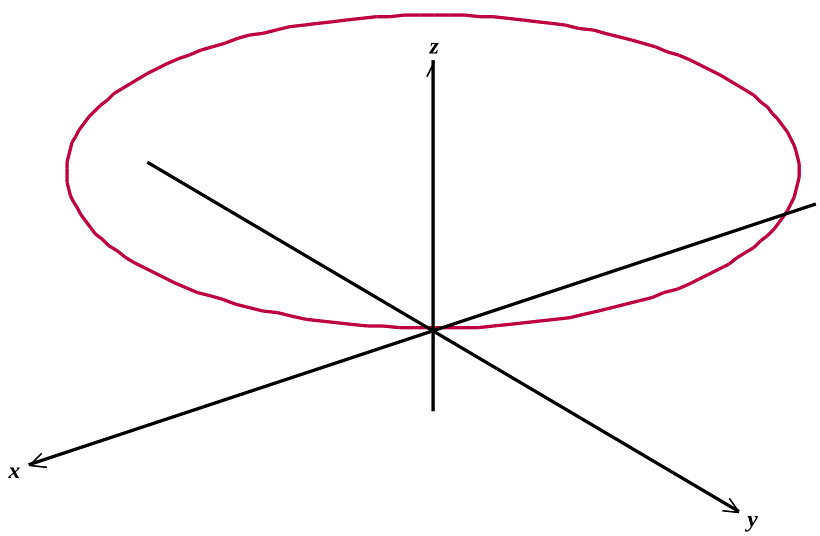
$x = 4\cos t$

$y = 4\,sen\,t$

$z = 2$

com $0 \le t \le 2\pi$.

A equação cartesiana é dada por $x^2 + y^2 = 16$; $z = 2$. Veja o gráfico que segue – uma circunferência de raio 4 no plano $z = 2$.



c)

$$x = 2 + 4\,sen\,t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$
$$y = 3 - 2\cos t$$

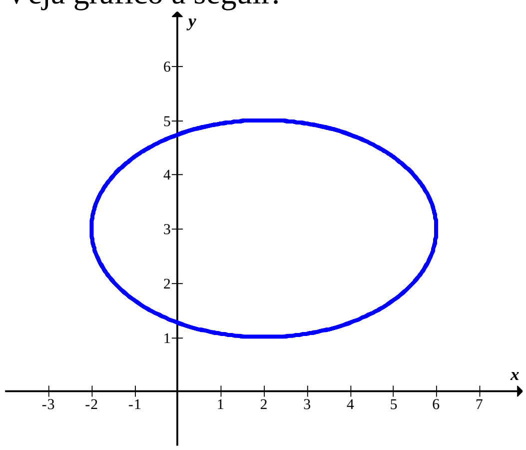
$$(x-2)^2 = 16\,sen^2 t$$
$$(y-3)^2 = 4\cos^2 t$$

$$(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 16$$

Estamos diante de uma elipse centrada em (2,3) no plano xy,

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Veja gráfico a seguir.



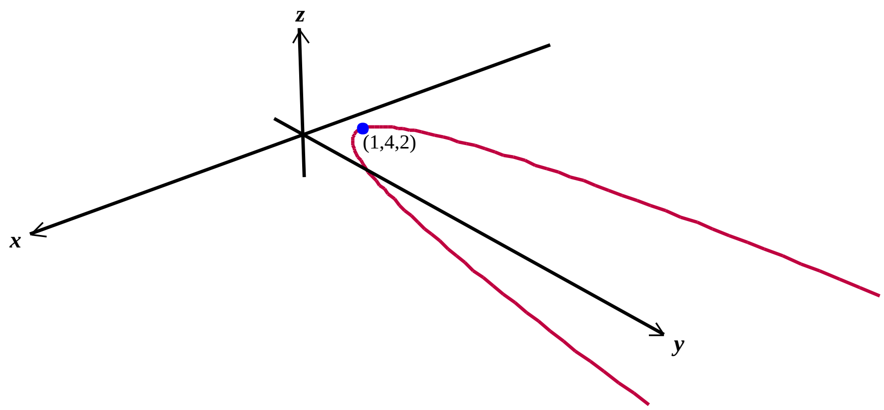
d)

$$x = t + 1$$
$$y = t^2 + 4 \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = 2$$

Temos uma parábola no plano z=2.

$$y = (x-1)^2 + 4$$
$$= x^2 - 2x + 5$$

Veja o gráfico no espaço.



16. Obter a equação cartesiana das seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t, 3t + 5\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 3t + 5 \end{cases}$$

Temos:

$t = 2x$

$y = 3.2x + 5$

$y = 6x + 5$

b) $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 2)$

$x(t) = t - 1$

$y(t) = (t - 1)^2 + 1$

Assim, temos $y = x^2 + 1$.

c) $\vec{r}(s) = (s^2 - 1,\ s^2 + 1,\ 2)$

$$\begin{cases} x = s^2 - 1 \\ y = s^2 + 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Temos que

$s^2 = x + 1$ ou $s = \sqrt{x + 1}$ para $x \geq -1$.

$y = x + 1 + 1$

Assim, temos $y = x + 2$; $z = 2$ sendo que $x \geq -1$.

17. Determinar o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escrever uma equação vetorial para cada uma.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$$

Centro : $\left(1, -\frac{5}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$

$$\vec{r}(t) = \left(1 + \frac{\sqrt{41}}{2}\cos t\ ,\ -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Centro : $(3, -4)$ e raio $r = 5$

$$\vec{r}(t) = (3 + 5\cos t, -4 + 5\operatorname{sen} t)$$

c) $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0$

$$(x-0)^2 + (y + 5/2)^2 = \frac{33}{4}$$

Centro : $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{33}}{2}$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\cos t, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

18. Identificar as curvas a seguir e parametrizá-las. Esboçar o seu gráfico.

a) $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0$$

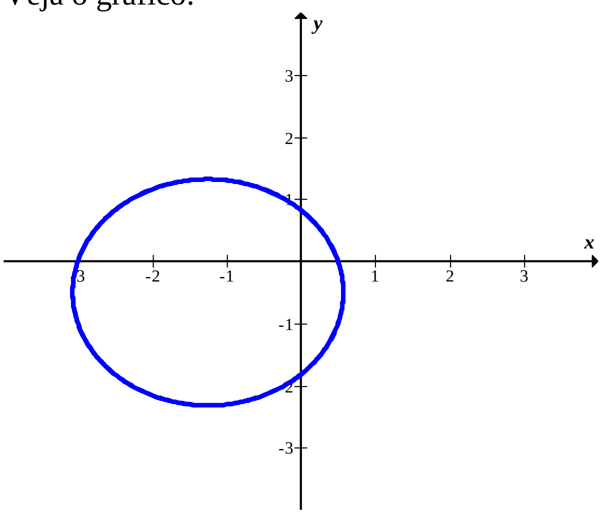
$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{53}{16}$$

Circunferência com centro: $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right)$ e raio $r=\frac{\sqrt{53}}{4}$.

Representação paramétrica:

$$\begin{cases} x=-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{53}}{4}\cos t \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{53}}{4}sent \end{cases} \quad \text{com } 0\le t\le 2\pi .$$

Veja o gráfico:



b) $2x^2+5y^2-6x-2y+4=0$

$$2\left(x^2-3x\right)+5\left(y^2-\frac{2y}{5}\right)+4=0$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{7}{10}$$

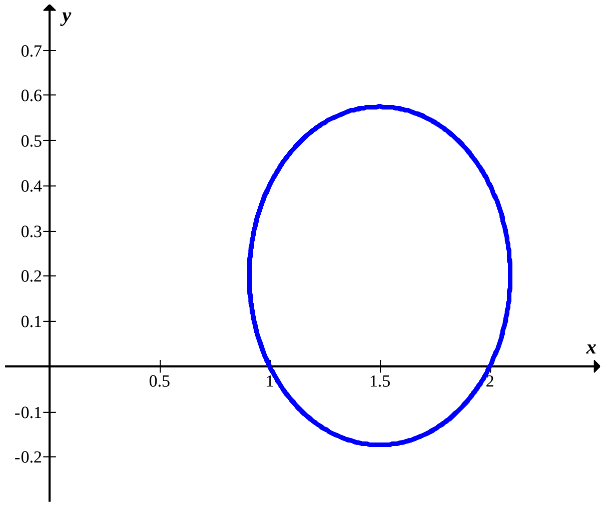
$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{7}{20}}+\frac{\left(y-\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{7}{50}}=1$$

Elipse centrada em $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{5}\right)$, com semi eixos iguais a $a=\sqrt{\frac{7}{20}}$ e $b=\sqrt{\frac{7}{50}}$.

Representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{7}{20}}\cos t \\ y = \dfrac{1}{5} + \sqrt{\dfrac{7}{50}}\,sen\,t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Veja o gráfico:



c) $x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 0$

$$(x-2)^2 + 2(y^2 - y) = 0$$

$$(x-2)^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + 4$$

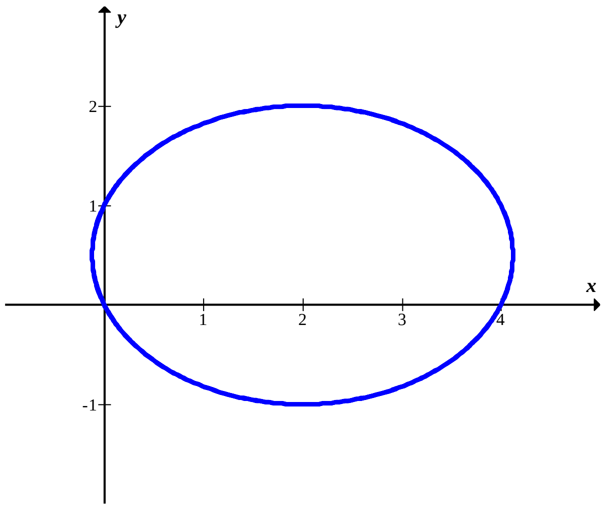
$$\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Elipse com centro: $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e semi-eixos $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e $b = \dfrac{3}{2}$.

Representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} sen\, t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi .$$

Veja o gráfico:



d) $x^2 - 8y + 4 = 0$

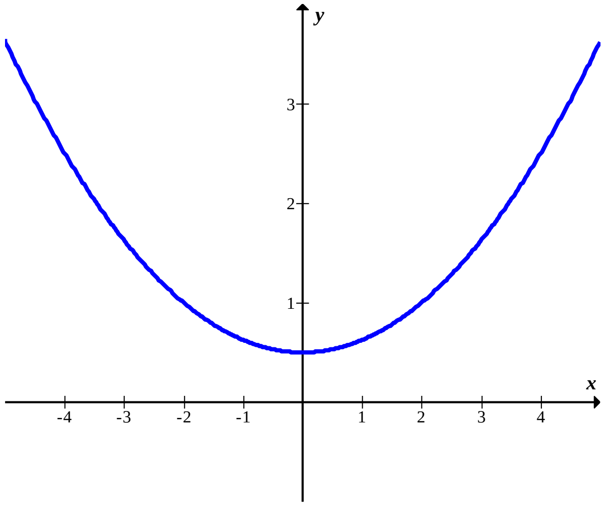
$8y = x^2 + 4$

$y = \dfrac{x^2 + 4}{8}$ é uma parábola.

Representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2 + 4}{8} \end{cases}$$

Veja o gráfico:



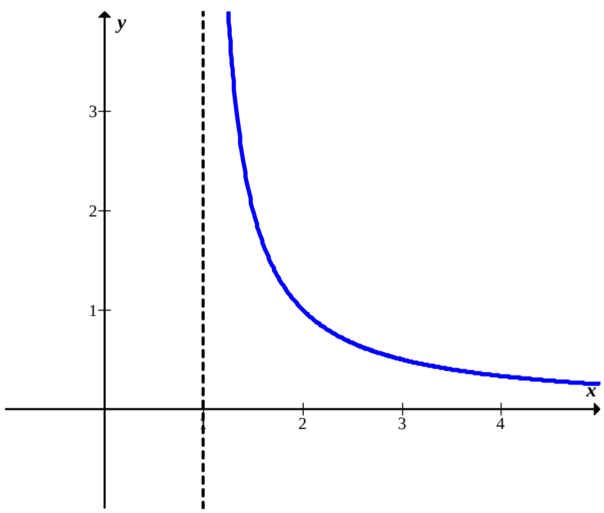
e) $y - \dfrac{1}{x-1} = 0$, $x>1$.

$y = \dfrac{1}{x-1}$ é uma hipérbole.

Representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t-1}, \ t\rangle 1 \end{cases}$$

Veja o gráfico:



19. Verificar que a curva $\vec{r}(t) = 3\cos h\, t\, \vec{i} + 5\, sen\, h\, t\, \vec{j}$ é a metade de uma hipérbole. Encontrar a equação cartesiana.

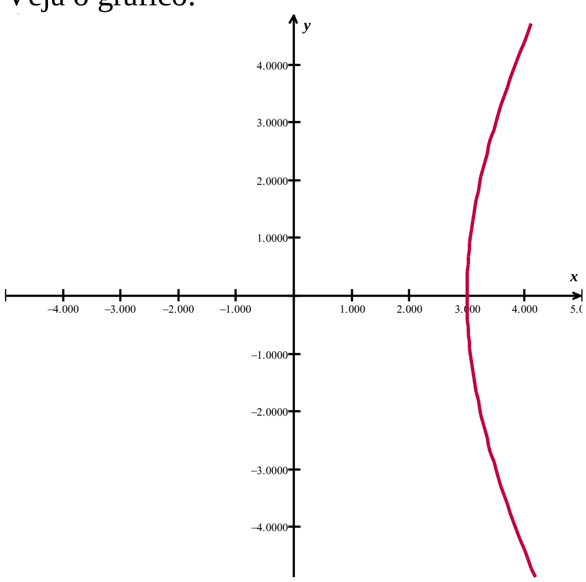
$$x = 3\cos h\, t$$
$$y = 5\, sen\, h\, t$$

$$x^2 = 9\cos h^2 t \Rightarrow 25x^2 = 225\cos h^2 t$$
$$y^2 = 25 sen\, h^2 t \Rightarrow 9y^2 = 225\, sen\, h^2 t$$

$$25x^2 - 9y^2 = 225$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \textit{É uma hipérbole}$$

$\cos ht \geq 1 \Rightarrow x = 3\cos ht \geq 3$, dessa forma vamos ter a metade da hipérbole.

Veja o gráfico:



20. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto A, na direção do vetor $\vec{b}$, onde:

a) $A\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\vec{r}(t) = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right) + t(2, -1, 0)$$
$$= (1 + 2t)\vec{i} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{j} + 2\vec{k}$$

b) $A(0,2)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - j$.

$$\vec{r}(t) = (0,2) + t(5,-1)$$
$$= 5t\,\vec{i} + (2-t)\vec{j}$$

c) $A(-1,2,0)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

$$\vec{r}(t) = (-1,2,0) + t(5,-2,5)$$
$$= (-1+5t)\vec{i} + (2-2t)\vec{j} + 5t\,\vec{k}$$

d) $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3}\right)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{k}$

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3}\right) + t(5,0,-3)$$
$$= \left(\sqrt{2} + 5t\right)\vec{i} + 2\vec{j} + \left(\sqrt{3} - 3t\right)\vec{k}$$

21. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos A e B, sendo:

a) $A(2,0,1)$ e $B(-3,4\,0)$

Temos que $\vec{b} = (-5,4,-1)$. Assim,

$$\vec{r}(t) = (2,0,1) + t(-5,4,-1)$$
$$= (2-5t)\vec{i} + 4t\,\vec{j} + (1-t)\vec{k}$$

b) $A(5,-1,-2)$ e $B(0,0,2)$

Temos que $\vec{b} = (-5,1,4)$. Assim,

$$\vec{r}(t) = (5,-1,-2) + t(-5,1,4)$$
$$= (5-5t)\vec{i} + (-1+t)\vec{j} + (-2+4t)\vec{k}$$

c) $A\left(\sqrt{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ e $B(-7,2,9)$

Temos que $\vec{b} = \left(-7-\sqrt{2}, 1, \frac{26}{3}\right)$. Assim,

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}, 1, \frac{1}{3}\right) + t\left(-7 - \sqrt{2}, 1, \frac{26}{3}\right)$$
$$= \left(\sqrt{2} - \left(7 + \sqrt{2}\right)t\right)\vec{i} + (1 + t)\vec{j} + \left(\frac{1}{3} + \frac{26}{3}t\right)\vec{k}$$

d) $A\left(\pi, \frac{\pi}{2}, 3\right)$ e $B(\pi, -1, 2)$

Temos que $\vec{b} = \left(0, -1 - \frac{\pi}{2}, -1\right)$. Assim,

$$\vec{r}(t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}, 3\right) + t\left(0, -1 - \frac{\pi}{2}, -1\right)$$
$$= \pi\,\vec{i} + \left(\frac{\pi}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)t\right)\vec{j} + (3 - t)\vec{k}$$

22. Determinar uma representação paramétrica da reta representada por:

a) $y = 5x - 1, z = 2$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (5t - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$.

b) $2x - 5y + 4z = 1$, $3x - 2y - 5z = 1$

Fazendo $x = t$ temos

$$2t - 5y + 4z = 1 \qquad\qquad 3t - 2y - 5z = 1$$
$$5y = 2t + 4z - 1 \qquad \text{e} \qquad 2y = 3t - 5z - 1$$
$$y = \frac{2t + 4z - 1}{5} \qquad\qquad y = \frac{3t - 5z - 1}{2}$$

Igualando os resultados, teremos:

$$\frac{2t + 4z - 1}{5} = \frac{3t - 5z - 1}{2}$$

$4t + 8z - 2 = 15t - 25z - 5$

$8z + 25z = 15t - 5 - 4t + 2$

$33z = 11t - 3$

$z = \dfrac{11t - 3}{33}$

Dessa forma podemos escrever:

$2y = 3t - 5.\dfrac{11t - 3}{33} - 1$

$2y = 3t - \dfrac{55t - 15}{33} - 1$

$66y = 99t - 55t + 15 - 33$

$y = \dfrac{44t - 18}{66}$

$y = \dfrac{22t - 9}{33}$

Portanto:

$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \dfrac{22t - 9}{33}\,\vec{j} + \dfrac{11t - 33}{33}\vec{k}$.

c) $2x - 5y + z = 4$; $y - x = 4$

$x = t$

$y = 4 + x = 4 + t$

$z = 4 - 2x + 5y$

ou

$z = 4 - 2t + 5(4 + t)$

$z = 4 - 2t + 20 + 5t$

$z = 3t + 24$

Portanto temos:

$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (4 + t)\vec{j} + (3t + 24)\vec{k}$

23. Encontrar uma equação vetorial das seguintes curvas:

a) $x^2 + y^2 = 4$; $z = 4$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,sen\,t \\ z = 4 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,sen\,t, 4)$.

b) $y = 2x^2$, $z = x^3$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = (t, 2t^2, t^3)$.

c) $2(x+1)^2 + y^2 = 10$, $z = 2$

Reescrevendo, temos:

$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1,\ z=2$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5}\cos t \\ y = \sqrt{10}\,sen\,t \\ z = 2 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = (-1 + \sqrt{5}\cos t)\vec{i} + \sqrt{10}\,sen\,t\,\vec{j} + 2\vec{k}$.

d) $y = x^{\frac{1}{2}}$, $z = 2$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^{\frac{1}{2}} \\ z = 2 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = \left(t, t^{\frac{1}{2}}, 2\right) \quad t \geq 0$.

e) $x = e^y$, $z = e^x$

$$\begin{cases} x = t \\ z = e^t \end{cases} \Rightarrow e^y = t \therefore y = \ln t$$

Temos: $\vec{r}(t) = (t, \ln t, e^t)$, $t \geq 0$.

f) $y = x$, $z = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t^2 + t^2 = 2t^2 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = (t, t, 2t^2)$.

g) Segmento de reta de $A(2,1,2)$ a $B(-1,1,3)$

Temos que $\overleftarrow{b} = (-3, 0, 1)$, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2,1,2) + t(-3, 01) \\ &= (2 - 3t)\vec{i} + \vec{j} + (2 + t)\vec{k} \end{aligned} \qquad \text{com } t \in [0,1].$$

h) Segmento de reta de $C(0,0,1)$ a $D(1,0,0)$

Temos que $\vec{b} = (1, 0, -1)$, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (0,0,1) + t(1,0,-1) \\ &= t\,\vec{i} + (1 - t)\vec{k} \end{aligned} \qquad \text{com } t \in [0,1].$$

i) Parábola $y = \pm\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$$

Assim, $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j}$ com $t \in [-1,1]$.

j) Segmento de reta de $A(1,-2,3)$ a $B(-1,0,-1)$

Temos que $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1,-2,3) + t(-2,2,-4) \\ &= (1 - 2t)\vec{i} + (-2 + 2t)\vec{j} + (3 - 4t)\vec{k} \end{aligned} \qquad \text{com } t \in [0,1].$$

k) $y = x^3 - 7x^2 + 3x - 2$, $0 \le x \le 3$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 - 7t^2 + 3t - 2 \end{cases}$$

Temos: $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (t^2 - 7t^2 + 3t - 2)\vec{j}$, com $0 \le t \le 3$.

l) $x + y + z = 1$, $z = x - 2y$

Fazendo:

$x = t$

$z = 1 - x - y = 1 - t - y$

$z = x - 2y = t - 2y$

Igualando, temos:

$1 - t - y = t - 2y$

$-y + 2y = t + t - 1$

$y = 2t - 1$

Assim,

$z = t - 2(2t - 1)$

$\quad = t - 4t + 2$

$\quad = -3t + 2$

Portanto, $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (2t - 1)\vec{j} + (-3t + 2)\vec{k}$.

m) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2x - 2y$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\,t \\ z = 2\cos t - 2\,sen\,t \end{cases}$$

Portanto, $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + sen\,t\,\vec{j} + (2\cos t - 2\,sen\,t)\vec{k}$ com $0 \le t \le 2\pi$.

n) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$, $z = y$

Fazendo

$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$

$x^2 + 2y^2 - 2y = 0$

$x^2 + 2(y^2 - y) = 0$

$x^2 + 2\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Assim,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} sen\, t \\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} sen\, t \end{cases}$$

Portanto,

$\vec{r}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\, \vec{i} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} sen\, t\right)\vec{j} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} sen\, t\right)\vec{k}$ com $0 \le t \le 2\pi$.

o) Segmento de reta de $E(3,3,-2)$ a $F(4,5,-2)$

Temos que $\vec{b} = (1,2,0)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (3,3,-2) + t(1,2,0) \\ &= (3+t)\vec{i} + (3+2t)\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$
, com $t \in [0,1]$.

CAPÍTULO 2
2.14 - Exercícios
pág. 65 - 68

1. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t)=\cos^3 t\vec{i}+\text{tg}t\vec{j}+\text{sen}^2 t\vec{k}$

$\vec{f}\,'(t)=-3\cos^2 t.\text{sen}t\vec{i}+\sec^2 t\vec{j}+2\text{sen}t\cos t\vec{k}$

b) $\vec{g}(t)=\text{sen}t\cos t\vec{i}+e^{-2t}\vec{j}$

$\vec{g}\,'(t)=\left(\cos^2 t-\text{sen}^2 t\right)\vec{i}-2e^{-2t}\vec{j}$

c) $\vec{h}(t)=(2-t)\vec{i}+t^3\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}$

$\vec{h}\,'(t)=-\vec{i}+3t^2\vec{j}+\frac{1}{t^2}\vec{k}$

d) $\vec{f}(t)=e^{-t}\vec{i}+e^{-2t}\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{f}\,'(t)=-e^{-t}\vec{i}-2e^{-2t}\vec{j}$

e) $\vec{g}(t)=\ln t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k}$

$\vec{g}\,'(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

f) $\vec{h}(t)=\frac{5t-2}{2t+1}\vec{i}+\ln\left(1-t^2\right)\vec{j}+5\vec{k}$

$$\vec{h}\,'(t)=\frac{(2t+1).5-2(5t-2)}{(2t+1)^2}\vec{i}+\frac{-2t}{1-t^2}\vec{j}$$

$$=\frac{10t+5-10t+4}{(2t+1)^2}\vec{i}-\frac{2t}{1-t^2}\vec{j}$$

$$=\frac{9}{(2t+1)^2}\vec{i}-\frac{2t}{1-t^2}\vec{j}$$

2. Determinar um vetor tangente à curva definida pela função dada no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t)=(t,t^2,t^3)$, $P(-1,1,-1)$

$\vec{f}\,'(t)=(1,2t,3t^2)$

$\vec{f}(-1)=(1,-2,3)$.

b) $\vec{g}(t)=(t,e^t)$, $P(1,e)$

$\vec{g}\,'(t)=(1,e^t)$

$\vec{g}\,'(1)=(1,e)$.

c) $\vec{h}(t)=(\text{sen}t,\cos t,t)$ $\quad P\left(1,0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\vec{h}\,'(t)=(\cos t,-\text{sen}t,1)$

$$\vec{h}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2},-\text{sen}\frac{\pi}{2},1\right)$$
$$=(0,-1,1).$$

d) $\vec{p}(t)=\left(1-t,\dfrac{1}{1-t}\right)$, $P(-1,-1)$

$$\vec{p}\,'(t)=\left(-1,\frac{1}{(1-t)^2}\right)$$

Para $P(-1,-1)$ temos $1-t=-1$ ou $t=2$. Assim,

$$\vec{p}\,'(2)=\left(-1,\frac{1}{1}\right)=(-1,1).$$

e) $\vec{r}(t)=(2t,\ln t,2)$ $\quad P(2,0,2)$

$$\vec{r}\,'(t)=\left(2,\frac{1}{t},0\right)$$

$\vec{r}\,'(1)=(2,1,0)$

3. Mostrar que a curva definida por $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2}\text{sen}\, t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determinar um vetor tangente à essa curva no ponto $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Temos que;

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\text{sen}\, t \\ y(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ z(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Podemos escrever

$$x^2 = \frac{1}{4}\text{sen}^2 t$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\cos^2 t$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Como

$z^2(t) = \frac{3}{4}$, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que é a esfera unitária centrada na origem.

O vetor tangente é dado por: $\vec{f}\,'(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{-1}{2}\text{sen}\, t, 0\right)$.

No ponto $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos $\left(\frac{1}{2}\text{sen}\, t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Portanto, $t = 0$ e $\vec{f}\,'(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

4. Determinar dois vetores unitários, tangentes à curva definida pela função dada, no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t) = \left(e^t, e^{-t}, t^2 + 1\right)$; $P(1,1,1)$

$\vec{f}(t) = \left(e^t, -e^{-t}, 2t\right)$

Para $P=(1,1,1)$, temos:

$$\begin{cases} e^t = 1 \\ e^{-t} = 1 \\ t^2+1=1 \Rightarrow t^2=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

Assim, $\vec{f}\,'(0)=\left(e^0,-e^{-0},2.0\right)=(1,-1,0)$.

Portanto, dois vetores tangentes são:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

b) $\vec{g}(t)=(4+2\cos t, 2+2\text{sen}\, t, 1)$; $P(4,4,1)$

$\vec{g}\,'(t)=(-2\text{sen}\, t, 2\cos t, 0)$.

Para $P(4,4,1)$ temos:

$$\begin{cases} 4+2\cos t=4 \Rightarrow 2\cos t=0 \Rightarrow \cos t=0 \\ 2+2\text{sen}\, t=4 \Rightarrow 2\text{sen}\, t=2 \Rightarrow \text{sen}\, t=1 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z.$$

Assim, $\vec{g}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-2,0,0)$.

Portanto, dois vetores unitários são: $(-1,0,0)$ e $(1,0,0)$.

c) $\vec{h}(t)=\left(\frac{1}{2}t, \sqrt{t+1}, t+1\right)$ $\qquad P=\left(1,\sqrt{3},3\right)$

$\vec{h}\,'(t)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}(t+1)^{-1/2},1\right)$

$P\left(1,\sqrt{3},3\right) \Rightarrow t=2$. Assim,

$\vec{h}\,'(2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},1\right)$.

Dois vetores unitários são:

$$\vec{u}=\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},1\right)}{\sqrt{\frac{3+1+12}{12}}} = \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},1\right)}{\frac{4}{2\sqrt{3}}} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{4},1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

e

$$-\vec{u}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

d) $\vec{r}(t) = (t\cos t\,,\, t\,\text{sen}\,t\,,\, t)$ $\quad P\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{r}\,'(t) = (-t.\text{sen}\,t + \cos t\,,\, t\cos t + \text{sen}\,t\,,1)$

$P\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Assim, $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}+0\,,1{,}1\right) = \left(-\frac{\pi}{2},1{,}1\right)$.

Dois vetores unitários são:

$$\vec{u} \Rightarrow \frac{\left(-\frac{\pi}{2},1,1\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1+1}} = \left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^2+8}{4}}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2+8}{4}}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2+8}{4}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+8}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{\pi^2+8}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{\pi^2+8}}\right)$$

$$-\vec{u} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+8}}\,,\,\frac{-2}{\sqrt{\pi^2+8}}\,,\,\frac{-2}{\sqrt{\pi^2+8}}\right)$$

5. Determinar os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t. Determinar, ainda, o módulo desses vetores no instante dado.

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 5\text{sen}\,t\,\vec{j} + 3\vec{k}\ ;\ t = \frac{\pi}{4}$

Vetor velocidade:

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -2\text{sen}\,t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j}$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 5.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$= \left(-\sqrt{2}\,,\,\frac{5\sqrt{2}}{2}\,,\,0\right)$$

Módulo do vetor velocidade:

$$\left|\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2+\frac{25.2}{4}} = \sqrt{\frac{29}{2}}\,.$$

Vetor aceleração:

$$\vec{a}(t) = -2\cos t\ \vec{i} - 5\operatorname{sen} t\ \vec{j}\ .$$

Módulo do vetor aceleração:

$$\left|\vec{a}\frac{(\pi)}{4}\right| = \sqrt{\frac{29}{2}}\ .$$

b) $\vec{r}(t) = e^t\ \vec{i} + e^{-2t}\ \vec{j}\ ;\ t = \ln 2$

Vetor velocidade:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\ '(t) = e^t\ \vec{i} - 2e^{-2t}\ \vec{j}$$

$$\vec{v}(\ln 2) = e^{\ln 2}\ \vec{i} - 2e^{-2\ln 2}$$

$$= 2\vec{i} - 2.2^{-2}\ \vec{j}$$

$$= 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\ .$$

Módulo do vetor velocidade:

$$|\vec{v}(\ln 2)| = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}\ .$$

Vetor aceleração:

$$\vec{a}(t) = e^t\ \vec{i} + 4e^{-2t}\ \vec{j}\ .$$

Módulo do vetor aceleração:

$$|\vec{a}(\ln 2)| = \sqrt{5}\ .$$

c) $\vec{r}(t) = \cos h\ t\ \vec{i} + 3\operatorname{sen} h t\ \vec{j}\ ;\ t = 0$

Vetor velocidade:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\ '(t) = \operatorname{sen} h\ \vec{i} + 3\cos h t\ \vec{j}$$

$$\vec{v}(0) = \operatorname{sen} h 0\ \vec{i} + 3\cos h 0\ \vec{j}$$

$$= 3\vec{j}$$

Módulo do vetor velocidade: $|\vec{v}(0)| = 3$.

Vetor aceleração:

$$\vec{a}(t) = \cos h t\ \vec{i} + 3\operatorname{sen} h + \vec{j}$$

Módulo do vetor aceleração:
$|\vec{a}(0)| = 1$

6. A posição de uma partícula em movimento no plano, no tempo t, é dada por
   $x(t) = \frac{1}{2}(t-1), y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1).$

a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento dessa partícula.

$\vec{f}(t) = \frac{1}{2}(t-1)\vec{i} + \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1)\vec{j}$.

b) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração.

$\vec{v}(t) = \vec{f}\,'(t) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{4}(2t-2)\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}(t-1)\vec{j}$.

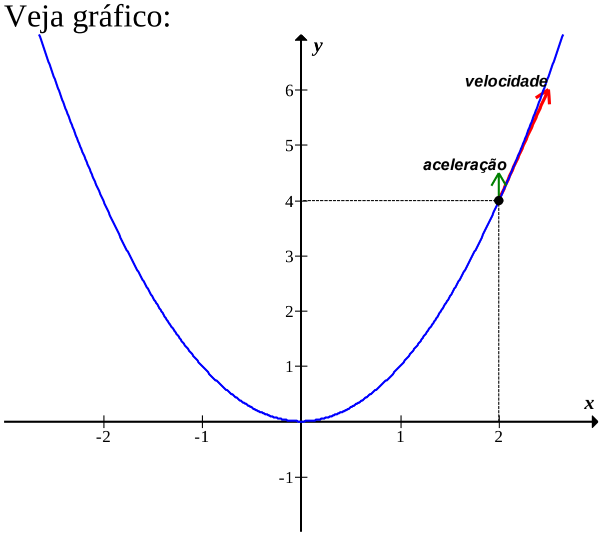
$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \frac{1}{2}\vec{j}$.

c) Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração no instante t =5.

$\vec{v}(5) = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$.

$\vec{a}(5) = \frac{1}{2}\vec{j}$.

Veja gráfico:



7. No instante t, a posição de uma partícula no espaço é dada por
   $x(t) = t^2$, $y(t) = 2\sqrt{t}$, $z(t) = 4\sqrt{t^3}$.

a) Escrever a função vetorial que nos dá a trajetória da partícula.

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2\sqrt{t}\,\vec{j} + 4\sqrt{t^3}\,\vec{k}\ .$$

b) Determinar um vetor tangente à trajetória da partícula no ponto $P(1,2,4)$.

$$\vec{r}\,'(t) = 2t\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{t}}\,\vec{j} + 6t^{1/2}\,\vec{k}\ .$$

$$P(1,2,4) \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \\ 2\sqrt{t} = 2 \\ 4\sqrt{t^3} = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad t = 1.$$

Assim, $\vec{r}\,'(1) = 2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.

c) Determinar a posição, velocidade e aceleração da partícula para t =4.
Vetor posição:

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2\sqrt{t}\,\vec{j} + 4\sqrt{t^3}\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(4) = 16\vec{i} + 4\vec{j} + 32\vec{k}$$ ou posição em (16,4,32).

Vetor velocidade:

$$\vec{r}\,'(t) = 2t\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{t}}\,\vec{j} + 6t^{1/2}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(4) = \vec{r}\,'(4) = 8\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 12\vec{k}$$

Vetor aceleração:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = 2\vec{i} - \frac{1}{2}t^{-3/2}\,\vec{j} + 6.\frac{1}{2}t^{-1/2}\,\vec{k}$$

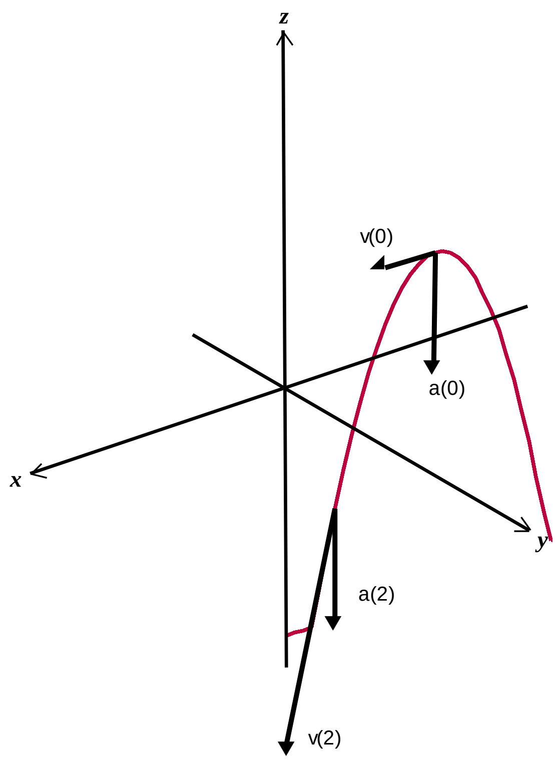
$$\vec{a}(4) = 2\vec{i} - \frac{1}{16}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}\ .$$

8. Uma partícula se move no espaço com vetor posição $\vec{r}(t)$. Determinar a velocidade e a aceleração da partícula num instante qualquer t. Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração para os valores indicados de t.

a) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + 4\vec{j} + (4 - t^2)\vec{k}\ ;\ t = 0; 2;$

$$\vec{v}(t) = \vec{i} + (-2t)\vec{k}$$
$$\vec{a}(t) = -2\vec{k}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{i}\ ; \quad \vec{v}(2) = \vec{i} - 4\vec{k}$$
$$\vec{a}(0) = \vec{a}(2) = -2\vec{k}$$



b) $\vec{r}(t) = \frac{1}{1+t}\vec{i} + t\vec{j}\,; t = 1; 2$

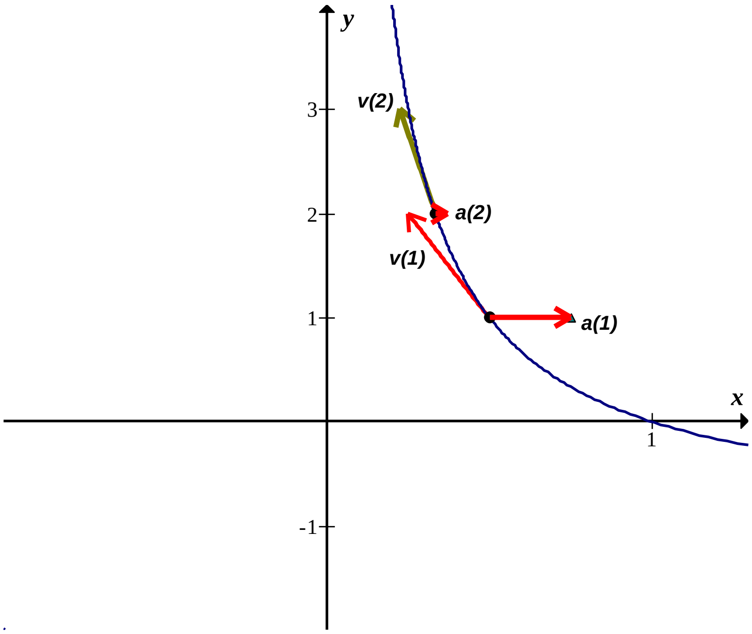
$$\vec{v}(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{2(1+t)}{(1+t)^4}\vec{i} = \frac{2}{(1+t)^3}\vec{i}$$

$$\vec{v}(1) = -\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j}$$

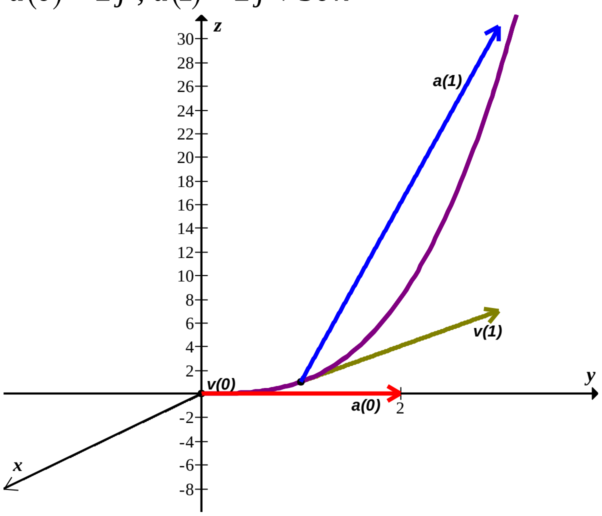
$$\vec{v}(2) = -\frac{1}{9}\vec{i} + \vec{j}$$

$\vec{a}(1) = \frac{1}{4}\vec{i}$ e $\vec{a}(2) = \frac{2}{27}\vec{i}$.



c) $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{j} + t^6\,\vec{k}\ ;\ t = 0;1$

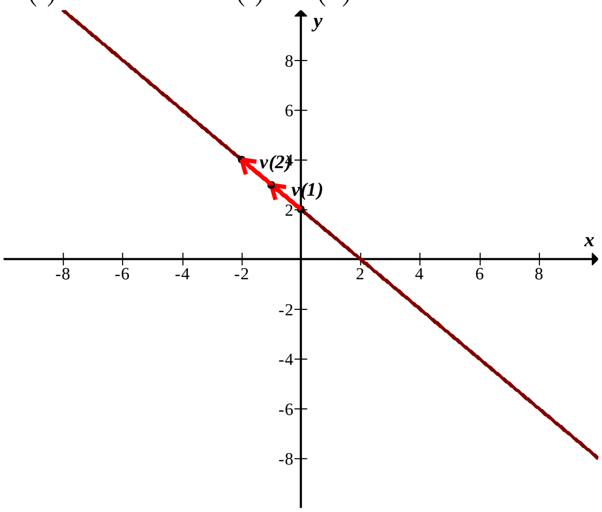
$$\vec{v}(t) = 2t\,\vec{j} + 6t^5\,\vec{k}$$
$$\vec{a}(t) = 2\vec{j} + 30t^4\,\vec{k}$$
$$\vec{v}(0) = \vec{0}\ ;\ \vec{v}(1) = 2\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$\vec{a}(0) = 2\vec{j}\ ;\ \vec{a}(1) = 2\vec{j} + 30\,\vec{k}$$



d) $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (1+t)\vec{j} \quad ; \quad t = 1; 2$

$\vec{v}(t) = -\vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{v}(1) = \vec{v}(2) = -\vec{i} + \vec{j}$

$\vec{a}(t) = \vec{0} \qquad \vec{a}(1) = \vec{a}(2) = \vec{0}$



9. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores constantes. Determinar o vetor velocidade das partículas cujo movimento é descrito por:

a) $\vec{r}_1(t) = \vec{a} + t\vec{b}$

$\vec{v}_1(t) = \vec{b}$

b) $\vec{r}_2(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$

$\vec{v}_2(t) = 2t\vec{a} + \vec{b}$

10. Se $\vec{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é perpendicular à $\vec{r}(t)$.

a) $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$\vec{v}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$$\vec{r}(t).\vec{v}(t) = -\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t$$
$$= 0 \Rightarrow \text{são perpendiculares}$$

b) $\vec{r}(t)=(\cos 3t, \text{sen}\, 3t)$

$\vec{r}(t)=(\cos 3t, \text{sen}\, 3t)$

$\vec{v}(t)=(-3\text{sen}\, 3t, 3\cos 3t)$

$\vec{r}(t).\vec{v}(t)=-3\cos 3t\ \text{sen}\, 3t+3\cos 3t\ \text{sen}\, 3t$

$=0 \Rightarrow \text{são perpendiculares}$

11. Em cada um dos itens do exercício anterior, mostrar que o vetor aceleração tem o sentido oposto ao do vetor posição.

a) $\vec{r}(t)=(\cos t, \text{sen}\, t)$

$\vec{v}(t)=(-\text{sen}\ t, \cos t)$

$\vec{a}(t)=(-\cos t, -\text{sen}\, t)$

$=-(\cos t, \text{sen}\, t)$

$=-\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{r}$ e $\vec{a}$ têm sentidos opostos

b) $\vec{r}(t)=(\cos 3t, \text{sen}\, 3t)$

$\vec{v}(t)=(-3\text{sen}3t, 3\cos 3t)$

$\vec{a}(t)=(-9\cos 3t, -9\text{sen}3t)$

$=-9(\cos 3t, \text{sen}3t)$

$=-9\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{r}$ e $\vec{a}$ têm sentidos opostos

12. Mostrar que, quando uma partícula se move com velocidade constante, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

Seja $\vec{v}(t)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ a velocidade da partícula onde a, b e c são constantes. Então

$\vec{a}(t)=0$ e

$\vec{v}(t).\vec{a}(t)=a.0+b.0+c.0$

$=0 \Rightarrow \vec{v}\ e\ \vec{a}\ \textit{são ortogonais}$

13. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores constantes não nulos. Seja $\vec{r}(t)=e^{2t}\,\vec{a}+e^{-2t}\,\vec{b}$. Mostrar que $\vec{r}\,''(t)$ tem o mesmo sentido de $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}\,'(t) = 2e^{2t}\,\vec{a} - 2e^{-2t}\,\vec{b}$$
$$\vec{r}\,''(t) = 4e^{2t}\,\vec{a} + 4e^{-2t}\,\vec{b}$$
$$= 4.\left[e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\,\vec{b}\right]$$
$$= 4.\vec{r}\,(t)$$

Portanto, $\vec{r}\,''(t)$ *e* $\vec{r}(t)$ *têm o mesmo sentido* .

14. Seja $\vec{r}\,(t) = 2\cos wt\,\vec{i} + 4\,\mathrm{sen}\,wt\,\vec{j}$ onde w é uma constante não nula. Mostrar que $\dfrac{d^2\vec{r}}{d\,t^2} = -w^2\,\vec{r}$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2w\,\mathrm{sen}\,wt\,\vec{i} + 4w\cos wt\,\vec{j}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2w^2\cos wt\,\vec{i} - 4w^2\mathrm{sen}\,wt\,\vec{j}$$
$$= -w^2\left(2\cos wt\,\vec{i} + 4\,\mathrm{sen}\,wt\,\vec{j}\right)$$
$$= -w^2\,\vec{r}$$

15. Dados $\vec{f}(t) = t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ e $\vec{g}(t) = t^2\vec{j} - t\,\vec{k}$, determinar:

a) $\left(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right)'$

$$\vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & t^2 & -t \end{vmatrix} = \left(-t^2 - t^4\right)\vec{i} + (0).\vec{j} + (0).\vec{k}$$

$$\left(\vec{f}\,(t) \times \vec{g}\,(t)\right)' = \left(-2t - 4t^3, 0, 0\right).$$

b) $\left(\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right)'$

$$\left(\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right)' =$$
$$\vec{f}(t).\vec{g}\,'(t) + \vec{f}\,'(t).\vec{g}(t) = \left(0, t, t^2\right).(0, 2t, -1) + (0, 1, 2t).\left(0, t^2, -t\right) =$$
$$= 2t^2 - t^2 + t^2 - 2t^2 = 0.$$

c) $\left(\vec{f}(t)\times\vec{f}(t)\right)'$

$$\vec{f}(t)\times\vec{f}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & t & t^2\\ 0 & t & t^2\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

$$\left(\vec{f}(t)\times\vec{f}(t)\right)'=\vec{0}$$

d) $\left(\vec{g}(t).\vec{g}(t)\right)'$

$$\left(\vec{g}(t).\vec{g}(t)\right)'=\left[t^4+t^2\right]'=4t^3+2t\,.$$

16. Se $f(t)=\dfrac{1}{t-1}$ e $\vec{f}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}$, determinar $\left(f(t).\,\vec{f}(t)\right)'$.

$$f(t).\,\vec{f}(t)=\frac{t}{t-1}\vec{i}+\frac{t^2}{t-1}\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\left(f(t).\,\vec{f}(t)\right)'&=\frac{(t-1)-t.1}{(t-1)^2}\,\vec{i}+\frac{(t-1).2t-t^2}{(t-1)^2}\,\vec{j}\\ &=\frac{t-1-t}{(t-1)^2}\,\vec{i}+\frac{2t^2-2t-t^2}{(t-1)^2}\,\vec{j}\\ &=\frac{-1}{(t-1)^2}\,\vec{i}+\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\,\vec{j}.\end{aligned}$$

17. Sejam $f(t)$ uma função real duas vezes derivável e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores constantes. Mostrar que se $\vec{g}(t)=\vec{a}+\vec{b}\;f(t)$, então $\vec{g}\,'(t)\times\vec{g}\,''(t)=\vec{0}$.

$$\vec{g}(t)=\vec{a}+\vec{b}\,.\,f(t)$$

$$\vec{g}\,'(t)=\vec{b}\,.\,f\,'(t)=\left(b_1\,.\,f\,'(t),b_2\,.\,f\,'(t),b_3\,.\,f\,'(t)\right)$$

$$\vec{g}\,''(t)=\vec{b}\,.\,f\,''(t)=\left(b_1\,.\,f\,''(t),b_2\,.\,f\,''(t),b_3\,.\,f\,''(t)\right)$$

$$\vec{g}\,'(t)\times\vec{g}\,''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 f' & b_2 f' & b_3 f'\\ b_1 f'' & b_2 f'' & b_3 f''\end{vmatrix}$$

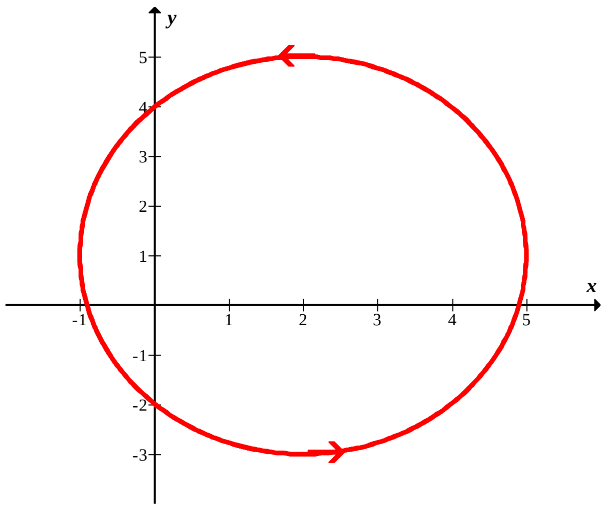
$$\begin{aligned}&=\left(b_2 f' b_3 f'' - b_2 f'' b_3 f'\right)\vec{i}+\left(-b_1 f' b_3 f'' + b_1 f'' b_3 f'\right)\vec{j}+\left(b_1 f' b_2 f'' - b_1 f'' b_2 f'\right)\vec{k}\\ &=\vec{0}.\end{aligned}$$

18. Se $\vec{f}$ é uma função vetorial derivável e $h(t)=\left|\vec{f}(t)\right|$, mostrar que
$\vec{f}(t).\,\vec{f}\,'(t)=h(t).h'(t)$.

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(t)= f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}\\
&h(t)=\left|\vec{f}(t)\right|=\sqrt{f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)}\\
&f'(t)= f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}\\
&\vec{f}(t).\,\vec{f}\,'(t)= f_1(t).\,f_1'(t)+f_2(t).\,f_2'(t)+f_3(t).\,f_3'(t)\\
&h(t)\cdot h'(t)=\sqrt{f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)}\,\frac{2.f_1(t)f_1'(t)+2f_2(t)f_2'(t)+2f_3(t)f_3'(t)}{2\sqrt{f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)}}\\
&\qquad = f_1(t).\,f_1'(t)+f_2(t).\,f_2'(t)+f_3(t).\,f_3'(t)\\
&\qquad = \vec{f}(t).\,\vec{f}\,'(t)
\end{aligned}$$

19. Esboçar as curvas seguintes, representando o sentido positivo de percurso. Obter uma parametrização da curva dada, orientada no sentido contrário.

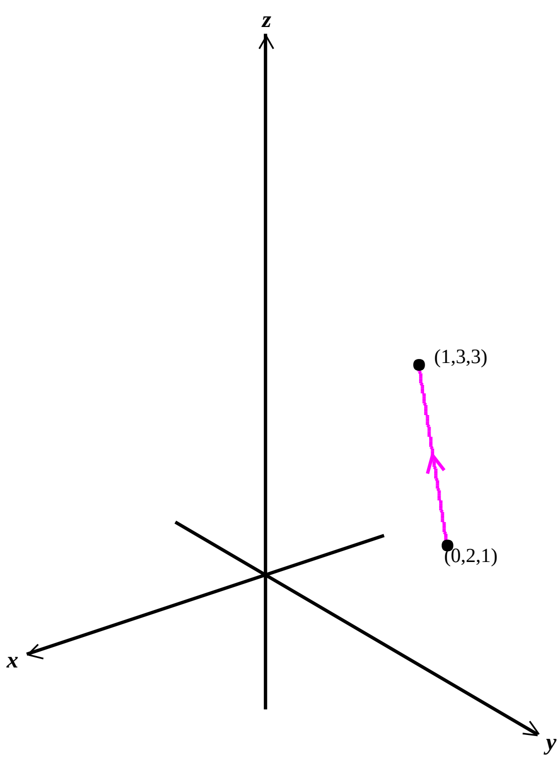
a) $\vec{r}(t)=(2+3\cos t,\ 1+4\,sent),\quad t\ \in[0,\,2\pi]$



$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(a+b-t) = \vec{r}(2\pi - t) =$$
$$= \left(2 + 3(\cos 2\pi - t),\ 1 + 4\,\text{sen}(2\pi - t)\right) =$$
$$= (2 + 3\cos t, 1 - 4\text{sen}\ t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

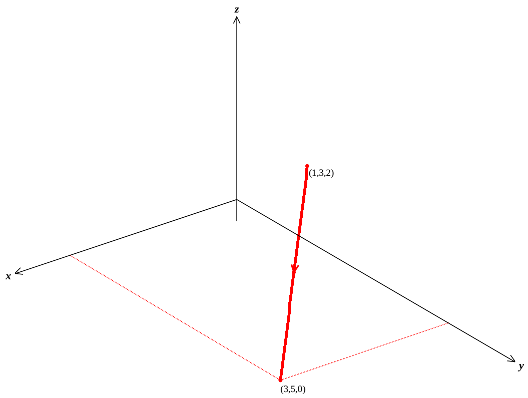
b) $\vec{r}(t) = (t, t+2,\ 2t+1), \quad t \in [0, 1]$

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(0+1-t) = \vec{r}(1-t) =$$
$$= (1-t, 1-t+2, 2(1-t)+1) =$$
$$= (1-t, 3-t, 3-2t), \quad t \in [0, 1].$$



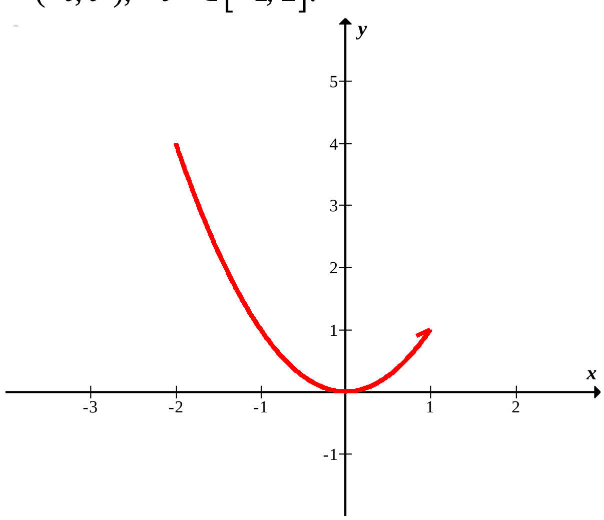
c) $\vec{r}(t)=(2t-1,\ 2t+1,\ 4-2t),\quad t\ \in[1,\ 2]$

$$\vec{r}^{\,-}(t)=\vec{r}(1+2-t)=\vec{r}(3-t)=$$
$$=(2(3-t)-1,\ 2(3-t)+1,\ 4-2(3-t))=$$
$$=(5-2t,\ 7-2t,\ -2+2t),\quad t\ \in[1,\ 2].$$



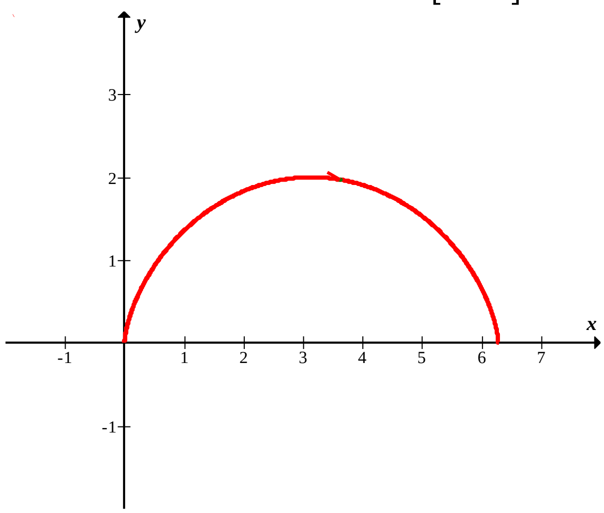
d) $\vec{r}(t)=(t-1,\ t^2-2t+1),\quad t\ \in[-1,\ 2]$

$$\vec{r}^{\,-}(t)=\vec{r}(-1+2-t)=\vec{r}(1-t)=$$
$$=(1-t-1,\ (1-t)^2-2(1-t)+1)=$$
$$=(-t,\ t^2),\quad t\ \in[-1,\ 2].$$



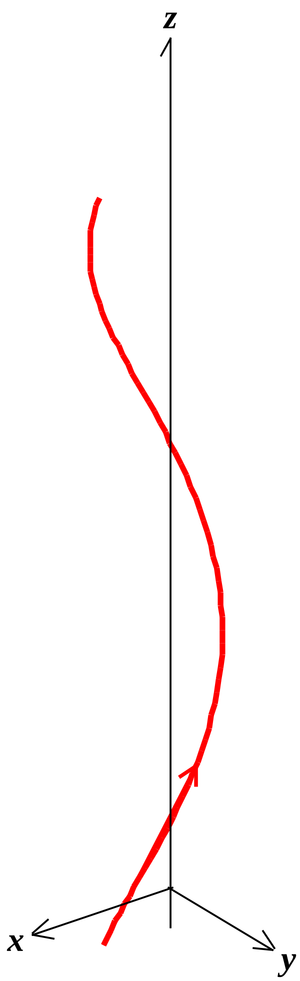
e) $\vec{r}(t)=(t-sent,\ 1-\ \cos t),\quad t\ \in[0,\ 2\pi]$

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(0+2\pi-t) = \vec{r}(2\pi-t) =$$
$$= (2\pi - t - \text{sen}(2\pi-t), 1-\cos(2\pi-t)) =$$
$$= (2\pi - t + \text{sen}\, t, 1-\cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



f) $\vec{r}(t) = (1+\cos t,\ 1+\text{sen}\, t,\ 2t), \quad t \in [0, 4\pi]$

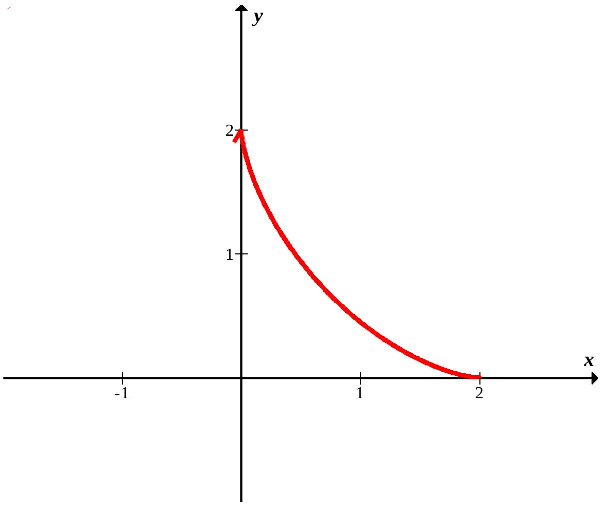
$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(0+4\pi-t) = \vec{r}(4\pi-t) =$$
$$= (1+\cos(4\pi-t), 1+\text{sen}(4\pi-t), 2(4\pi-t)) =$$
$$= (1+\cos t, 1-\text{sen}\, t, 8\pi-2t), \quad t \in [0, 4\pi].$$



g) $\vec{r}(t) = \left(2\cos^3 t,\ 2\,\mathrm{sen}^3 t\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(0 + \frac{\pi}{2} - t) = \vec{r}(\pi/2 - t) =$$

$$= (2\cos^3(\pi/2 - t), 2\mathrm{sen}^3(\pi/2 - t)), \quad t \in [0, \pi/2].$$



20. Se $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ para todos os reais t, determinar todos os pontos da curva descrita por $\vec{r}(t)$ nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4,4,3)$. Existem alguns pontos nos quais a tangente é perpendicular a $(4,4,3)$?

$$\vec{r}\,'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$= (4,4,3)$$

$$\alpha(1, 2t, 3t^2) = (4,4,3)$$

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ 2\alpha t = 4 \Rightarrow t = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ 3\alpha t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$.

$$(1,\ 2t, 3t^2).(4,4,3) = 0$$
$$4 + 8t + 9t^2 = 0$$
$$9t^2 + 8t + 4 = 0$$

Como as raízes são complexas, não existem pontos nos quais a tangente é perpendicular a $(4,4,3)$.

21. Verificar que a curva $\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$ está sobre um cone.

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\,\mathrm{sen}\,t \\ z = t \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 = t^2\cos^2 t \\ y^2 = t^2 sen^2 t \end{matrix}\right\} x^2 + y^2 = z^2 \textit{ é a equação de um cone}$$

22. Verificar quais das seguintes curvas são suaves.

a) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [-1,1]$

$\vec{r}\,'(t) = (3t^2, 2t)\textit{é cont. em}[-1,1]$

$\vec{r}\,'(t) = (3t^2, 2t)$ não é $\neq 0$ $\textit{para } t \in [-1,1] \textit{ pois em } t = 0, \vec{r}\,'(t) = \vec{0}$

$\therefore$ *não é suave.*

b) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Neste caso a curva é suave em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, pois $\vec{r}\,'(t)$ é contínua e $\neq \vec{0}$ em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c) $\vec{r}(t) = 2(t - \mathrm{sen}\,t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}, t \in [\pi, 3\pi]$

$\vec{r}\,'(t) = 2(1 - \cos t)\vec{i} + 2\mathrm{sen}\,t\,\vec{j}$ é contínua em $[\pi, 3\pi]$.

$\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$

$2(1 - \cos t) = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0 + 2k\pi$

$2\,\mathrm{sen}\,t = 0 \qquad \Rightarrow t = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$ *em* $t = 2\pi$ que é ponto do intervalo $[\pi, 3\pi] \Rightarrow$ não é suave.

d) $\vec{r}(t) = (3\cos^3 t, 3\mathrm{sen}^3 t), t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\vec{r}\,'(t) = \left(3.3\cos^2 t\left(-\operatorname{sen} t\right), 3.3\operatorname{sen}^2 t.\cos t\right)$$
$$= \left(-9\cos^2 t \operatorname{sen} t, 9\operatorname{sen}^2 t \cos t\right)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{0} \Rightarrow -9\cos^2 t \operatorname{sen} t = 0$$
$$9\operatorname{sen}^2 t \cos t = 0$$

$$t = 0 + k\pi,\ k \in \mathrm{Z} \qquad ou \qquad t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\therefore \text{é suave em} \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

e) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 3sen t),\ t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{r}\,' = (-2sen t, 3\cos t) \textit{é suave em} [0, 2\pi].$$

23. Verificar que as equações vetoriais
$$\vec{r}(w) = \left(w, w^2\right),\ 2 \le w \le 3$$
$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{t}, t\right),\ 4 \le t \le 9$$
representam a mesma curva.

Temos que:
$$\left.\begin{array}{l} x = w \\ y = w^2 \end{array}\right\} y = x^2,\ 2 \le x \le 3$$
e
$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{array}\right\} y = x^2,\ 4 \le y \le 9 \text{ ou } 2 \le x \le 3.$$
Portanto, tem-se a mesma curva.

24. Determinar o comprimento de arco das seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = \left(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t\right), \quad 0 \le t \le 1$

Temos:
$$\vec{r}\,'(t) = \left(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t, e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t, e^t\right)$$
$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3}e^t.$$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}e^t \Big|_0^1 = \sqrt{3}(e-1).$$

b) $\vec{r}(t) = \left(2t^3,\, 2t,\, \sqrt{6}t^2\right), \quad 0 \le t \le 3$

Temos:

$$\vec{r}'(t) = \left(6t^2,\, 2,\, 2\sqrt{6}t\right)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{36t^4 + 4 + 24t^2}$$

$$= \sqrt{4(3t^2+1)^2} = 2(3t^2+1).$$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^3 2(3t^2+1)dt = 60.$$

c) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + (1+\cos t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Temos:

$$\vec{r}'(t) = (1,\, \cos t,\, -\operatorname{sen} t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}$$

$$= \sqrt{2}.$$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

d) $y = x^{3/2}, \;\; z = 0 \text{ de } P_0(0, 0, 0) \text{ a } P_1(4, 8, 0)$

Temos:

$$\vec{r}(t) = \left(t,\, t^{3/2},\, 0\right)$$

$$\vec{r}'(t) = \left(1,\, \frac{3}{2}t^{1/2},\, 0\right)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\,dt = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

e) $x = t^3, \ y = t^2, \ 1 \leq t \leq 3$

Temos:

$\vec{r}(t) = \left(t^3, t^2\right)$

$\vec{r}\,'(t) = \left(3t^2, 2t\right)$

$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = t(9t^2+4)^{1/2}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_1^3 t(9t^2+4)^{1/2}dt = \frac{1}{27}(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}).$$

f) hélice circular $\vec{r}(t) = \left(2\cos t, 4t, 2\,sent\right)$ de $P_0\left(2, 0, 0\right)$ a $P_1\left(0, 2\pi, 2\right)$

Temos:

$\vec{r}\,'(t) = \left(-2\text{sen}\, t, 4, 2\cos t\right)$

$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{4\text{sen}^2 t + 16 + 4\cos^2 t} = \sqrt{20}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{20}dt = \sqrt{5}\pi.$$

g) um arco da ciclóide $\vec{r}(t) = 2\left(t - \text{sen}\, t\right)\vec{i} + 2\left(1 - \cos t\right)\vec{j}$

Temos:

$\vec{r}\,'(t) = \left(2(1-\cos t), 2\text{sen}\, t\right)$

$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{4(1-\cos t)^2 + 4\text{sen}^2 t} = \sqrt{8(1-\cos t)}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{8}(1-\cos t)^{1/2}dt = 16.$$

h) $\vec{r}(t) = \left(-\text{sen}\, t, \cos t, 2\right)$ para $t \in \left[0, 2\pi\right]$

Temos:

$\vec{r}\,'(t) = \left(-\cos t, -\text{sen}\, t, 0\right)$

$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

i) $\vec{r}(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t)$ para $t \in [0, \pi]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (t \cos t + \operatorname{sen} t, -t \operatorname{sen} t + \cos t)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(t \cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - t \operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{t^2 + 1}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^{\pi} (1 + t^2)^{1/2} dt = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{2}\ln|\pi + \sqrt{1+\pi^2}|.$$

j) $\vec{r}(t) = (3t+1)\vec{i} + (t+2)\vec{j}$ *para* $t \in [0, 2]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (3, 1)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^2 \sqrt{10}\, dt = 2\sqrt{10}.$$

k) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, $t \in [0, 1]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (e^t, -e^t, \sqrt{2})$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$

Assim,

$$l = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}\, dt = e - \frac{1}{e}.$$

25. Escrever a função comprimento de arco de:

a) $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 2t\right)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}, 2\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} + 4} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t \frac{\sqrt{17}}{2}\, dt^* = \frac{\sqrt{17}}{2} t.$$

b) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \text{sen } 2t, 4)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (-2\text{sen}2t, 2\cos 2t, 0)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4\text{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t 2dt^* = 2t$.

c) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (1,2t)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t \sqrt{1+4t^{*2}}\, dt^* = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{2}\ln|2t + \sqrt{1+4t^2}|$.

d) $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t, \text{sen}^3 t, \frac{3}{4}\cos 2t\right)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-3\cos^2 t\text{sen}t, 3\text{sen}^2 t\cos t, -\frac{3}{2}\text{sen}2t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t\text{sen}^2 t + 9\text{sen}^4 t\cos^2 t + \frac{9}{4}\text{sen}^2 2t} = 3\sqrt{2}\cos t\text{sen } t$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t 3\sqrt{2}\cos t^* \text{sen } t^* dt^* = \frac{3\sqrt{2}}{2} sen^2 t$.

e) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \text{sen } 2t) \quad t \in [0, \pi]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (-2\text{sen}2t, -2\cos 2t)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4\text{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t 2dt^* = 2t$.

f) hipociclóide $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\, sen^3 t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}t,\, 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t\right)$

$|\,\vec{r}'(t)\,| = \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t + 9a^2\mathrm{sen}^4 t\cos^2 t} = 3a\cos t\,\mathrm{sen}\; t$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)\,|\,dt^* = \int_0^t 3a\cos t^*\mathrm{sen}\; t^* dt^* = \frac{3a}{2}\mathrm{sen}^2 t\,.$

26. Reparametrizar pelo comprimento de arco as seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}\,\cos t,\, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}t\right) \quad t \in [0, 2\pi]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-\sqrt{2}\mathrm{sen}\; t,\, \sqrt{2}\cos t\right)$

$|\,\vec{r}'(t)\,| = \sqrt{2\mathrm{sen}^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)\,|\,dt^* = \int_0^t \sqrt{2}dt^* = \sqrt{2}t\,.$

Assim, $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ e $\vec{h}(s) = \left(\sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\; \sqrt{2}\;\mathrm{sen}\;\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\; s \in \left[0,\; 2\sqrt{2}\pi\right].$

b) $\vec{r}(t) = (3t - 1, t + 2)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (3,1)$

$|\,\vec{r}'(t)\,| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)\,|\,dt^* = \int_0^t \sqrt{10}dt^* = \sqrt{10}t\,.$

Assim, $t = \frac{s}{\sqrt{10}}$ e $\vec{h}(s) = \left(\frac{3s}{\sqrt{10}} - 1,\; \frac{s}{\sqrt{10}} + 2\right),\; s \geq 0$

c) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \mathrm{sen}\; 2t, 2t)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (-2\mathrm{sen}2t, -2\cos 2t, 2)$

$|\,\vec{r}'(t)\,| = \sqrt{4\mathrm{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t + 4} = 2\sqrt{2}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)\,|\,dt^* = \int_0^t 2\sqrt{2}dt^* = 2\sqrt{2}t\,.$

Assim, $t = \frac{s}{2\sqrt{2}}$ e $\vec{h}(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\; \mathrm{sen}\frac{s}{\sqrt{2}},\; \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$

d) $\vec{r}(t) = \left(2t,\ \dfrac{2}{3}\sqrt{8t^3},\ t^2\right) \quad t \quad \in [0, 3]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(2, \sqrt{8}t^{1/2}, 2t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4 + 8t + 4t^2} = 2t + 2$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t (2t^* + 2)dt^* = t^2 + 2t$.

Assim, $t = -1 \pm \sqrt{1+s}$ e

$\vec{h}(s) = \left(2\left(-1 + \sqrt{1+s}\right),\ \dfrac{2}{3}\sqrt{8}\left(-1 + \sqrt{1+s}\right)^{3/2},\ \left(-1 + \sqrt{1+s}\right)^2\right); s \in [0,\ 15]$

e) $\vec{r}(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t\right)$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t,\ e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t,\ e^t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t)^2 + e^{2t}} = \sqrt{3}e^t$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t \sqrt{3}e^{t^*} dt^* = \sqrt{3}(e^t - 1).$

Assim, $t = \ln \dfrac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ e

$\vec{h}(s) = \left(\dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cos\left(\ln \dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right),\ \dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\ln \dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right),\ \dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).$

f) $\vec{r}(t) = \left(\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t\right) \quad t \quad \in [0, \pi]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-2\operatorname{sen} 2t, -2\cos 2t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\, dt^* = \int_0^t 2dt^* = 2t$.

Assim, $t = \dfrac{s}{2}$ e $\vec{h}(s) = (\cos s,\ \operatorname{sen} s),\ s \in [0,\ 2\pi]$

g) hipociclóide $\vec{r}(t) = \left(a\cos^3 t,\, a\,\text{sen}^3 t\right) \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t,\, 3a\,\text{sen}^2 t\cos t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9a^2\text{sen}^4 t\cos^2 t} = 3a\cos t\,\text{sen}\,t$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\,dt^* = \int_0^t 3a\cos t^*\,\text{sen}t^*\,dt^* = \dfrac{3a}{2}\text{sen}^2 t.$

Assim, $\text{sen}\,t = \sqrt{\dfrac{2s}{3a}}, \quad t \in [0, \pi/2]$ e $\vec{h}(s) = \left(a\left(1 - \dfrac{2s}{3a}\right)^{3/2},\ a\left(\dfrac{2s}{3a}\right)^{3/2}\right),\ 0 \le s \le \dfrac{3a}{2}.$

h) hélice circular $x = 2\cos t,\ y = 4t,\ z = 2\,\text{sen}\,t, \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = \left(-2\text{sen}\,t, 4, 2\cos t\right)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4\text{sen}^2 t + 16 + 4\cos^2 t} = \sqrt{20}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\,dt^* = \int_0^t \sqrt{20}\,dt^* = \sqrt{20}t.$

Assim, $t = \dfrac{s}{\sqrt{20}}$ e $\vec{h}(s) = \left(2\cos\dfrac{s}{2\sqrt{5}},\ \dfrac{2s}{\sqrt{5}},\ 2\,\text{sen}\,\dfrac{s}{2\sqrt{5}}\right),\ 0 \le s \le \sqrt{5}\pi$

i) $x = 1 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3t \quad t \in [0, 1]$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (-1, 2, 3)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)|\,dt^* = \int_0^t \sqrt{14}\,dt^* = \sqrt{14}t.$

Assim, $t = \dfrac{s}{\sqrt{14}}$ e $\vec{h}(s) = \left(1 - \dfrac{s}{\sqrt{14}},\ 2 + \dfrac{2s}{\sqrt{14}},\ \dfrac{3s}{\sqrt{14}}\right),\ 0 \le s \le \sqrt{14}.$

27. Verificar se as curvas dadas estão parametrizadas pelo comprimento de arco:

a) $\vec{r}(t) = (\text{sen}\,t, \cos t), \quad t \ge 0$

Temos:

$\vec{r}'(t) = (\cos t, -\text{sen}\,t)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1$.

Portanto, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

b) $\vec{r}(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{7}}, \sqrt{\dfrac{6}{7}} s \right), \quad s \geq 0$

Temos:

$$\vec{r}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}} \right)$$

$$|\vec{r}'(s)| = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{6}{7}} = 1.$$

Portanto, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

c) $\vec{r}(t) = (2t - 1, t + 2, t), \quad t \geq 0$

Temos:

$$\vec{r}'(t) = (2,1,1)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \neq 1.$$

Portanto, a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco.

d) $\vec{q}(s) = \left(a \cos \dfrac{s}{c}, a \text{ sen } \dfrac{s}{c}, b \dfrac{s}{c} \right), \quad \text{onde } c^2 = a^2 + b^2$

Temos:

$$\vec{q}'(s) = \left(-a \text{ sen } \frac{s}{c} \cdot \frac{1}{c}, a \cos \frac{s}{c} \cdot \frac{1}{c}, \frac{b}{c} \right)$$

$$|\vec{q}'(s)| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} \text{sen}^2 \frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \frac{s}{c} + \frac{b^2}{c^2}} = 1.$$

Portanto, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

e) $\vec{h}(s) = (2 \cos s, 2 \text{ sen } s), \quad s \in [0, 2\pi]$

Temos:

$$\vec{h}'(s) = (-2\text{sen } s, 2 \cos s)$$

$$|\vec{h}'(s)| = \sqrt{4 \cos^2 s + 4 \text{sen}^2 s} = 2 \neq 1.$$

Portanto, a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco.

f) $\vec{r}(s) = \left(4\cos\frac{s}{4}, 4\,\text{sen}\,\frac{s}{4}\right), \quad s \in [0, 8\pi]$

Temos:

$$\vec{r}'(s) = \left(-\text{sen}\,\frac{s}{4}, \cos\frac{s}{4}\right)$$

$$|\vec{r}'(s)| = \sqrt{\cos^2\frac{s}{4} + \text{sen}^2\,\frac{s}{4}} = 1.$$

Portanto, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

g) $\vec{r}(s) = \ln(s+1)\vec{i} + \left(\frac{s^3}{3} + s^2\right)\vec{j}\,,\ s \geq 0$

Temos:

$$\vec{r}'(s) = \left(\frac{1}{s+1}, s^2 + 2s\right)$$

$$|\vec{r}'(s)| = \sqrt{\frac{1}{(s+1)^2} + (s^2+2s)^2} \neq 1.$$

Portanto, a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco.

h) $\vec{h}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad s \geq 0$

Temos:

$$\vec{h}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|\vec{h}'(s)| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Portanto, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

28. Uma partícula move-se no plano de modo que, no instante *t*, sua posição é dada por $\vec{r}(t) = \left(2\cos\frac{t}{2}, 2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\right)$.

a) Calcular o vetor $\vec{u}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$ onde $\vec{v}(t)$ é o vetor velocidade da partícula no instante *t*.

Temos:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left(-\text{sen}\,\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(\text{sen}^2\,\frac{t}{2} + \cos^2\,\frac{t}{2}\right)} = 1$$

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \left(-\text{sen}\,\frac{t}{2}, \cos\,\frac{t}{2}\right).$$

b) Mostrar que $\vec{u}(t)$ e $\frac{d\vec{u}}{dt}$ são ortogonais.

Temos:

$$\vec{u}(t) = \left(-\text{sen}\,\frac{t}{2}, \cos\,\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\cos\,\frac{t}{2}, -\frac{1}{2}\text{sen}\,\frac{t}{2}\right)$$

$$\vec{u}(t)\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = -\text{sen}\,\frac{t}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\,\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\text{sen}\,\frac{t}{2} = 0$$, portanto são ortogonais.

29 Escrever a função vetorial que associa a cada ponto do plano *xy* o triplo de seu vetor posição.

Temos: $\vec{f}(x,y) = 3x\vec{i} + 3y\vec{j}$

30 Escrever a função vetorial que associa a cada ponto do espaço um vetor unitário com mesma direção do vetor posição e sentido contrário.

Temos:

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\vec{j} - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\vec{k}\,,\ (x,y,z) \neq \vec{0}$$

31. Dar o domínio das seguintes funções vetoriais.

a) $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4-x^2-y^2}\,\vec{k}$

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$4 \geq x^2 + y^2 \ ou \ x^2 + y^2 \leq 4$$

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

b) $\vec{g}(x,y) = \frac{1}{x}\vec{i} + xy\vec{j}$

$D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x \neq 0\}$

c) $\vec{h}(x, y) = \{x^2 + y^2, x\sqrt{y}, xy\}$

$D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y \geq 0\}$

d) $\vec{p}(x, y, z) = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{1}{z}\right)$

$D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$

e) $\vec{q}(x, y) = \left(\frac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$

$D = \{(xy) \in \Re^2 / \, xy > 0\}$

f) $\vec{u}(x, y, z) = x^2 y\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{z}\,\vec{k}$

$D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, z \geq 0\}$

g) $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{i} + \sqrt{x + z}\,\vec{k}$

$D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x + z \geq 0 \;\; ou \;\; x \geq -z\}$

h) $\vec{r}(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\;\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\;\vec{j} + z\vec{k}$

$D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

CAPÍTULO 3
3.7 – EXERCÍCIOS
pág. 91-94

1. Identificar quais dos conjuntos seguintes são bolas abertas em R^2 ou R^3, determinando, em caso positivo, o centro e o raio.

   a) $x^2 + y^2 - 2y < 3$

$x^2 + y^2 - 2y < 3$

$(x-0)^2 + (y-1)^2 < 4$

Bola aberta de centro $P_0 = (0,1)$ e raio $r = 2$.

   b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6z < 0$

$x^2 + y^2 + (z+3)^2 - 9 < 0$

$x^2 + y^2 + (z+3)^2 < 9$

Bola aberta centrada em $P_0 = (0, 0, -3)$ e raio igual a três.

   c) $x^2 + y^2 < z^2$

Não é uma bola.

   d) $x^2 + y^2 + 2x > (x-1)^2 + (y-2)^2$

$x^2 + y^2 + 2x - (x-1)^2 - (y-2)^2 > 0$

$4x + 4y > 5$

Não é uma bola.

   e) $x^2 + y^2 - 1 > 0$

$x^2 + y^2 > 1$

Não é uma bola

   f) $x^2 + 4x + y^2 < 5$

$(x+2)^2 + (y-0)^2 < 9$

Bola aberta centrada em $P_0 = (-2, 0)$ $e\ r = 3$.

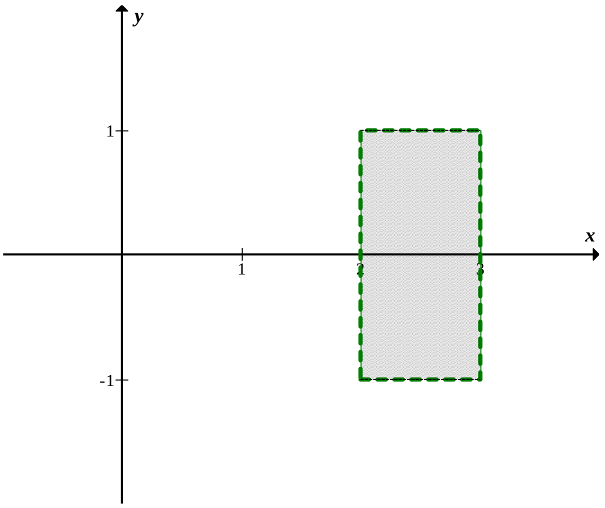
   g) $x^2 + y^2 + z < 2$.

Não é uma bola.

2. Seja $A = \{(x,y) \in R^2 \mid 2 < x < 3 \text{ e } -1 < y < 1\}$

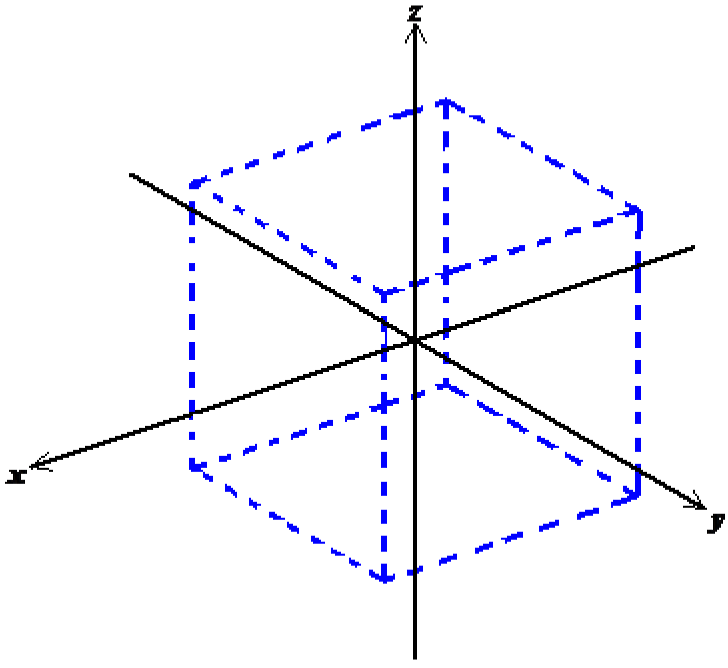
a) Representar graficamente o conjunto *A*, identificando se *A* é aberto.
b) Determinar a fronteira de *A*.

a) A é aberto. Veja a representação gráfica.



b) A fronteira de A é o retângulo dos vértices $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,-1)$ e $(2,-1)$.

3. Repetir o exercício 2 para o conjunto
$B = \{(x, y, z) \in R^3 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1 \quad \text{e} \quad -1 < z < 1\}$.



a) B é aberto
b) A fronteira de B é formada pelas faces do cubo dos vértices $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,1,-1)$ e $(-1,1,-1)$

4. Identificar as afirmações verdadeiras**:**

a) A união de bolas abertas é uma bola aberta. (Falso)
b) A união de bolas abertas é um conjunto aberto. (Verdadeiro)
c) A união de bolas abertas é um conjunto conexo. (Falso)
d) O conjunto $A = \{(x, y) / x^2 + 2x + y^2 - 4y > 0\}$ é conexo. (Verdadeiro)
e) O conjunto $B = \{(x, y) / x^2 > y^2\}$ é aberto. (Verdadeiro)

5. Verificar quais dos conjuntos a seguir são conexos**:**

$$A = \left\{(x,\ y) \in \mathrm{IR}^2 \,\middle|\, 2x^2 + 5y^2 \le 10\right\}$$
$$B = \left\{(x,\ y) \in \mathrm{IR}^2 \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right\}$$
$$C = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathrm{IR}^3 \,\middle|\, 3x^2 + 9y^2 + z^2 \ge 18\right\}$$
$$D = \left\{(x,\ y) \in \mathrm{IR}^2 \,\middle|\, y > \frac{1}{|x|},\ x \ne 0\right\}.$$

São conexos os conjuntos *A*, *B* e *C*. De fato:

$A = \{(x, y) \in \Re^2 / 2x^2 + 5y^2 \le 10\}$ pode ser reescrito como $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} \le 1$. Dado dois pontos quaisquer de A, estes podem ser ligados por uma linha poligonal contida em A.

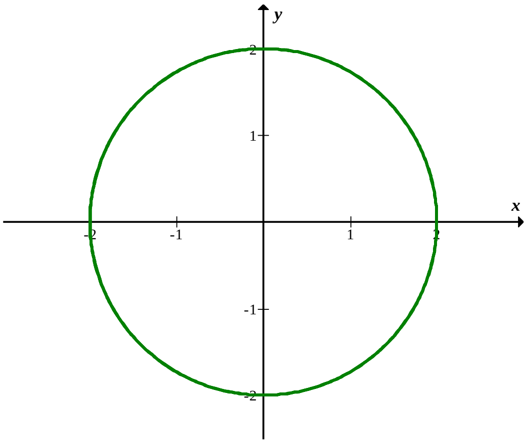
O conjunto $B = \left\{(x, y) \in \Re^2 / -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right\}$ é conexo.

O conjunto $C = \{(x, y, z) \in \Re^3 / 3x^2 + 9y^2 + z^2 \ge 18\}$ poder ser escrito como $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{18} \ge 1$ e também é conexo.

6. Dar a fronteira dos seguintes subconjuntos do R^2. Representar graficamente.

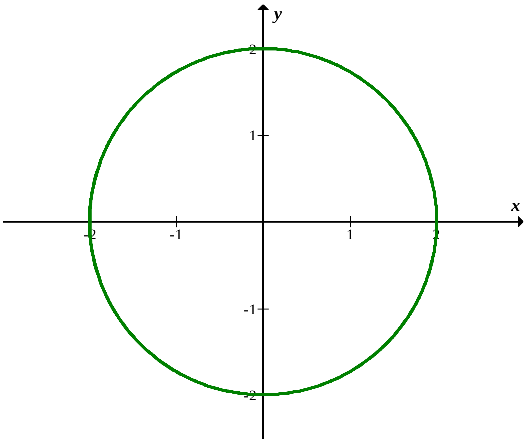
a) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

Temos uma circunferência de raio 2, centrada em $(0,0)$. Veja o gráfico que segue.



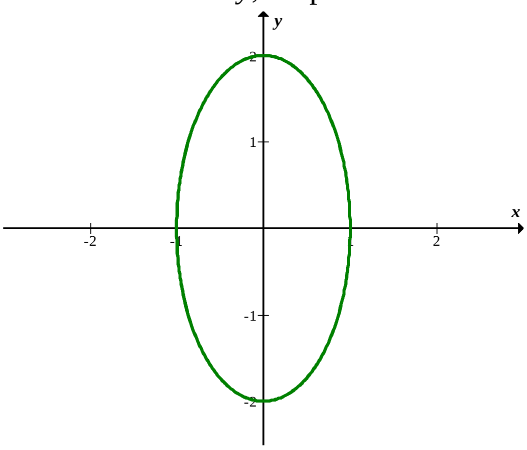
b) $B = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

Temos uma circunferência de raio 2, centrada em $(0,0)$. Veja gráfico a seguir.



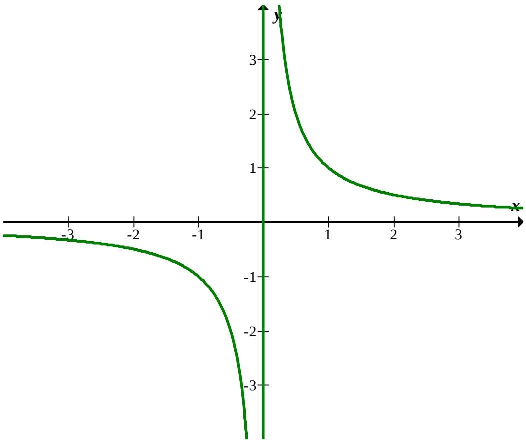
c) $A = \{(x,y) \in R^2 \mid 4x^2 + y^2 < 4\}$

Temos uma elipse centrada em $(0,0)$ e semi-eixos 1 e 2 paralelos aos eixos coordenados x e y, respectivamente. Veja gráfico a seguir.



d) $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y > \dfrac{1}{x}\}$

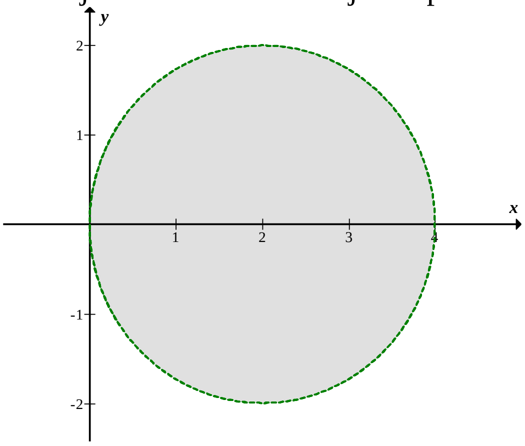
Temos a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ unida com o eixo dos y. Veja gráfico a seguir.



7. Representar graficamente os seguintes subconjuntos de R^2. Identificar os conjuntos abertos.

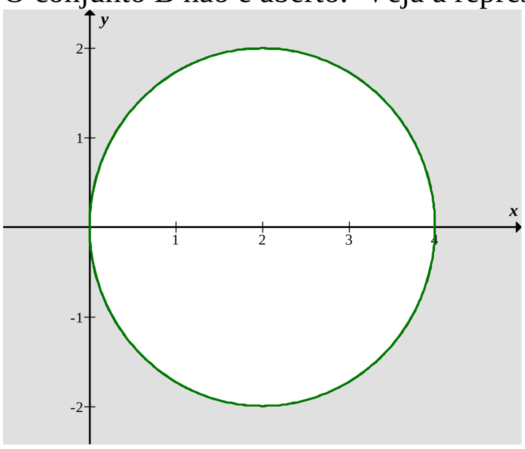
a) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - 4x + y^2 < 0\}$

O conjunto A é aberto. Veja a representação gráfica.



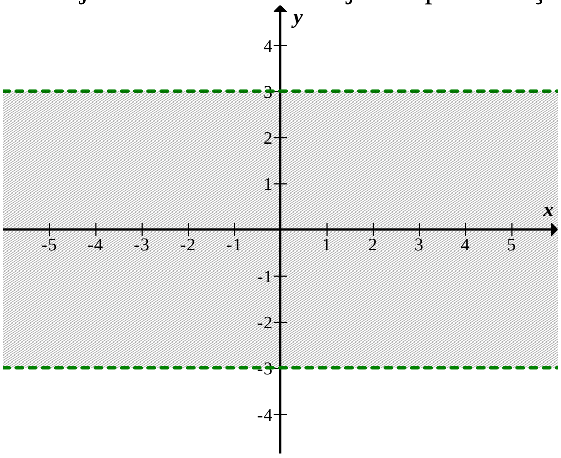
b) $B = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - 4x + y^2 \geq 0\}$

O conjunto B não é aberto. Veja a representação gráfica.



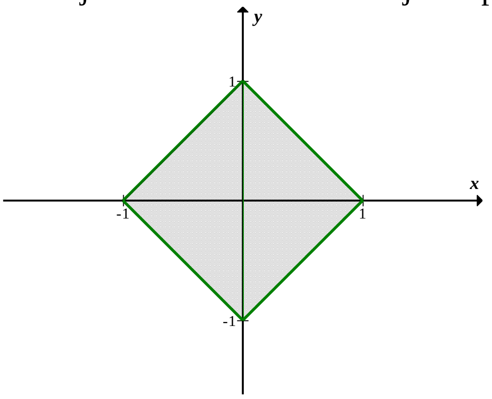
c) $C = \{(x, y) \in R^2 \mid |y| < 3\}$

O conjunto C é aberto. Veja a representação gráfica.



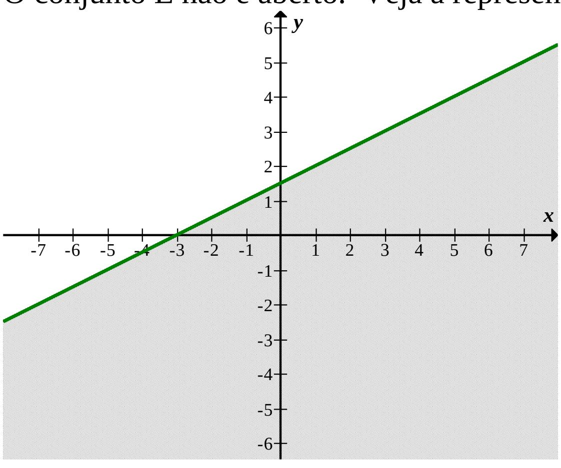
d) $D = \{(x, y) \in R^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

O conjunto D não é aberto. Veja a representação gráfica.



e) $E = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geq 2y - 3\}$

O conjunto E não é aberto. Veja a representação gráfica.



8. Seja $A = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} < 1\}$.

Verificar se os pontos

a) (0, –1/2) b) (0, –1) c) (–1, –1)

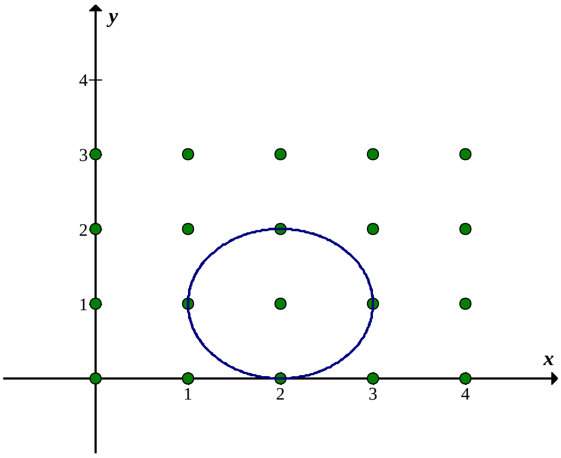
d) (1, 1) e) (0, 0) f) (3, 4)

são pontos de acumulação de *A*.

Temos que: (a) , (b) , (c) e (e) são pontos de acumulação de A e (d) e (f) não são pontos de acumulação de A.

9. Verificar se o conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x, y \in N\}$ tem ponto de acumulação.

O conjunto A é formando por um conjunto de pontos como mostra a representação gráfica a seguir. Esta representação pode auxiliar na visualização de que o conjunto A não tem ponto de acumulação, pois podemos, por exemplo, colocar uma bola aberta centrada em (2,1) de raio 1 e ela vai conter um número finito de pontos de A.



10. Identificar as afirmações verdadeiras:

a) *P*(0, 0) é ponto de acumulação do conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y > x\}$.

b) Os pontos *P*(0, 4) e *Q*(2, 2) pertencem à fronteira do conjunto $B = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 4 - x^2\}$.

c) *P*(0, 0) é ponto de acumulação da bola aberta $B((0, 0), r)$, qualquer que seja $r > 0$.

d) O conjunto vazio é um conjunto aberto.

e) Toda bola aberta é um conjunto aberto.

f) R^2 é um conjunto aberto.

g) Todo ponto de acumulação de um conjunto *A* pertence a esse conjunto.

h) O conjunto $\{(x, y) \in R^2 \mid x$ e y são racionais $\}$ não tem ponto de acumulação.

i) Todos os pontos de um conjunto aberto *A* são pontos de acumulação de *A*.

j) Se *A* é um conjunto aberto, nenhum ponto da fronteira de *A* pertence a *A*.

Respostas: a) V b) F c) V d) V e) V f) V g) F h) F i) V j) V.

11. Usando a definição de limite, mostrar que:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ y\to 2}} (5x-2y)=-9$

Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|5x-2y+9|<\varepsilon$ sempre que $0<\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\delta$.

Temos que

$$\begin{aligned}|5x-2y+9| &= |5(x+1)-2(y-2)| \\ &\leq |5(x+1)|+|-2(y-2)| \\ &= 5|x+1|+2|y-2|.\end{aligned}$$

Assim, se tomamos δ tal que $|x+1|<\dfrac{\varepsilon}{7}$ e $|y-2|<\dfrac{\varepsilon}{7}$, a desigualdade $|5x-2y+9|<\varepsilon$ fica satisfeita.

De fato, como $|x+1|\leq\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$ e $|y-2|\leq\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$, tomando $\delta=\dfrac{\varepsilon}{7}$ temos que se $0<\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\delta$, então:

$$\begin{aligned}|5x-2y+9| &\leq |5(x+1)|+|-2(y-2)| \\ &< 5\cdot\frac{\varepsilon}{7}+2.\frac{\varepsilon}{7} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

O que mostra o limite dado.

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,3)} (3x+2y)=12$

Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|3x+2y-12|<\varepsilon$ sempre que $0<\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<\delta$.

Temos que

$$\begin{aligned}|3x+2y-12| &= |3(x-2)+2(y-3)| \\ &\leq |3(x-2)|+|2(y-3)| \\ &= 3|x-2|+2|y-3|.\end{aligned}$$

Como $|x-2|\leq\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ e $|y-3|\leq\sqrt{(x-2^2+(y-3)^2}$, podemos concluir que

$3|x-2|+2\left|y-3\right|<3\delta+2\delta|$ sempre que $0<\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<\delta$.

Assim, se tomamos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ temos

$$\begin{aligned}|3x+2y-12| &= |3(x-2)+2(y-3)| \\ &< 5\cdot\delta \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < \delta$.
O que mostra o limite dado.

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(1,\,-1)} (3x - 2y) = 5$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|3x - 2y - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} < \delta$.

Temos que

$$\begin{aligned} |3x - 2y - 5| &= |3(x-1) - 2(y+1)| \\ &\le |3(x-1)| + |-2(y+1)| \\ &= 3|x-1| + 2|y+1|. \end{aligned}$$

Como $|x-1| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ e $|y+1| \le \sqrt{(x-1^2 + (y+1)^2}$, podemos concluir que

$3|x-1| + 2|y+1| < 3\delta + 2\delta|$ sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} < \delta$.

Assim, se tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ temos

$$\begin{aligned} |3x - 2y - 5| &\le 3|x-1| + 2|y+1| \\ &< 5 \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} < \delta$.
O que mostra o limite dado.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

Como $x^2 \le x^2 + y^2$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| &\le \frac{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

sempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.

Assim, se tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ temos

$$\left|\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

O que mostra o limite dado.

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x||y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x||y|y^2}{x^2+y^2}$$

Como $x^2 \le x^2 + y^2$ temos

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x||y|y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x||y|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

Como $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ temos

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2} < \delta^2 \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Assim, se tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, temos

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

O que mostra o limite dado.

12. Dado $(x_0, y_0) \in R^2$, mostrar que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} y = y_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|y - y_0| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Temos que

$|y - y_0| \le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Assim, $|y - y_0| < \delta$ sempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Tomando $\delta = \varepsilon$, vem $|y - y_0| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Portanto, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} y = y_0$.

13. Mostrar que os limites seguintes não existem:

Para mostrar que os limites não existem vamos usar a Proposição 3.2.3. Observar que outras opções de caminhos podem ser escolhidas para mostrar que os limites não existem.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = 2$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x - y}{2x + y}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x - y}{2x + y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x - y}{2x + y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{-y}{y} = -1$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

Temos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

e) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3xy}{4x^2+5y^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{3xy}{4x^2+5y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{4x^2} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{3xy}{4x^2+5y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{3x^2}{9x^2} = \frac{3}{9}$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

f) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{-4y^2}{y^2} = -4$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

g) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{x^3+y^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^3}{x^3+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{0}{y^2} = 0$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

h) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(y^2+x^2)^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(y^2+x^2)^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{y^4}{(y^2)^2} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(y^2+x^2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^4+3x^4+2x^4}{(2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^4}{4x^4} = \frac{3}{2}$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

i) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4+y^2}$

Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=0}} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y=0}} \frac{0}{(x-1)^4} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=(x-1)^2}} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y=(x-1)^2}} \frac{(x-1)^2(x-1)^2}{(x-1)^4+(x-1)^4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{2(x-1)^4} = \frac{1}{2}.$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

14. Verificar se os seguintes limites existem:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2y}{x+y}$

O limite não existe. Para mostrar basta aplicar a Proposição 3.2.3.
Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{2y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{x} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x}{x+x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{-x^2 y}{2x^2+2y^2}$

Este limite existe e é igual a zero. Usando a definição temos:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{-x^2y}{2x^2+2y^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left|\frac{-x^2y}{2x^2+2y^2}\right| = \frac{x^2\,|\,y\,|}{2(x^2+y^2)}$$

Como $x^2 \le x^2+y^2$ e $|\,y\,| \le \sqrt{x^2+y^2}$ temos

$$\left|\frac{-x^2y}{2x^2+2y^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^2+y^2)}.$$

Assim, se tomamos $\delta = 2\varepsilon$ temos

$$\left|\frac{-x^2y}{2x^2+2y^2}\right| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

O que mostra a existência do limite, sendo igual a zero.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^3+y^2}$

O limite não existe. Para mostrar basta aplicar a Proposição 3.2.3.
Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{x^3} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2}{x^3+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{1}{x+1} = 1$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{5y-x}{2x-y}$

O limite não existe. Para mostrar basta aplicar a Proposição 3.2.3.
Temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{-x}{2x} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{5y}{-y} = 5$$

Como os resultados são diferentes o limite dado não existe.

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

Vamos mostrar que este limite existe e é igual a zero.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{x^2\,|x| + y^2\,|y|}{x^2+y^2}$$

Como $x^2 \leq x^2+y^2$ e $y^2 \leq x^2+y^2$ temos

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)\,|x| + (x^2+y^2)\,|y|}{x^2+y^2}.$$

$$= |x| + |y|.$$

Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ temos

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim, se tomamos $\delta = \varepsilon/2$ temos

$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, o que mostra a existência do limite, sendo igual a zero.

15. Verificar a existência dos limites das seguintes funções quando (x, y) tende ao ponto indicado:

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$; $P(0, 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x sen\frac{1}{y} = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|x sen\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left|x sen\frac{1}{y}\right| = |x|\left|sen\frac{1}{y}\right|.$$

Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $\left|sen\frac{1}{y}\right| \leq 1$ temos que $\left|x sen\frac{1}{y}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ temos $\left|x sen\frac{1}{y}\right| < \delta$. Portanto basta fazer $\delta = \varepsilon$ para que $\left|x sen\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, o que mostra a existência do limite, sendo igual a zero.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}$; $P(0, 1)$

Neste caso o limite não existe. Vamos mostrar usando a proposição 3.2.3. Temos:

- $\lim\limits_{\substack{y\to 1 \\ x=y-1}} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4} = \lim\limits_{\substack{y\to 1 \\ x=y-1}} \dfrac{(y-1)^4}{2(y-1)^4} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=1}} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=1}} \dfrac{0}{x^4} = 0$

Portanto o limite da função *f(x,y)* no ponto P(0,1) não existe.

c) $f(x,y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $P(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Temos que

$$\left|\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{3|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Como $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ temos que

$$\left|\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ temos $\left|\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < 3\delta$. Portanto, basta fazer $\delta = \varepsilon/3$ para que

$\left|\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, o que mostra a existência do limite, sendo igual a zero.

d) $f(x,y) = \dfrac{x^6+x^2}{x^2+y^2}$; $P(0,0)$

Neste caso o limite não existe. Vamos mostrar usando a proposição 3.2.3. Temos:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \dfrac{x^6+x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \dfrac{x^6+x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(x^4+1) = 1.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=x}} \dfrac{x^6+x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6+x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}.$

Portanto o limite da função *f(x,y)* no ponto P(0,0) não existe.

e) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}$; $P(0,0)$

Neste caso o limite não existe. Vamos mostrar usando a proposição 3.2.3.
Temos:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^3} = 1.$
- $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ x=0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^3}{-y^3} = -1.$

Portanto o limite da função *f(x,y)* no ponto P(0,0) não existe.

16. Provar a propriedade (b) da proposição 3.3.2.
Temos a propriedade:
Se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ existe, e c é um número real qualquer, então:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} c.f(x,y) = c.\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y).$$

Seja $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$; c é um número real qualquer. Queremos provar que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} c.f(x,y) = c.L.$$

Se $c = 0$ é trivial. Supor $c \neq 0$.
Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que
$|cf(x,y) - cL| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$

Temos que $|cf(x,y) - cL| = |c|\,|f(x,y) - L|$.

Temos também, por hipótese, que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$|f(x,y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$

Basta fazer $\delta = \varepsilon / |c|$ para que
$|cf(x,y) - cL| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$ o que mostra a existência a propriedade dada.

17. Usando as propriedades, calcular os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2xy + x^2 - \dfrac{x}{y}) = (2.1.2 + 1^2 - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{9}{2}.$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} \dfrac{x + y - 2}{x^2 + y^2} = \dfrac{2 - 1 - 2}{4 + 1} = \dfrac{-1}{5}.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2y^2+xy-1}} = \sqrt{\dfrac{-1}{0+0-1}} = 1.$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{xy}) = 1 - 0 = 1.$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (\dfrac{1}{x+y} - 10) =$-10.

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x^2+y^2-xy+7}{x^3+y^3-7} = \dfrac{0+1-0+7}{0+1-7} = \dfrac{-4}{3}.$

18. Calcular os seguintes limites de funções compostas:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \ln(x^2+y^2+10) = \ln(1+1+10) = \ln 12.$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} e^{\frac{1}{x+y}} = e^{1/\infty} = e^0 = 1.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \frac{\pi}{2}}} \dfrac{\text{sen}(x+y)}{x} = \dfrac{sen(\pi+\pi/2)}{\pi} = \dfrac{sen(3\pi/2)}{\pi} = \dfrac{-1}{\pi}.$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 2}} \ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{x-y+1}\right) = \ln\left(\dfrac{16+4}{4-2+1}\right) = \ln(20/3).$

19. Calcular os seguintes limites usando a proposição 3.3.6:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$

Pela proposição 3.3.6, podemos afirmar que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\sqrt{x+y}}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x+y}\ \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

De fato, temos que:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x+y} = 0$

- $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ é uma função limitada , pois podemos escrever que

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$
$$=1.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \sqrt{\dfrac{xy^2+y^3-xy^3}{x^2+y^2}}$

Pela proposição 3.3.6, podemos afirmar que:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \sqrt{\frac{xy^2+y^3-xy^3}{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \sqrt{\frac{y^2(x+y-xy)}{x^2+y^2}} = \sqrt{\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} y^2.\frac{(x+y-xy)}{x^2+y^2}} = 0$$

De fato, temos que:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} y^2 = 0$
- $g(x,y)=\dfrac{(x+y-xy)}{x^2+y^2}$ é uma função limitada , pois podemos escrever que

$$\left|\frac{(x+y-xy)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y-xy|}{x^2+y^2}$$
$$\leq \frac{|x|+|y|+|xy|}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{|x|}{x^2+y^2} + \frac{|y|}{x^2+y^2} + \frac{|xy|}{x^2+y^2}$$
$$\leq 1+1+1$$

Observa-se que a visualização de $\dfrac{|xy|}{x^2+y^2} < 1$ é feita usando a transformação para coordenadas polares, ou seja, $\dfrac{|xy|}{x^2+y^2} = \dfrac{\left|r^2\cos\theta sen\theta\right|}{r^2} = \left|\cos\theta sen\theta\right| \leq 1$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Pela proposição 3.3.6, podemos afirmar que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sqrt{y}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

De fato, temos que:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sqrt{y} = 0$

- $g(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é uma função limitada , pois podemos escrever que

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=1.$$

20. Calcular os seguintes limites envolvendo indeterminações:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \dfrac{x^2y-3x^2-4xy+12x+4y-12}{xy-3x-2y+6} =$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{y(x^2-4x+4)-3(x^2-4x+4)}{x(y-3)-2(y-3)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{(y-3)(x^2-4x+4)}{(x-2)(y-3)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{(y-3)(x-2)^2}{(x-2)(y-3)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(x-2)=0.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 1}} \dfrac{y\sqrt{x}-2y-\sqrt{x}+2}{4-x+x\sqrt{y}-4\sqrt{y}} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 1}} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(y-1)}{(\sqrt{y}-1)(x-4)} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 1}} \dfrac{(\sqrt{y}+1)}{(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{xy+x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{(xy+x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} =$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{(y+1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sqrt[3]{xy}-1}{\sqrt{xy}-1}$

Fazendo a troca de variáveis temos:

$xy=t^6$ e Para $x\to 1;\ y\to 1$, temos $xy\to 1$ ou $t^6\to 1;\ t\to 1$.

Assim,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{\sqrt[3]{xy}-1}{\sqrt{xy}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3}.$$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{y\,\mathrm{sen}\,x}{xy+2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{y\,senx}{x(y+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} \cdot \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y}{(y+2)} = 1\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}.$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+x)^{\frac{1+xy}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot (1+x)^y = e\cdot 1 = e.$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} = \ln e = 1.$

21. Calcular os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(e^{xy}-e^{y}+1)=e^2-e^2+1=1$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sqrt{x^2+y^2}=0$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}}(x^3y^3+2xy^2+y)=-8-8+2=-14$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x^2y+2xy^2-2xy)=6+8-4=10$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}}\dfrac{xy^2-5x+8}{x^2+y^2+4xy}=\dfrac{-2+10+8}{4+1-8}=-\dfrac{16}{3}$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{x^2+3xy^2}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{1}=0$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2-yx}{x^2-y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x}{(x+y)}=\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\ln\left[\dfrac{xy-1}{2xy+4}\right]=\ln\dfrac{1}{8}=-\ln 8$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{y}$ =0, usando a proposição 3.3.6

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ =0, usando a proposição 3.3.6

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left[\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right]$ =cos 0 = 1, aplicando inicialmente a proposição 3.3.6.

l) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{x^3-xy^2}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{x(x-y)(x+y)}{x+y}=2$

m) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ = 0,usando a proposição 3.3.6

n) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{yx^3-yx^2-yx+y+2x^3-2x^2-2x+2}{(x-1)^2(y+2)}=$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{(y+2)(x^3-x^2-x+1)}{(x-1)^2(y+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-2}{2}=2$$

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}(xy-y)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x-1}\cos\dfrac{1}{y-1}$ =0, usando a proposição 3.3.6

p) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=1$

22. Verificar se as funções dadas são contínuas nos pontos indicados:

a) $f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$, $P(0,0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xsen\dfrac{1}{y}=0=f(0,0) \Rightarrow f(x,y)$ é contínua no ponto $P(0,0)$.

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-yx}{x^2-y^2}, & x\neq \pm y \\ \dfrac{1}{4}(x+y), & x=\pm y \end{cases}$, $P(1,1)$

Quando $x\neq \pm y$,temos:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{1}{2}=f(1,1)$.

Quando $x=y$, temos:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{1}{4}(x+y)=\dfrac{1}{2}=f(1,1)$

Portanto, a função é contínua no ponto $P(1,1)$.

c) $f(x,y)=\dfrac{x^3-3xy^2+2}{2xy^2-1}$, $P(1,2)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^3-3xy^2+2}{2xy^2-1}=\dfrac{-9}{7}=f(1,2)$.

Portanto, a função é contínua no ponto $P(1,2)$.

d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $P(0,0)$

O limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$ não existe, pois

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{0}{x^4}=0$ e $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{6x^4}{4x^4}=\dfrac{3}{2}$.

Portanto, a função dada não é contínua no ponto $P(0,0)$.

e) $f(x,y)=\begin{cases} 3x-2y, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $P(0,0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(3x-2y) = 0 \neq f(0,0)$. Portanto, a função dada não é contínua no ponto $P(0,0)$.

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P(0,0)$

O limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe, pois

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ e $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$.

Portanto, a função dada não é contínua no ponto $P(0,0)$.

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P(0,0)$

O limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ não existe, pois

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{2x}{-2x} = -1$ e $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{y^2}{y^2} = 1$.

Portanto, a função dada não é contínua no ponto $P(0,0)$.

h) $f(x,y) = 2x^2y + xy - 4$, $P(1,2)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x^2y + xy - 4) = 2 = f(1,2)$. Portanto, a função dada é contínua no ponto $P(1,2)$.

Observa-se que esta é uma função polinomial, que é contínua em todos os pontos do plano.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x+y}$, $P(1,1)$ e $Q(0,0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x^2+y^2-1}{x+y} = \dfrac{1}{2} = f(1,1)$. Portanto, a função dada é contínua no ponto $P(1,1)$.

e

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2-1}{x+y}$ não existe, portanto, a função dada não é contínua no ponto $Q(0,0)$.

23. Escrever o conjunto em que a função dada é contínua:

a) $f(x,y) = x^2y - x^3y^3 - x^4y^4$

É contínua em R^2.

b) $f(x,y) = \dfrac{x-2}{(xy-2x-y+2)(y+1)}$

É contínua em $\{(x,y)\in R^2 \mid x \neq 1\ ,\ y\neq 2\ \ e\ \ y\neq -1\}$.

c) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{x^2-y^2}\right)$

É contínua em $\{(x,y)\in R^2 \mid x > y\ \ e\ \ x\neq -y\}$.

d) $f(x,y) = e^{x\,\mathrm{sen}\,y}$

É contínua em R^2.

24. Calcular o valor de *a* para que a função dada seja contínua em $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) sen\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Para que a função dada seja contínua em (0,0) devemos ter:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right) sen\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0) = a$. Assim, *a=0.*

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a-4, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Para que a função dada seja contínua em (0,0) devemos ter:

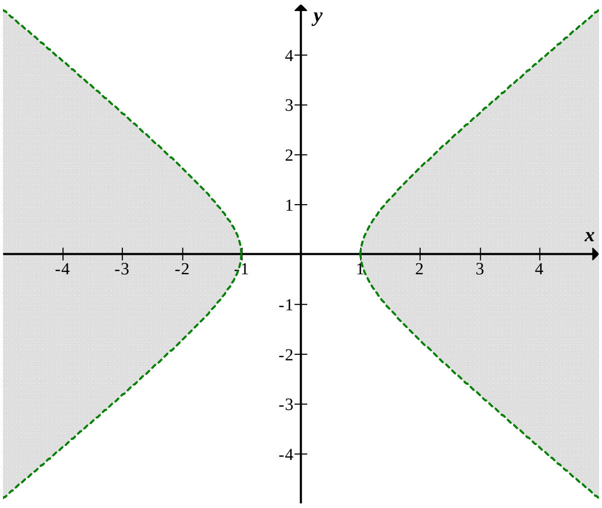
$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)} =$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)}{y^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \lim\limits_{y\to 0}\left(\sqrt{y^2+1}+1\right) = 0 = f(0,0) = a-4.$$

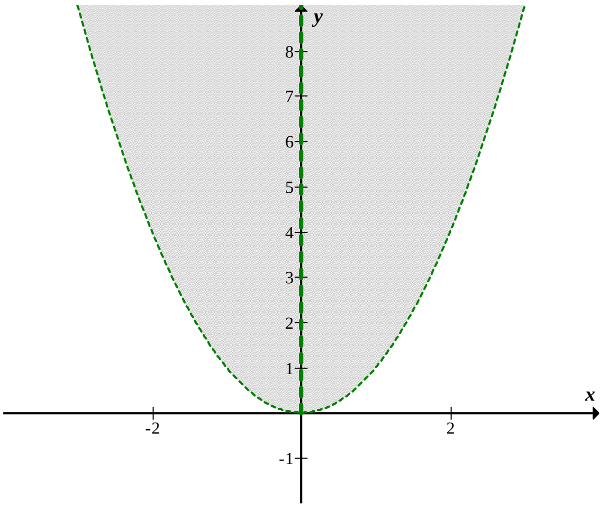
Assim, *a=4*.

25. Esboçar a região de continuidade das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy^3}{\sqrt{x^2-y^2-1}}$

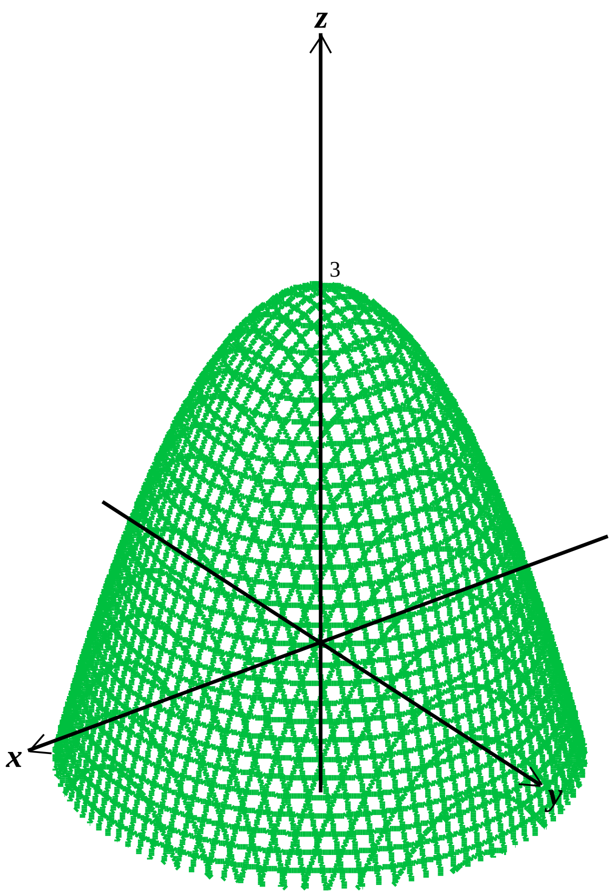


b) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x^2y^2}{y-x^2}\right)$



c) $f(x,y,z)=\dfrac{xz+2yz-x^2}{\sqrt{z+x^2+y^2-3}}$

A região de continuidade desta função é acima do parabolóide que segue.



26. Calcular $\lim\limits_{\vec{r}\to\vec{r}_0} \vec{f}(x,\ y,\ z)$, dados:

a) $\vec{f}(x,y,z)=\left(x^2+y^2, \dfrac{xy}{z}, \dfrac{x-2}{x^2-4}\right); \vec{r}_0=(2{,}1{,}1)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,1)}\left(x^2+y^2, \frac{xy}{z}, \frac{x-2}{x^2-4}\right)=\left(x^2+y^2, \frac{xy}{z}, \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right)=\left(2^2+1^2, \frac{2.1}{1}, \frac{1}{2+2}\right)=\left(5, 2, \frac{1}{4}\right)$$

b) $\vec{f}(x,y,z)=\left(e^x, \dfrac{sen\, y}{y}, x+y+z\right); \vec{r}_0=\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$

$$\lim_{(x,y,z)\to\left(1,0,\frac{1}{2}\right)}\left(e^x, \frac{sen\, y}{y}, x+y+z\right)=\left(e^1, 1, 1+0+\frac{1}{2}\right)=\left(e, 1, \frac{3}{2}\right)$$

c) $\vec{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z}\right); \vec{r}_0=(2, 1, 4)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,4)}\left(\frac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z}\right)=\left(\frac{2+1}{2-1}, 2^2, \sqrt{4}\right)=\left(\frac{3}{1}, 4, 2\right)=(3, 4, 2)$$

27. Determinar os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} \left(\dfrac{1}{xy},\ \sqrt{xy}\right) = \left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$

b) $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to\left(0,\ 1,\ \frac{\pi}{4}\right)} \left(\dfrac{x}{y}\text{sen}\,\dfrac{y}{x},\ \cos x,\ \text{tg}\,yz\right) = (0,\ 1,\ 1)$, aplicando a proposição 3.3.6 na primeira coordenada.

c) $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(3,\ 4,\ 1)} \left(x\sqrt{y},\ \dfrac{xz-x}{z^2-1},\ y\ln z\right) = \lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(3,\ 4,\ 1)} \left(x\sqrt{y},\ \dfrac{x(z-1)}{(z-1)(z+1)},\ y\ln z\right) = \left(6,\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$

28. Analisar a continuidade das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(x,\ y) = (xy,\ x^2 - y^2,\ 2)$

É contínua em IR^2.

b) $\vec{g}(x,\ y,\ z) = \begin{cases} \left(x,\ y\ \text{sen}\,y,\ xz^2\ \text{sen}\ \dfrac{1}{z}\right),\ z \neq 0 \\ (x,\ y\ \text{sen}\,y,\ 0),\ z = 0 \end{cases}$

É contínua em IR^3.

c) $\vec{h}(x,\ y) = (x\ln y,\ u\ln x)$

É contínua em $\left\{(x,\ y)\in \mathrm{IR}^2 \mid x,\ y > 0\right\}$.

d) $\vec{p}(x,\ y,\ z) = e^{xy}\vec{i} + \ln xz\,\vec{j} + 2\vec{k}$

É contínua em $\left\{(x,\ y,\ z)\in \mathrm{IR}^3 \mid xz > 0\right\}$.

e) $\vec{q}(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{x}{x-y},\ \dfrac{2}{x},\ z\right)$

É contínua em $\left\{(x,\ y,\ z)\in \mathrm{IR}^3 \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq y\right\}$.

f) $\vec{r}(x,\ y,\ z) = \dfrac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}$ onde $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

É contínua em $\mathrm{IR}^3 - \left\{(0,\ 0,\ 0)\right\}$.

g) $\vec{u}(x,\ y,\ z) = (x^2 + y^2,\ y^2 + z^2,\ z^2 + x^2)$.

É contínua em IR^3.

CAPÍTULO 4
4.5 – EXERCÍCIOS
pág. 124 - 128

Nos exercícios de (1) a (5) calcular as derivadas parciais de 1ª ordem usando a definição.

1. $z = 5xy - x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)\cdot y - (x+\Delta x)^2 - 5xy + x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5xy + 5y\Delta x - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - 5xy + x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (5y - 2x - \Delta x)$$
$$= 5y - 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x\cdot y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5x(y+\Delta y) - x^2 - 5xy + x^2}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5xy + 5x\Delta y - x^2 - 5xy + x^2}{\Delta y}$$
$$= 5x$$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 10$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - 10 - x^2 - y^2 + 10}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 - 10 - x^2 - y^2 + 10}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + (y+\Delta y)^2 - 10 - x^2 - y^2 + 10}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - y^2 + 10 - 10}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (2y + \Delta y) = 2y$$

3. $z = 2x + 5y - 3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + 5y - 3 - 2x - 5y + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$= 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x + 5(y+\Delta y) - 3 - 2x - 5y + 3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5y + 5\Delta y - 5y}{\Delta y} = 5$$

4. $z = \sqrt{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)y} - \sqrt{xy}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{xy + y\Delta x} - \sqrt{xy}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{xy + y\Delta x - xy}{\Delta x(\sqrt{xy + y\Delta x} + \sqrt{xy}}$$

$$= \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x(y+\Delta y)} - \sqrt{xy}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{xy + x\Delta y - xy}{\Delta y(\sqrt{xy + x\Delta y} + \sqrt{xy}}$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

5. $f(x, y) = x^2 y + 3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 y + 3y^2 - x^2 y - 3y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 y + 2x\Delta xy + (\Delta x)^2 y + 3y^2 - x^2 y - 3y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2xy + \Delta xy)$$

$$= 2xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2(y+\Delta y)+3(y+\Delta y)^2 - x^2 y - 3y^2}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 y + x^2 \Delta y + 3y^2 + 3 \cdot 2y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - x^2 y - 3y^2}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} (x^2 + 6y + 3\Delta y)$$
$$= x^2 + 6y$$

6. Usando a definição 4.1.1 mostrar que $f(x, y) = x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{3}}$ tem derivadas parciais na origem, valendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,0) - f(0\,,0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{\frac{1}{5}} \cdot 0^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{5}} \cdot 0^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0\,,0+\Delta y) - f(0\,,0)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0^{\frac{1}{5}}(0+\Delta y)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{5}} \cdot 0^{\frac{1}{3}}}{\Delta y} = 0$$

7. Usando a definição, determinar, se existirem $\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,2)$, sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y\ sen\frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 0 \quad , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,2) - f(0\,,2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 .2sen\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2 sen\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2\Delta x\ sen\frac{1}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0\,,2+\Delta y) - f(0\,,2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

Nos exercícios de 8 a 27 calcular as derivadas parciais de 1ª ordem.

8. $f(x,y) = e^{x^2 y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot x^2$$

9. $f(x,y) = x\cos(y-x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x.sen(y-x).(-1) + \cos(y-x)$$

$$= xsen(y-x) + \cos(y-x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xsen((y-x)$$

10. $f(x,y) = xy^2 + xy + x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + y + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x + x^2$$

11. $f(x,y) = y^2 \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 . \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 . \frac{2y}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2).2y$$

$$= \frac{2y^3}{x^2 + y^2} + 2y\ln(x^2 + y^2)$$

12. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}}(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}.(-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}}(a^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}.(-\cancel{2}y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

14. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2).2x - (x^2 - y^2).2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(-2y) - (x^2 - y^2).(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2y - 2y^3 - 2yx^2 + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

15. $g(x, y) = arc\ tg\ \dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

16. $z = (x + y)e^{x+2y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x + y).e^{x+2y} + e^{x+2y}.1 = e^{x+2y}(x + y + 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y).e^{x+2y}.2 + e^{x+y} = e^{x+2y}(2x + 2y + 1)$$

17. $z = \dfrac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+2y^2).2xy - x^2 y.2x}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{2x^3y + 4xy^3 - 2x^3y}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+2y^2).x^2 - x^2 y.4y}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+2y^2)^2}$$

18. $z = e^{x^2+y^2-4}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2-4}.2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2-4}.2y$$

19. $z = 2xy + \operatorname{sen}^2 xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 2senxy.\cos xy.y = 2y(1 + senxy\cos xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2senxy.\cos xy.x = 2x(1 + senxy\cos xy)$$

20. $z = \ln(x+y) - 5x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y} - 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$$

21. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

22. $z = \sqrt{xy} - xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}.y - y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(x.y)^{-\frac{1}{2}}.x - x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} - x$$

23. $f(w,t) = w^2 t - \dfrac{1}{t}$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 2wt$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = w^2 + \frac{1}{t^2}$$

24. $f(u,v) = uv - \ln(uv)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v - \frac{v}{uv} = v - \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u - \frac{u}{uv} = u - \frac{1}{v}$$

25. $z = x^2 y^2 - xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - x$$

26. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.2x - 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2x$$

$$\frac{2z}{2y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2y$$

27. $z = e^{x^2}(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2}.2x + (x^2 + y^2.e^{x^2}.2x$$

$$= 2xe^{x^2} + 2xe^{x^2}(x^2 + y^2) = 2xe^{x^2}(1 + x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2}.2y = 2ye^{x^2}$$

28. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Para $(x, y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)y - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2).x - xy.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x, y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x.0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

29. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy^2}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0\,,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$

Calcular $f(1\,,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0).$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)5y^2 - 5xy^2 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5.5.4 - 10.4}{5^2} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2).10xy - 5xy^2.2y}{(x^2+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,2) = \frac{5.10.1.2 - 5.1.4.2.2}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,0) - f(0\,,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{5.\Delta x.0}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f(1\,,2) = \frac{5.1.4}{1+4} = \frac{20}{5} = 4$$

$$f(1\,,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = 4 - \frac{12}{5} + \frac{4}{5} - 0 = \frac{12}{5}$$

30. Verificar se a função $z = x^3 y^2$ satisfaz a equação $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2}{3y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2$$

$$\frac{1}{x}.2x^3\,y - \frac{2}{3y}.3x^2\,y^2 = 0$$

$$2x^2 y - 2x^2 y = 0$$

31. Verificar se $z = sen(x+y)$ satisfaz a equação $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+y)$$

$$\cos(x,y) - \cos(x,y) = 0$$

32. Uma placa de aço plana tem a forma de um círculo de raio a, como mostra a figura 4.19. A temperatura num ponto qualquer da chapa é proporcional ao

quadrado da distância desse ponto ao centro da chapa, com uma constante de proporcionalidade $K>0$.

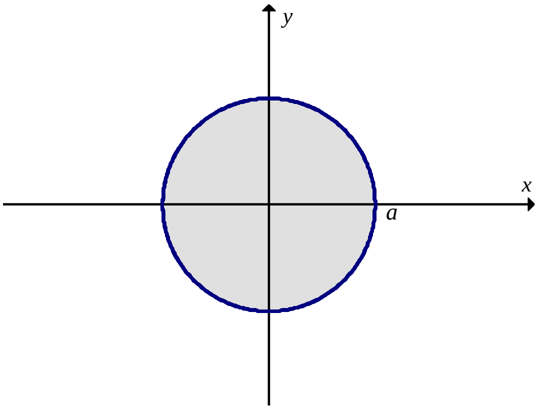


Figura 4.19

(a) Se uma partícula localizada no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ se desloca para a direita sobre o eixo dos x, sofrerá aumento ou diminuição de temperatura?

(b) Qual a taxa de variação da temperatura em relação a variável y, no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$?

Temos que

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$T(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim para o item (a) temos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2Kx$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 2K.\frac{a}{2} = K \cdot a$$

Como $K>0$, a partícula sofrerá aumento de temperatura.

Para o item (b) temos:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2Ky$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 0$$

33. A função $T(x,y)=60-2x^2-3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação à distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos de x e de y, no ponto (1, 2).

Considerar a temperatura medida em graus e a distância em cm.

$$T(x,y)=60-2x^2-3y^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-4x$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-6y$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1\,,\,2)=-4.1=-4 \text{ graus/cm.}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1\,,\,2)=-6.2=-12 \text{ graus/cm.}$$

34. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z=f(x,y)$ com o plano $x=x_0$ no ponto $P(x_0,y_0,z_0)$.

a) $z=5x-2y$; $P(3\,,-1\,,17)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(3,-1)=-2$$

b) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}; P(1,-1,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2-1)^{-\frac{1}{2}}.\cancel{2}y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=\frac{-1}{1}=-1$$

35. Seja $z=3x^2-2y^2-5x+2y+3$. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da interseção de $z=f(x,y)$ com $y=2$ no ponto $(1\,,2\,,-3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x-5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1\,,\,2)=6.1-5=1$$

36. Dada a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, determinar a reta tangente as curvas de intersecção da superfície com:

a) o plano $x = 2$

b) o plano $y = \sqrt{5}$;

no ponto $(2, \sqrt{5}, 3)$

Respostas:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2\,,\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Assim, temos que

$$z = \frac{\sqrt{5}}{3}y + b$$

$$z = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{5} + b = \frac{5}{3} + b$$

$$b = 3 - \frac{5}{3} = \frac{9-5}{3} = \frac{4}{3}$$

Portanto,

$$\begin{cases} z = \dfrac{\sqrt{5}}{3}y + \dfrac{4}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2\,,\sqrt{5}) = \frac{2}{3}$$

Assim temos:

$$z = \frac{2}{3}x + b = \frac{2}{3} \cdot 2 + b = \frac{4}{3} + b$$

$$b = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$$

Portanto,

$$\begin{cases} z = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$$

37. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1} & se \quad x^2+y^2<1 \\ 0 & se \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

a) Esboçar o gráfico de *f*.

b) Calcular, se existirem, $\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x\,,1) - f(0\,,1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1\,,\Delta y) - f(1\,,0)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

Para a derivada $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ podemos usar as regras de derivação. Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}.2y \right)_{(0,0)} = 0$$

Nos exercícios 38 a 47 calcular as derivadas parciais de 1ª ordem.

38. $w = x^2y + xyz^2 + x^2z$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + yz^2 + 2xz$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 + xz^2$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2xyz + x^2$$

39. $w = \frac{1}{z}\ln(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{z}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{z(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{z}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{z(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \ln(x^2+y^2)\frac{-1}{z^2} = \frac{-\ln(x^2+y^2)}{z^2}$$

40. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x^2 - y^2}{z^2}$$

41. $f(x,y,z) = 2xy^z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \cdot z \cdot y^{z-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x \cdot y^z \cdot \ln y$$

42. $f(x,y,z) = x\,sen\ yz + y\ sen\,xz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = sen\ yz + y \cdot \cos xz \cdot z = sen\ yz + yz\cos xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos yz \cdot z + sen\,xz = xz\cos yz + sen\,xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \cos yz \cdot y + y \cdot \cos xz \cdot x = xy\cos yz + xy\cos xz$$

43. $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2yz - xz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y - x$$

44. $g(w\,,t\,,z) = \sqrt{w^2 + t^2 + z^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{1}{2}(w^2 + t^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2w = \frac{w}{\sqrt{w^2 + t^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{w^2 + t^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{w^2+t^2+z^2}}$$

45. $h(u\,,v\,,w\,,t)=u^2+v^2-\ln(wt)$

$$\frac{\partial h}{\partial u}=2u$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}=2v$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}=-\frac{\cancel{t}}{w\cancel{t}}=\frac{-1}{w}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{-\cancel{w}}{\cancel{w}t}=\frac{-1}{t}$$

46. $T(x\,,y\,,z)=\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot yz-xyz\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot yz-\dfrac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{y^3z+yz^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{yz(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot xz-xyz\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{x^3z+xz^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{xy^3+yx^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

47. $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\dfrac{\mathrm{E}}{x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{-\mathrm{E}}{(x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5)^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{2\mathrm{E}}{(x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5)^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{+3\mathrm{E}}{(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{-\mathrm{E}}{(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = \frac{\mathrm{E}}{(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5)^2}.$$

48. Usando a definição, verificar que as funções dadas são diferenciáveis em R^2.

a) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$

A função dada possui derivadas parciais em todos os pontos $(x_0, y_0) \in R^2$ que são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0.$$

Assim, para mostrarmos que *f* é diferenciável em R^2, resta verificar que para qualquer $(x_0, y_0) \in R^2$, o limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)[y - y_0]]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$ é zero. Se chamamos de *L* esse limite, temos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2x^2 - y^2 - [2x_0^2 - y_0^2 + 4x_0\,[x - x_0] - 2y_0[y - y_0]]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2x^2 - y^2 - 2x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 x + 4x_0^2 + 2y_0 y - 2y_0^2]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2(x - x_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{(y - y_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0
\end{aligned}$$

(usando a definição de limites)

Logo, *f* é diferenciável em R^2.

b) $f(x, y) = 2xy$

A função dada possui derivadas parciais em todos os pontos $(x_0, y_0) \in R^2$ que são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2y_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0 .$$

Assim, para mostrarmos que *f* é diferenciável em R^2, resta verificar que para qualquer $(x_0, y_0) \in R^2$, o limite

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)[x-x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)[y-y_0]]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ é zero. Se chamamos de *L* esse limite, temos:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2xy - [2x_0y_0 + 2y_0[x-x_0] + 2x_0[y-y_0]]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2xy - 2x_0y_0 - 2y_0x + 2y_0x_0 - 2x_0y + 2x_0y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&= 0 \text{ (usando a definição de limites)}
\end{aligned}$$

Logo, *f* é diferenciável em R^2.

49. Verificar se as funções dadas são diferenciáveis na origem.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$

Vamos primeiro verificar se existem as derivadas parciais na origem. Se existir, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^{2/3}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} .$$

Como este limite não existe, segue que a função não é diferenciável na origem.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0\,,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0\,,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,0) - f(0\,,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2(\Delta x)^5}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2(\Delta x)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0\,,0+\Delta y) - f(0\,,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

Fazendo o limite $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{f(x,y) - [f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)[x-0] + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)[y-0]]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}$ temos

$$L = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\dfrac{2x^5}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2x^5}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ (usando a definição de limites)}$$

Assim, existem as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)$ e L=0. Portanto a função dada é diferenciável em (0 , 0).

c) $f(x,y) = x + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \therefore \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 1$$

Como estamos diante de uma função do tipo polinomial, que possui derivadas parciais contínuas em todo o plano, podemos afirmar que é diferenciável em (0,0).

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0\,,0) \\ 0, & (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,0) - f(0\,,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{0}{(\Delta x)^4} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0\,,0+\Delta y) - f(0\,,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta y)^4}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = \infty$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)$ não existe, podemos afirmar que a função dada não é diferenciável na origem.

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0\,,0) \\ 0, & (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x\,,0) - f(0\,,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^3} = \infty$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,\,0)$ não existe, podemos afirmar que a função dada não é diferencial na origem.

50. Identifique a região onde as funções dadas são diferenciáveis.

a) $f(x,y) = x^2 y + xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$

para qualquer (x, y). Como as derivadas parciais são contínuas, $f(x,y)$ é diferenciável em R^2

b) $z = e^{xy^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^2} \cdot y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy^2} \cdot 2xy$

para quaisquer (x, y). Como as derivadas parciais são contínuas, $z = e^{xy^2}$ é diferenciável em R^2.

c) $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)y^2 - xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\cdot 2xy - xy^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

As derivadas não estão definidas em (0 , 0) $\Rightarrow z = f(x,y)$ não é diferenciável em (0, 0). Como nos demais pontos as derivadas parciais são contínuas, segue que a função da é diferenciável em $R^2 - \{(0\,,\,0)\}$.

d) $f(x,y) = \ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

As derivadas estão definidas e são contínuas em todos os pontos do domínio da função. Portanto, a função dada é diferenciável nos pontos do 1º e 3º quadrantes, excluindo os eixos coordenados.

e) $z = sen \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot 2y - 2xy \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+y^2)}$$

Analogamente encontra-se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

As derivadas estão definidas e são contínuas em todos os pontos do domínio da função. Portanto, a função dada é diferenciável em $R^2 - \{(0\,,0)\}$.

f) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2} \cdot (-2y)$$

Assim, a função dada é diferenciável em R^2.

g) $f(x, y) = (x^2 + y^2) sen(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) \cdot 2x + sen(x^2+y^2)2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+y^2)\cos(x^2+y^2).2y + sen(x^2+y^2) \cdot 2y$$

Assim, a função dada é diferenciável em R^2.

h) $f(x, y) = arctg\ 2xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{1+4x^2y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{1+4x^2y^2}$$

As derivadas parciais são contínuas em todo R^2. Assim, a função dada é diferenciável em R^2.

i) $z = \dfrac{y}{x}$

Temos uma função racional que é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto, a função dada é diferenciável em $\{(x, y) \in R^2 \quad x \neq 0\}$.

j) $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

Temos uma função racional que é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto, a função dada é diferenciável em $R^2 - (1\,,1)$.

k) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+1} & se\ x^2+y^2<1\\ 0 & se\ x^2+y^2\geq 1\end{cases}$

Nos pontos da circunferência $x^2+y^2=1$, a função não é contínua, não sendo diferenciável. Nos demais pontos as derivadas parciais existem e são contínuas. Assim, temos que a função dada é diferenciável em $R^2-\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=1\}$

l) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Em todos os pontos $(x,y)\neq(0,0)$ as derivadas parciais de f existem e são contínuas. Portanto, f é diferenciável nestes pontos. Vejamos o que ocorre na origem.

Usando a definição temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Além disso,

$$L=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-[f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)[x-0]+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)[y-0]]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0$$

Portanto a função dada é diferenciável em R^2.

51. Dada a função $f(x,y)=\begin{cases}2x+y-3, & se\quad x=1\quad ou\quad y=1\\ 3 & ,se\quad x\neq 1\quad e\quad y\neq 1\end{cases}$

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$.

b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

c) f é diferenciável em (1 , 1)?

Usando a definição, temos que:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1$.

No entanto a função dada não é contínua no ponto $(1,1)$. De fato,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=1}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y=1}}(2x+1-3)=0=f(1,1)$$

mas $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y=x}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y=x}} 3=3\neq f(1,1)$

Portanto, a função não é diferenciável em (1,1).

52. Determinar, se existir, o plano tangente ao gráfico das funções dadas, nos pontos indicados.

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$; $P_1(0\,,0\,,1)$ e $P_2\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)=0$$

Plano tangente no ponto $P_1(0\,,0\,,1)$ é dado por:

$$h(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_{0)}$$

$$z-1=0(x-0)+0(y-0)$$

$$z-1=0$$

$$z=1$$

Para o ponto $P_2\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Equação do plano:

$$z-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2z=2\sqrt{2}$$

b) $f(x,y)=xy$; $P_1(0\,,0\,,0)$ e $P_2(1\,,1\,,1)$

Para o ponto $P_1(0\,,0\,,0)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 0$$

Equação do plano:

$$z - 0 = 0(x-0) + 0(y-0)$$

$$z = 0$$

Para o ponto $P_2(1\,,1\,,1)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = 1$$

Equação do Plano:

$$z - 1 = (x-1) + (y-1)$$

$$x + y - z = 1$$

c) $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$; $P_1(1\,,1\,,0)$ $P_2(1\,,2\,,1)$

Para o ponto $P_2(1\,,2\,,1)$ temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x-1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,2) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,2) = \frac{1}{1} = 1$$

Equação do plano no ponto $P_2(1\,,2\,,1)$:

$$z - 1 = 0(x - x_0) + 1(y - y_0)$$

$$z - 1 = y - 2$$

$$z = y - 1$$

$$y - z = 1$$

Não existe plano tangente em $P_1(1\,,1\,,0)$, pois não existem as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em (1 , 1).

d) $z = 2x^2 - 3y^2$; $P_1(0\,,0\,,0)$ $P_2(1\,,1\,,-1)$

Para o ponto $P_1(0\,,0\,,0)$ temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 0$$

Equação do Plano:

$$z - 0 = 0(x - x_0) + 0(y - y_0)$$

$$z = 0$$

Para o ponto $P_2(1\,,1\,,-1)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = -6$$

Equação do Plano:

$$z + 1 = 4(x - 1) + (-6)(y - 1)$$

$$z + 1 = 4x - 4 - 6y + 6$$

$$z = 4x - 6y + 1$$

$$4x - 6y - z = -1$$

e) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P_1(1\,,1\,,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_2(0\,,1\,,1)$

Para o ponto $P_1(1\,,1\,,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x}{x^2 + y^2} = \frac{\dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Equação do Plano:

$$z - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - 1)$$

$$2\sqrt{2}z + x + y = 4$$

Para o ponto $P_2(0\,,1\,,1)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,1) = -1$$

Equação do Plano:

$$z - 1 = 0(x - 0) - 1(y - 1)$$

$$y + z = 2$$

f) $z = xe^{x+y}$; $P_1(1\,,1\,,\ f(1\,,1))$ $P_2(1\,,0\,,\ f(1\,,0))$

Para o ponto $P_1(1\,,1\,,\ f(1\,,1))$ temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot e^{x+y} + e^{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = 1 \cdot e^2 + e^2 = 2e^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = 1 \cdot e^2 = e^2$$

Equação do Plano:

$$z - e^2 = 2e^2(x-1) + e^2(y-1)$$

$$2e^2x + e^2y - z = 2e^2$$

Para o ponto $P_2(1\,,0\,,\ f(1\,,0))$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\,,0) = e + e = 2e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1\,,0) = e$$

Equação do Plano:

$$z - e = 2e(x-1) + (y-0)$$

$$2ex + ey - z = e$$

53. Determinar o vetor gradiente das funções dadas nos pontos indicados:

a) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $P(1\,,1)$

$$\nabla z = \left(x \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ x \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right)$$

$$\nabla z(1,1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

b) $z = x^2y + 3xy + y^2$, $P(0\,,3)$

$$\nabla z = (2xy + 3y\ ,\ x^2 + 3x + 2y)$$

$$\nabla z(0,3) = (9\,,6)$$

c) $z = \text{sen}(3x + y)$, $\qquad P(0\,,\frac{\pi}{2})$

$$\nabla z = (3\cos(3x+y)\,,\,\cos(3x+y))$$

$$\nabla z\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) = \left(3\cdot\cos\frac{\pi}{2}\,,\cos\frac{\pi}{2}\right) = (0\,,0)$$

d) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\qquad$, $\qquad$ P (0 , 0)

$$\nabla z = \left(\frac{1}{2}(4 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\,,\,\frac{1}{2}(4 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)\right).$$

$$\nabla z(0{,}0) = (0\,,0)$$

e) $z = x^2 + y^2 - 3$ $\qquad$, $\qquad$ P (0 , 0)

$$\nabla z = (2x\,,2y)$$

$$\nabla z(0\,,0) = (0\,,0)\,.$$

f) $z = xy - \text{sen}(x+y)$ $\qquad P\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$

$$\nabla z = (y - \cos(x+y)\,,\,x - \cos(x+y))$$

$$\nabla z\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right) = \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right).$$

g) $f(u\,,v\,,w) = u^2 + v^2 - w^2 + uvw$ $\qquad$, $\qquad$ P (0 , 1 , 0)

$$\nabla f = \left(2u + vw\,,\,2v + uw\,,\,-2w + uv\right)$$

$$\nabla f(0{,}1{,}0) = (0\,,2\,,0)\,.$$

h) $z = (x^2 + y^2)\,\text{sen}(x^2 + y^2)$ $\qquad$, $\qquad$ P (0 , 0)

$$\nabla z = \left((x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)\cdot 2x + sen(x^2+y^2)\cdot 2x\,,\,(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)\cdot 2y + sen(x^2+y^2)\cdot 2y\right)$$

$$\nabla z(0{,}0) = (0\,,0)\,.$$

i) $f(x\,,t) = (x+2t)\,,\ln(x+2t)$ $\qquad$ P (e , 1)

$$\nabla f = \left((x+2t)\cdot\frac{1}{x+2t} + \ln(x+2t)\,,\,(x+2t)\cdot\frac{2}{x+2t} + \ln(x+2t)\cdot 2\right)$$

$$\nabla f(e\,,1) = (1 + \ln(e+2)\,,\,2 + 2\ln(e+2))\,.$$

j) $f(x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_4$ $\qquad$, $\qquad$ P (2 , 2 , 1 , 3)

$$\nabla f = (x_2 - x_3\,,\, x_1\,,\, -x_1\,,\, 1)$$
$$\nabla f\,(2,2,1,3) = (1\,,\,2\,,\,-2\,,\,1)$$

54. Determinar o vetor gradiente das seguintes funções:

a) $z = \dfrac{x^3}{y}$

$$\nabla z = \left(\frac{3x^2}{y} \,,\, \frac{-x^3}{y^2} \right)$$

b) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\nabla z = \left(2 \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \,,\, 2 \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right)$$
$$= \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,\, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

c) $w = 2x^2 y^5 z$

$$\nabla z = \left(4xy^5 z \,,\, 10x^2 y^4 z \,,\, 2x^2 y^5\right)$$

d) $z = \cos(xy) + 4$

$$\nabla z = \left(-\operatorname{sen}(xy) \cdot y \,,\, -\operatorname{sen}(xy) \cdot x\right)$$
$$= \left(-y\operatorname{sen}(xy) \,,\, -x\operatorname{sen}(xy)\right)$$

e) $f(u,v,w) = uvw + u^2 - v^2 - w^2$

$$\nabla f = (vw + 2u \,,\, uw - 2v \,,\, uv - 2w)$$

f) $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2 + \operatorname{sen} x$

$$\nabla f = (2xy^2 z^2 + \cos x \,,\, 2x^2 yz^2 \,,\, 2x^2 y^2 z)$$

55. Encontrar a equação da reta perpendicular à curva $y = \dfrac{1}{x}$, nos pontos $P_0(1\,,1)$ e $P_1\left(2\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$.

Temos:

$$y - \frac{1}{x} = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{1}{x^2} , 1 \right)$$

$$\nabla f (1 , 1) = (1 , 1)$$

O coeficiente angular é igual a 1.

$$y = 1 \cdot x + b$$

$$1 = 1 \cdot 1 + b \qquad \therefore b = 0$$

Equação da reta no ponto $P_0 (1 , 1) : y = x$.

Para $P_1 \left(2 , \frac{1}{2} \right)$ temos:

$$\nabla f \left(2 , \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{4} , 1 \right)$$

O coeficiente angular é igual a 4.

Equação da reta no ponto $P_1 \left(2 , \frac{1}{2} \right)$:

$$y = 4x + b$$

$$\frac{1}{2} = 4 \cdot 2 + b$$

$$\frac{1}{2} = 8 + b$$

$$b = \frac{1}{2} - 8 = \frac{1-16}{2} = \frac{-15}{2}$$

$$y = 4x - \frac{15}{2} .$$

56. Determinar o plano que contém os pontos (1 ,1 , 0) , (2 , 1 , 4) e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x , \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$z - x_0{}^2 - y_0{}^2 = 2x_0 (x - x_0) + 2y_0 (y - y_{0)}$$

$$\begin{cases} 0 - x_0{}^2 - y_0{}^2 = 2x_0 (1 - x_0) + 2y_0 (1 - y_0) \\ 4 - x_0{}^2 - y_0{}^2 = 2x_0 (2 - x_0) + 2y_0 (1 - y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_0{}^2 - y_0{}^2 = 2x_0 - 2x_0{}^2 + 2y_0 - 2y_0{}^2 \\ 4 - x_0{}^2 - y_0{}^2 = 4x_0 - 2x_0{}^2 + 2y_0 - 2y_0{}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_0{}^2 - y_0{}^2 - 2x_0 + 2x_0{}^2 - 2y_0 + 2y^2 = 0 \\ 4 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - 4x_0 + 2x_0{}^2 - 2y_0 + 2y_0{}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0{}^2 + y_0{}^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0 \\ x_0{}^2 + y_0{}^2 - 4x_0 - 2y_0 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0{}^2 + y_0{}^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0 \\ -x_0{}^2 - y_0{}^2 + 4x_0 + 2y_0 = 4 \end{cases}$$

$2x_0 = 4$

$x_0 = 2$

$x_0{}^2 + y_0{}^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0$

$4 + y_0{}^2 - 4 - 2y_0 = 0$

$y_0{}^2 - 2y_0 = 0$

$y_0(y_0 - 2) = 0$

$y_0 = 0$

$y_0 - 2 = 0$

$y_0 = 2$

Temos os pontos:

(2 , 0) e (2 , 2)

Equação dos planos:

$z - 4 = 4(x - 2)$

$z - 4 = 4x - 8$

$z = 4x - 8 + 4$

$z = 4x - 4$

$z - 8 = 4(x - 2) + 4(y - 2)$

$z - 8 = 4x - 8 + 4y - 8$

$z - 8 = 4x + 4y - 16$

$z = 4x + 4y - 8$

57. Dada a função $f(x, y) = x^2 + xy - y$ calcular

a) df

b) Δf

Mostrar que $\Delta f = df + R(\Delta x, \Delta y)$ e que $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0\,,\,0)} R(\Delta x, \Delta y) = 0$.

$f(x, y) = x^2 + xy - y$

a) $df = (2x + y)dx + (x - 1)dy$

b) $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y) - x^2 - xy + y$$
$$= (2x + y)\Delta x + (x - 1)\Delta y + (\Delta x)^2 + \Delta x \Delta y$$

Assim, $\Delta f = df + R(\Delta x, \Delta y)$, sendo $R(\Delta x, \Delta y) = (\Delta x)^2 + \Delta x \Delta y$, com $\lim\limits_{\Delta x \to 0\ \Delta y \to 0} \left[(\Delta x)^2 + \Delta x \Delta y\right] = 0$.

58. Calcular $df(1, 1)$ e $\Delta f(1, 1)$ da função $f(x, y) = x + y - xy^2$ considerando $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 1$. Comparar os resultados obtidos.

Temos:

$df = (1 - y^2)\Delta x + (1 - 2xy)\Delta y$.

$df(1, 1) = 0 + (-1) \cdot 1 = -1$.

$$\Delta f = f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$= (x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - f(x, y)$$

$$\Delta f(1, 1) = (1 + 0{,}01) + (1 + 1) - (1 + 0{,}01)(1 + 1)^2 - (1 + 1 - 1)$$
$$= 1{,}01 + 2 - 1{,}01 \cdot 4 - 1$$
$$= -2{,}03.$$

A diferença é relativamente grande porque Δy é grande.

Nos exercícios de 59 a 62 calcular a diferencial das funções dadas nos pontos indicados.

59. $f(x, y) = e^x \cos y$; $P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

$df = e^x \cos y dx + e^x(-seny)dy$

$$df\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = e\frac{\sqrt{2}}{2}dx + e\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)dy$$
$$= \frac{e\sqrt{2}}{2}dx - \frac{e\sqrt{2}}{2}dy.$$

60. $z = \ln(x^2 + y^2)$; P (1 , 1)

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy$$
$$dz(1{,}1) = \frac{2}{2}dx + \frac{2}{2}dy$$
$$= dx + dy$$

61. $w = xe^{2z} + y \quad ; \quad P\ (1\ ,2\ ,0)$

$$dw = e^{2z}dx + dy + x \cdot e^{2z} \cdot 2dz$$

$$dw(1,2,0) = e^{0}dx + dy + 2dz = dx + dy + 2dz$$

62. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad P\ (2\ ,1\ ,2)$

$$dw = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ydy + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2zdz$$

$$dw(2,1,2) = \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dy = \frac{2}{3}dz$$

Nos exercícios de 63 a 69 calcular a diferencial das funções dadas:

63. $z = sen^2(x+y)$

$$dz = 2sen(x+y) \cdot \cos(x+y)dx + 2sen(x+y)\cos(x+y)dy$$

64. $z = xe^{x+y} - y$

$$dz = (x \cdot e^{x+y} + e^{x+y})dx + (xe^{x+y} - 1)dy$$

$$e^{x+y}(x+1)dx + (xe^{x+y} - 1)dy$$

65. $f(u,v,w) = u^2 + \ln v - w^2$

$$df = 2u\,du + \frac{1}{v}dv - 2w\,dw$$

66. $f(x,y,z) = e^{xyz} - xy$

$$df = (e^{xyz} \cdot yz - y)dx + (e^{xyz} \cdot xz - x)dy + (e^{xyz} \cdot xy)dz$$

67. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}{x_1 + x_2 + x_3}$

$$df = \frac{(x_1+x_2+x_3) \cdot 2x_1 - (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)}{(x_1+x_2+x_3)^2}dx_1 + \frac{(x_1+x_2+x_3) \cdot 2x_2 - (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)}{(x_1+x_2+x_3)^2}dx_2$$

$$+ \frac{(x_1+x_2+x_3) \cdot 2x_3 - (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)}{(x_1+x_2+x_3)^2}dx_3$$

$$= \frac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_1x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} dx_1 + \frac{x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_2x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} dx_2$$
$$+ \frac{x_3^{\ 2} - x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} + 2x_1x_3 + 2x_2x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} dx_3$$

68. $f(x, y, z) = e^{x+y-z^2}$

$$df = e^{x+y-z^2} dx + e^{x+y-z^2} dy - 2z\, e^{x+y-z^2} dz$$

69. $z = arc\ tg\ \dfrac{y}{x} - arc\ tg\ \dfrac{x}{y}$

$$dz = \left(\frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) dx + \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) dy$$

$$= \frac{-2y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2x}{x^2 + y^2} dy\ .$$

70. Determinar o erro decorrente de tomarmos a diferencial dz como uma aproximação do acréscimo Δz, para as seguintes situações:

a) $z = x^2 + y^2$; (x, y) passando de (1 , 2) para (1 , 01 ; 2 , 01).

$$\begin{aligned} dz &= 2xdx + 2ydy \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01 \\ &= 0{,}02 + 0{,}04 \\ &= 0{,}06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(1{,}01 ; 2{,}01) - f(1 , 2) \\ &= (1{,}01)^2 + (2{,}01)^2 - (1 + 4) \\ &= 0{,}0602 \end{aligned}$$

Erro: $0{,}0602 - 0{,}06 = 0{,}0002 = 2 \cdot 10^{-4}$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; (x, y) passando de (1 , 2) para (1,01 ; 2,01).

$$dz = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ydy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0{,}01 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0{,}01$$

$= 0,013416407865$

$\Delta z = \sqrt{(1,01)^2 + (2,01)^2} - \sqrt{5}$

$= 0,0134209$

Erro: 5×10^{-6}.

c) $z = x^2 y$; (x, y) passando de (2 , 4) para (2,1 ; 4,2).

$dz = 2xydx + x^2 dy$

$dz = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2$

$= 16 \cdot 0,1 + 0,8$

$= 1,6 + 0,8 = 2,4$

$\Delta z = (2,1)^2 \cdot (4,2) - 4 \cdot 4$

$= 4,41 \cdot 4,2 - 16$

$= 18,522 - 16 = 2,522$

Erro $= 2,522 - 2,4 = 0,122$

71. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ volts e R = 12 ohms, calcular um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de 0,001 volt e R aumenta de 0,02 ohm.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$dP = \frac{2V}{R} dV + \frac{-V^2}{R^2} dR$$

$$= \frac{2 \cdot 120}{12} \cdot (-0,001) - \frac{(120)^2}{12^2} \cdot (0,02)$$

$$= -2,002$$

72. Um terreno tem a forma retangular. Estima-se que seus lados medem 1200 m e 1800m, com erro máximo de 10 metros e 15 cm respectivamente. Determinar o possível erro no cálculo da área do terreno.

Temos que a área é dada por $A = xy$, considerando-se x e y as dimensões da forma retangular.

$A = xy$

$dA = ydx + xdy$

$dA = 1800 \cdot 10 + 1200 \cdot 15$

$= 18000 + 18000 = 36000\ m^2$

Observa-se que o erro máximo ocorre quando Δx e Δy têm o mesmo sinal.

73. Usando diferencial, obter o aumento aproximado do volume de um cilindro circular reto, quando o raio da base varia de 3 cm para 3,1cm e a altura varia de 21cm até 21,5cm.

O volume é dado por $V = \pi r^2 h$.

A diferencial fica:

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r h dr + \pi r^2 d h \\ &= 2\pi \cdot 3 \cdot 21 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot 9 \cdot 0{,}5 \\ &= 12{,}6\pi + 4{,}5\pi \\ &= 17{,}1\pi\, cm^3. \end{aligned}$$

74. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica. Num dado instante o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm. Usando diferencial, obter uma aproximação da variação do volume, se o raio da base varia para 12,5cm e a altura para 7,8cm. Comparar o resultado obtido com a variação exata do volume.

O volume é dado por $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

A diferencial fica:

$$dV = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

$$dV = \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 8}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{\pi \cdot 144}{3} \cdot (-0{,}2)$$

$$dV = 22{,}4\pi .$$

A variação exata é dada por $\Delta V = V_2 - V_1$, sendo que $V_1 = \dfrac{\pi\, 144.8}{3}$ e $V_2 = \dfrac{\pi\, (12{,}5)^2 .7{,}8}{3}$. Assim, $\Delta V = 22{,}25\pi$.

Para comparar, temos a diferença entre os resultados $\Delta V - dV = -0{,}15\pi$.

75. Considerar o retângulo com lados *a = 5* cm e *b = 2* cm. Como vai variar, aproximadamente, a diagonal desse retângulo se o lado *a* aumentar 0,002cm e o lado *b* diminuir 0,1cm.

A diagonal é dada por:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Assim,

$$dd = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ada + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2bdb$$

$$= \frac{5}{\sqrt{25+4}} \cdot 0{,}002 + \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot (-0{,}1) = -3{,}52811 \cdot 10^{-2}$$

76. Encontrar um valor aproximado para as seguintes expressões:

a) $(1{,}01\cdot e^{0{,}015})^7$

$f(x,y)=(x\cdot e^y)^7 = x^7\cdot e^{7y}$

$f(x+\Delta y\ ,\ y+\Delta y)=(x+\Delta x\cdot e^{y+\Delta y})^7$

Fazendo:

$$\begin{cases} x=1 \\ \Delta x = 0{,}01 \\ y=0 \\ \Delta y = 0{,}015 \end{cases}$$

temos:

$df \cong \Delta f$

$\Delta f = f(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y) - f(x,y) \cong df$

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y) &\cong f(x,y)+df \\ &= (1\cdot e^0)^7 + 7x^6\cdot e^{7y}dx + x^7\cdot e^{7y}\cdot 7dy \\ &= 1+7\cdot 1\cdot 1\cdot 0{,}01 + 1\cdot 1\cdot 7\cdot 0{,}015 \\ &= 1{,}175\,. \end{aligned}$$

b) $(0{,}995)^4 + (2{,}001)^3$

Temos:

$f(x,y)=x^4+y^3$.

Fazendo

$$\begin{cases} x=1 \\ \Delta x = -0{,}005 \\ y=2 \\ \Delta y = 0{,}001 \end{cases}$$

temos:

$(0{,}995)^4+(2{,}001)^3 \cong f(x,y)+df$

$=1^4+2^3+4x^3dx+3y^2dy$

$=1+8-4\cdot 1\cdot 0{,}005+3\cdot 4\cdot 0{,}001$

$=8{,}992$.

c) $\sqrt{(3{,}99)^2+(4{,}01)^2}$

Temos $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Fazendo

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ \Delta x = -0,01 \\ \Delta y = 0,01 \end{cases}$$

temos:

$$\sqrt{(3,99)^2 + (4,01)^2} = \sqrt{16+16} + \frac{1}{\sqrt{32}}\left[4.\left(-0,01\right) + 4.0,01\right]$$

$=5,6568$

d) $\sqrt{(3{,}99)^2 + (4{,}01)^2 + (1{,}99)^2}$

Temos $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Fazendo

$$\begin{cases} x = 4 \quad e \quad \Delta x = -0,01 \\ y = 4 \quad e \quad \Delta y = 0,01 \\ z = 2 \quad e \quad \Delta z = -0,01 \end{cases}$$

temos:

$$\sqrt{(3,99)^2 + (4,01)^2 + (1,99)^2} = \sqrt{16+16+4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx$$

$$+\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ydy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2zdz$$

$$\sqrt{36} + \frac{1}{\sqrt{36}}\left[4.(-0,01) + 4.(0,01) + 2.(-0,01)\right]$$

=5,9966.

e) $1{,}02$

Temos $f(x, y) = x^y$. Fazendo,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ \Delta x = 0{,}02 \\ \Delta y = 0{,}001 \end{cases}$$

obtemos:

$$1,02^{3,001} = 1^3 + y \cdot x^{y-1}dx + x^y \ln x \cdot dy$$

$$= 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1.\ln 1.0,001$$

$$= 1 + 0{,}06$$

$$= 1{,}06$$

f) $\sqrt{(4{,}03)^2 + (2{,}9)^2}$

Temos que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fazendo

$$\begin{cases} \Delta y = (-0,1) \\ \Delta x = 0,03 \\ x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(4,03)^2 + (2,9)^2} &= 5 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy \\ &= 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,03 + \frac{3}{5} \cdot (-0,1) \\ &= 4,964\,. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4
4.10 - EXERCÍCIOS
pág. 156 - 159

1. Verificar a regra da cadeia: $\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ para as funções:

a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

$x=2t+1$

$y=4t^2-5$

$$h(t)=\ln\left((2t+1)^2+\left(4t^2-5\right)^2\right)=\ln\left(4t^2+4t+1+16t^4-40t^2+25\right)=\ln\left(16t^4-36t^2+4t+26\right)$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{64t^3-72t+4}{16t^4-36t^2+4t+26}=\frac{32t^3-36t+2}{8t^4-18t^2+2t+13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{dx}{dt}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2} \qquad \frac{dy}{dt}=8t$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 2+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot 8t=\frac{4x+16yt}{x^2+y^2}=\frac{4(2t+1)+16\left(4t^2-5\right)t}{16t^4-36t^2+4t+26}=\frac{8t+4+64t^3-80t}{16t^4-36t^2+4t+26}$$

$$=\frac{64t^3-72t+4}{16t^4-36t^2+4t+26}=\frac{32t^3-36t+2}{8t^4-18t^2+2t+13}.$$

b) $f(x,y)=sen(2x+5y)$

$x=\cos t$

$y=sen\,t$

$$h(t)=sen[2\cos t+5sen\,t]$$

$$\frac{dh}{dt}=\cos(2\cos t+5sen\,t)\cdot[2(-sen\,t)+5\cos t]=-2sen\,t[\cos(2\cos t+5sen\,t)]$$

$$+5\cos t\cos[2\cos t+5sen\,t]=\cos(2\cos t+5sen\,t)[5\cos t-2sen\,t]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x+5y) \qquad \frac{dx}{dt} = -sen\ t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5\cos(2x+5y) \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dh}{dt} = 2\cos[2\cos t + 5sen\ t]\cdot(-sen\ t) + 5\cos[2\cos t + 5sen\ t]\cos t$$

$$= \cos(2\cos t + 5sen\ t)[5\cos t - 2sen\ t]$$

c) $f(x,y) = xe^{2xy^2}$

$x = 2\ t$

$y = 3t - 1$

$$h(t) = 2te^{2\cdot 2t\cdot(3t-1)^2} = 2t\cdot e^{4t(3t-1)^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = 2t\cdot e^{4t(3t-1)^2}\cdot\left[4t\cdot 2(3t-1)\cdot 3 + (3t-1)^2\cdot 4\right] + e^{4t(3t-1)^2}\cdot 2$$

$$= e^{36t^3-24t\ \ +4t}\left(216t^3 - 96t^2 + 8t + 2\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^{2xy^2}\cdot 2y^2 + e^{2xy^2} \qquad \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{2xy^2}\cdot 2x\cdot 2y \qquad \frac{dy}{dt} = 3$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(2xy^2e^{2xy^2} + e^{2xy^2}\right)\cdot 2 + 4x^2ye^{2xy^2}\cdot 3 = 4xy^2e^{2xy^2} + 2e^{2xy^2} + 12x^2ye^{2xy^2}$$

$$= \left(4\cdot 2t(3t-1)^2 + 2 + 12\cdot 4t^2(3t-1)\right)e^{4t(3t-1)^2}$$

$$= e^{36t^3-24t^2+4t}\left(216t^3 - 96t^2 + 8t + 2\right).$$

d) $f(x,y) = 5xy + x^2 - y^2$

$x = t^2 - 1$

$y = t + 2$

$$h(t) = 5(t^2-1)(t+2) + (t^2-1)^2 - (t+2)^2 = 5(t^3+2t^2-t-2) + t^4 - 2t^2 + 1 - t^2 - 4t - 4 =$$
$$= 5t^3 + 10t^2 - 5t - 10 + t^4 - 2t^2 + 1 - t^2 - 4t - 4 = t^4 + 5t^3 + 7t^2 - 9t - 13.$$

$$\frac{dh}{dt} = 4t^3 + 15t^2 + 14t - 9.$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 2x$ $\qquad \frac{dx}{dt} = 2t$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 2y$ $\qquad \frac{dy}{dt} = 1$

$$\frac{dh}{dt} = [5(t+2) + 2(t^2-1)]\cdot 2t + [5(t^2-1) - 2(t+2)]\cdot 1 = (5t + 10 + 2t^2 - 2)\cdot 2t + (5t^2 - 5 - 2t - 4) =$$
$$= 10t^2 + 20t + 4t^3 - 4t + 5t^2 - 2t - 9 = 4t^3 + 15t^2 + 14t - 9.$$

e) $f(x, y) = \ln xy$

$x = 2t^2$

$y = t^2 + 2$

$$h(t) = \ln\left[2t^2\left(t^2+2\right)\right] = \ln\left(2t^4 + 4t^2\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8t^3 + 8t}{2t^4 + 4t^2}, t \neq 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{dx}{dt} = 4t$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ $\qquad \frac{dy}{dt} = 2t$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{x}\cdot 4t + \frac{1}{y}\cdot 2t = \frac{4t}{2t^2} + \frac{2t}{t^2+2} = \frac{4t(t^2+2) + 2t\cdot 2t^2}{2t^4 + 4t^2} = \frac{4t^3 + 8t + 4t^3}{2t^4 + 4t^2} = \frac{8t^3 + 8t}{2t^4 + 4t^2} = \frac{4t^2 + 4}{t^3 + 2t} \quad ; \quad t \neq 0.$$

Nos exercícios 2 a 7, determinar $\frac{dz}{dt}$ usando a regra da cadeia.

2. $z = tg(x^2 + y), \quad x = 2t, \quad y = t^2.$

$$\frac{dz}{dt} = \sec^2\left(x^2 + y\right)\cdot 2x\cdot 2 + \sec^2\left(x^2 + y\right)\cdot 2t$$
$$= \left(4x + 2t\right)\sec^2\left(x^2 + y\right)$$
$$= \left(4\cdot 2t + 2t\right)\sec^2\left(4t^2 + t^2\right)$$
$$= 10t\sec^2\left(5t^2\right)$$

3. $z = x\cos y, \quad x = sen\, t, \quad y = t.$

$$\frac{dz}{dt} = \cos y\cdot\cos t + x\left(-sen\, y\right)\cdot 1$$
$$= \cos t\cdot\cos t + sen\, t\cdot\left(-sen\, t\right)$$
$$= \cos^2 t - sen^2 t$$

4. $z = arc\, tg\, xy, \quad x = 2t, \quad y = 3t.$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y}{1 + x^2y^2}\cdot 2 + \frac{x}{1 + x^2y^2}\cdot 3$$
$$= \frac{2\cdot 3t + 3\cdot 2t}{1 + 4t^2\cdot 9t^2}$$
$$= \frac{12t}{1 + 36t^4}$$

5. $z = e^x\left(\cos x + \cos y\right), \quad x = t^3, \quad y = t^2.$

$$\frac{dz}{dt} = \left[e^x\left(-sen\, x\right) + \left(\cos x + \cos y\right)\cdot e^x\right]\cdot 3t^2 + [e^x\left(-sen\, y\right) + \left(\cos x + \cos y\right)\cdot 0].2t =$$
$$= \left[-e^{t^3} sen\, t^3 + e^{t^3}\cos t^3 + e^{t^3}\cos t^2\right]\cdot 3t^2 + e^{t^3}\left(-sen\, t^2\right)\cdot 2t$$
$$= e^{t^3}\left[-sen\, t^3 + \cos t^3 + \cos t^2\right]\cdot 3t^2 + e^{t^3}\cdot 2t\cdot\left(-sen\, t^2\right)$$
$$= e^{t^3}\left[-sen\, t^3 + \cos t^3 + \cos t^2\right]\cdot 3t^2 - e^{t^3}\cdot 2t\cdot sen\, t^2$$
$$= te^{t^3}\left(-3t\, sen\, t^3 + 3t\cos t^3 + 3t\cos t^2 - 2sen\, t^2\right).$$

6. $z = \dfrac{x}{y}, \quad x = e^{-t}, \quad y = \ln t.$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y} \cdot e^{-t} \cdot (-1) + \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \frac{-e^{-t}}{\ln t} - \frac{e^{-t}}{(\ln t)^2 t}$$

7. $z = xy, \quad x = 2t^2 + 1, \quad y = sen\, t.$

$$\frac{dz}{dt} = y \cdot 4t + x \cdot \cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = sen\, t \cdot 4t + \left(2t^2 + 1\right) \cos t = 4t\ sen\, t + \left(2t^2 + 1\right) \cos t$$

8. Dada a função $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + e^{xy}$, com $x(t) = \dfrac{1}{t}$ e $y(t) = \sqrt{t}$, encontrar $\dfrac{dh}{dt}$ onde $h(t) = f(x(t), y(t))$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{y} + e^{xy} \cdot y\right) \cdot \frac{-1}{t^2} + \left(\frac{-x}{y^2} + e^{xy} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{2} t^{t^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + e^{t^{-1/2}} \sqrt{t}\right) \cdot \frac{-1}{t^2} \cdot + \left(\frac{-1/t}{t} + \frac{e^{t^{-1/2}}}{t}\right) \cdot \frac{1}{2} t^{t^{-1/2}}$$

$$= \frac{-1}{t^{5/2}} - e^{t^{-1/2}} . t^{-3/2} - \frac{1}{2} t^{-5/2} + \frac{1}{2} e^{t^{-1/2}} t^{-3/2} - \frac{1}{2} e^{t^{-1/2}} \cdot t^{-3/2} - \frac{3}{2} t^{-5/2}$$

$$= \frac{-3}{2t^2 \sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{2t^2} e^{\frac{\sqrt{t}}{t}}.$$

9. Seja $h(t) = f\left(e^{2t} \quad , \quad \cos t\right)$, onde $f : R^2 \to R$ é uma função diferenciável.

a) Determinar $h'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(e^{2\pi} \quad , \quad -1\right) = \dfrac{1}{e^{2\pi}}$, determinar $h'(\pi)$.

Para o item a) temos:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Considerando que:

$f = f(x, y); x = e^{2t}; y = \cos t$

temos:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2e^{2t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-sen\, t)$$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(e^{2t} \quad , \quad \cos t\right) \cdot 2e^{2t} - \frac{\partial f}{\partial y}\left(e^{2t} \quad , \quad \cos t\right) \cdot sen\, t$$

Para o item b) temos:

$$h'(\pi) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(e^{2\pi} \quad , \quad -1\right) \cdot 2e^{2\pi} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(e^{2\pi} \quad , \quad -1\right) \cdot 0 = \frac{1}{e^{2\pi}} \cdot 2e^{2\pi} = 2$$

10. Sejam $z = f(x,y) \quad , \quad x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$. Obter a derivada $\frac{d^2h}{dt^2}$, sendo h a função composta $h(t) = f(x(t) \quad , \quad y(t))$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dt}\right] + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

11. Verificar a regra da cadeia para as funções:

a) $z = u^2 - v^2 \quad , \quad u = x + 1 \quad , \quad v = xy$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= 2u \cdot 1 + (-2v) \cdot y \\
&= 2u - 2vy \\
&= 2(x+1) - 2xy^2 \\
&= 2 + 2x - 2xy^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= 2u\cdot 0+(-2v)\cdot x\\ &= -2vx\\ &= -2x^2y\end{aligned}$$

Para verificar os resultados obtidos temos:

$$z=(x+1)^2-x^2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x+1)-2xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^2y$$

b) $z=f\left(e^x\ ,-y^2\right)$, $f(u\ ,v)=2u+v^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= 2\cdot e^x+2v\cdot 0\\ &= 2e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= 2\cdot 0+2v(-2y)\\ &= -4vy\\ &= -4\left(-y^2\right)y\\ &= 4y^3\end{aligned}$$

Para verificar os resultados obtidos temos:

$$z=f(u\ ,v)=2u+v^2=2e^x+\left(-y^2\right)^2=2e^x+y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^x \qquad ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3$$

c) $z=\sqrt{u^2+v^2+5}$, $u=\cos x$, $v=sen\ y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + 5\right)^{-1/2} \cdot 2u \cdot \left(- sen\ x\right) + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + 5\right)^{-1/2} \cdot 2v \cdot 0$$
$$= \frac{- sen\ x \cdot \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + sen^2 y + 5}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}} \cdot 0 + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 5}} \cdot \cos y$$
$$= \frac{\cos y \cdot sen\ y}{\sqrt{\cos^2 x + sen^2 y + 5}}$$

Para verificar os resultados obtidos temos:

$$z = \sqrt{\cos^2 x + sen^2 y + 5}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x + sen^2 y + 5\right)^{-1/2} \cdot 2 \cos x \cdot \left(- sen\ x\right) = \frac{- \cos x \cdot sen\ x}{\sqrt{\cos^2 x + sen^2 y + 5}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x + sen^2 y + 5\right)^{-1/2} \cdot 2 sen\ y \cdot \cos y = \frac{sen\ y \cdot \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + sen^2 y + 5}}$$

d) $f(u\ , v) = uv - v^2 + 2 \quad , \quad u = x^2 + y^2 \quad , \quad v = x - y + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= v \cdot 2x + (u - 2v) \cdot (1 + y)$$
$$= 2x\left(x - y + xy\right) + \left(x^2 + y^2 - 2(x - y + xy)\right)(1 + y)$$
$$= 2x^2 - 2xy + 2x^2 y + \left(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2xy\right) \cdot (1 + y)$$
$$= 2x^2 - 2xy + 2x^2 y + x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2xy + x^2 y + y^3 - 2xy + 2y^2 - 2xy^2$$
$$= y^3 + 3y^2 + 3x^2 + 3x^2 y - 2xy^2 - 6xy - 2x + 2y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= v \cdot 2y + (u - 2v) \cdot (-1 + x)$$
$$= (x - y + xy) \cdot 2y + (x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2xy) \cdot (-1 + x)$$
$$= x^3 - 3x^2 - 3y^2 + 3xy^2 - 2x^2 y + 6xy + 2x - 2y.$$

Para verificar os resultados obtidos temos:

$$f(u\ ,\ v) = uv - v^2 + 2$$
$$= (x^2 + y^2) \cdot (x - y + xy) - (x - y + xy)^2 + 2$$
$$= x^3 - 2x^2 y + x^3 y + 3y^2 x - y^3 + xy^3 + 2 - x^2 + 2xy - y^2 - x^2 y - x^2 y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + 3x^2 y + 3y^2 + y^3 - 2x + 2y - 2xy - 2xy^2$$
$$= 3x^2 - 6xy + 3x^2 y + 3y^2 - 2x + 2y + y^3 - 2xy^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + x^3 + 6yx - 3y^2 + 3xy^2 + 2x - 2y - x^2 - 2x^2 y.$$

e) $f(x\ ,\ y) = \ln xy \quad , \quad x = 2u^2 + v^4, \quad y = 3u^2 + v^2.$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$= \frac{y}{xy} \cdot 4u + \frac{x}{xy} \cdot 6u$$
$$= \frac{4u}{2u^2 + v^4} + \frac{6u}{3u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= \frac{1}{x} \cdot 4v^3 + \frac{1}{y} \cdot 2v$$
$$= \frac{4v^3}{2u^2 + v^4} + \frac{2v}{3u^2 + v^2}.$$

Para verificar os resultados obtidos temos:

$$
\begin{aligned}
f(x\,,\,y) &= \ln\, xy \\
&= \ln\left(2u^2+v^4\right)\left(3u^2+v^2\right) \\
&= \ln\left(6u^4+2u^2v^2+3u^2v^4+v^6\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{24u^3+4uv^2+6uv^4}{6u^4+2u^2v^2+3u^2v^4+v^6} \\
&= \frac{4u}{2u^2+v^4}+\frac{6u}{3u^2+v^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{4u^2v+12u^2v^3+6v^5}{6u^4+2u^2v^2+3u^2v^4+v^6} \\
&= \frac{4v^3}{2u^2+v^4}+\frac{2v}{3u^2+v^2}.
\end{aligned}
$$

Nos exercícios 12 a 16, determinar as derivadas parciais: $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, usando a regra da cadeia.

12. $z=\sqrt{x^2+y^3}$, $x=u^2+1$, $y=\sqrt[3]{v^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}\cdot 2x\cdot 2u+\frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}\cdot 3y^2\cdot 0 \\
&= \frac{2ux}{\sqrt{x^2+y^3}} \\
&= \frac{2u\left(u^2+1\right)}{\sqrt{u^4+v^2+2u^2+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}\cdot 0+\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot v^{-1/3} \\
&= \frac{y^2v^{-1/3}}{\sqrt{x^2+y^3}} \\
&= \frac{\left(v^{2/3}\right)^2\cdot v^{-1/3}}{\sqrt{u^4+v^2+2u^2+1}} \\
&= \frac{v}{\sqrt{u^4+v^2+2u^2+1}}
\end{aligned}
$$

13. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right) \quad , \quad x = \cos u \cdot \cos v \quad , \quad y = sen\, u \cdot \cos v$

$$\begin{aligned} z &= \ln\left(x^2 + y^2\right) \\ &= \ln\left(\cos^2 u \cdot \cos^2 v + sen^2 u \cdot \cos^2 v\right) \\ &= \ln\left(\cos^2 v\right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2\cos v(-sen\, v)}{\cos^2 v} = \frac{-2sen\, v}{\cos v} = -2tg\ v.$$

14. $z = xe^y \quad , \quad x = uv \quad , \quad y = u - v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= e^y \cdot v + xe^y \cdot 1 \\ &= ve^y + xe^y \\ &= e^y \left(v + x\right) \\ &= e^{u-v}\left(v + uv\right) \\ &= ve^{u-v}\left(1 + u\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= e^y \cdot u + xe^y \cdot (-1) \\ &= e^y \left(u - x\right) \\ &= e^{u-v}\left(u - uv\right) \\ &= ue^{u-v}\left(1 - v\right). \end{aligned}$$

15. $z = x^2 - y^2 \quad , \quad x = u - 3v \quad , \quad y = u + 2v.$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$= 2x\cdot 1 + (-2y)\cdot 1$$
$$= 2x - 2y$$
$$= 2(x-y)$$
$$= -10v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\cdot(-3) + (-2y)\cdot 2$$
$$= -6x - 4y$$
$$= -6(u-3v) - 4(u+2v)$$
$$= -10u + 10v,$$

16. $z = e^{x/y}$, $x = u\cos v$, $y = u\, sen\, v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$= e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\cos v + e^{x/y}\cdot\frac{-x}{y^2}\cdot sen\, v$$
$$= \frac{e^{x/y}\cdot\cos v}{y} - \frac{x\, sen\, v e^{x/y}}{y^2}$$
$$= \frac{e^{x/y}\cdot y\cdot\cos v - x\, sen\, v e^{x/y}}{y^2}$$
$$= \frac{e^{x/y}\left(y\cos v - x\, sen\, v\right)}{y^2}$$
$$= \frac{e^{u\cos v/u\, sen\, v}\left(u\, sen\, v\cdot\cos v - u\cos v\cdot sen\, v\right)}{u^2 sen^2 v}$$
$$= 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\cdot u(-sen\, v) + e^{x/y}\cdot\frac{-x}{y^2}\cdot u\cdot\cos v$$
$$= \frac{e^{x/y}(-y\cdot u\cdot sen\, v - x\, u\cos v)}{y^2}$$
$$= \frac{e^{\cot g\, v}(-u\, sen\, v\cdot u\cdot sen\, v - u\cos v\cdot u\cdot\cos v)}{u^2 sen^2 v}$$
$$= e^{\coth v}\,\frac{(-u^2)}{u^2 sen^2 v}$$
$$= -\frac{e^{\cot g\, v}}{sen^2 v}$$

17. Dada a função $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + x^2 + y^2$ com $x = r\cos\theta$, $y = r\, sen\,\theta$, encontrar $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

$$z = \frac{r\cos\theta}{r\,sen\theta} + r^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\cos\sec^2\theta.$$

Nos exercícios 18 a 22 determinar as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

18. $z = \dfrac{r^2 + s}{s} \quad , \quad r = 1 + x \quad , \quad s = x + y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2r}{s}\cdot 1 + \frac{s - (r^2 + s)}{s^2}\cdot 1$$
$$= \frac{2r}{s} + \frac{-r^2}{s^2} = \frac{2rs - r^2}{s^2}$$
$$= \frac{2(1+x)(x+y) - (1+x)^2}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2xy + 2y - 1}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2r}{s}\cdot 0 + \frac{-r^2}{s^2}\cdot 1 = \frac{-r^2}{s^2} = \frac{-(1+x)^2}{(x+y)^2}.$$

19. $z = uv^2 + v\ln u \quad , \quad u = 2x - y \quad , \quad v = 2x + y$

$$z = (2x-y)(2x+y)^2 + (2x+y)\ln(2x-y)$$
$$= (2x-y)(2x+y)(2x+y) + (2x+y)\ln(2x-y)$$
$$= (4x^2 - y^2)(2x+y) + (2x+y)\ln(2x-y) =$$
$$= 8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - y^3 + 2x\ln(2x-y) + y\ln(2x-y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2 + 8xy - 2y^2 + 2x\cdot\frac{2}{2x-y} + 2\ln(2x-y) + y\cdot\frac{2}{2x-y}$$
$$= 2(2x+y)^2 + 2\cdot\frac{2x+y}{2x-y} + 4(4x^2 - y^2) + 2\ln(2x-y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 4xy - 3y^2 + 2x\cdot\frac{-1}{2x-y} + y\cdot\frac{-1}{2x-y} + \ln(2x-y)$$
$$= -(2x-y)^2 - \frac{2x+y}{2x-y} + 2(4x^2 - y^2) + \ln(2x-y).$$

20. $z = l^2 + m^2 \quad , \quad l = \cos xy \quad , \quad m = sen\ xy$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2l \cdot (-sen\ xy) \cdot y + 2m \cdot \cos xy \cdot y \\ &= -2l\ y\ sen\ xy + 2m\ y \cos xy \\ &= -2y \cos xy\ sen\ xy + 2y\ senxy \cos xy = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 2l \cdot (-sen\ xy) \cdot x + 2m \cos xy \cdot x \\ &= -2l\ x\ sen\ xy + 2m\ x \cos xy \\ &= -2x \cos xy\ sen\ xy + 2x\ sen\ xy \cos xy \\ &= 0.\end{aligned}$$

21. $z = u^2 + v^2 \quad , \quad u = x^2 - y^2 \quad , v = e^{2xy}$

$$\begin{aligned}z &= u^2 + v^2 \\ &= \left(x^2 - y^2\right)^2 + e^{4xy}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\left(x^2 - y^2\right) \cdot 2x + e^{4xy} \cdot 4y = 4x\left(x^2 - y^2\right) + 4ye^{4xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(x^2 - y^2\right)(-2y) + e^{4xy} \cdot 4x = -4y\left(x^2 - y^2\right) + 4xe^{4xy}.$$

22. $z = uv + u^2 \quad , \quad u = xy \quad , \quad v = x^2 + y^2 + \ln xy$

$z = uv + u^2 \quad , \quad u = xy \quad , \quad v = x^2 + y^2 + \ln xy$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= x^3 + 3xy^2 + x\left(y \cdot \frac{x}{xy} + \ln xy\right) + 2x^2 y \\ &= x^3 + 3xy^2 + x + x \ln xy + 2x^2 y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(x^2 + y^2 + \ln xy + 2xy\right) y + xy\left(2x + \frac{1}{x}\right) \\ &= y^3 + x^2 y + 2xy^2 + y \ln xy + 2x^2 y + y \\ &= y^3 + 3x^2 y + y \ln xy + y + 2xy^2.\end{aligned}$$

23. Seja $z = f(x, y), x = r\cos\theta, y = rsen\theta$, mostrar que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}sen\theta.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}.r(-sen\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}.r\cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + 2.\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y}sen\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 sen^2\theta$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 .r^2.\cos^2\theta - 2.\frac{\partial f}{\partial x}r^2 sen\theta.\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 .r^2.sen^2\theta\right]$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}sen\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 sen^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2\theta$$

$$-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}sen\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 sen^2\theta.$$

24. Seja $f : \Re^2 \to \Re$ uma função diferenciável. Mostrar que $z = f(x - y, y - x)$ satisfaz a equação $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.1 + \frac{\partial f}{\partial v}.(-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}.1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= 0.$$

25. Dada $z = f\left(x^2 + y^2\right)$, f diferenciável, mostrar que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Temos que $z = f(u), u = x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$y\frac{\partial f}{\partial u}.2x - x\frac{\partial f}{\partial u}.2y = 0$$

26. Supondo que $z = z(x, y)$ é definida implicitamente por $f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right) = 0$, mostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{1}{z}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{-x}{z^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{-y}{z^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}.0 + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{1}{z}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{-x}{z^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{-y}{z^2}}.$$

$$x.\frac{-\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{1}{z}}{\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-x}{z^2}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{-y}{z^2}}+y\frac{-\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z}}{\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-x}{z^2}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{-y}{z^2}}$$

$$=\frac{-x\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{1}{z}-y\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{-x}{z^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{-y}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{z}.\frac{-x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(-x)-\frac{\partial f}{\partial v}.y\right)}$$

$$=z\frac{-x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}}{-x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}}=z$$

27. Determinar as derivadas parciais $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$.

a) $w=x^2+2y^2-z^2, x=2uv, y=u+v, z=u-v$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}&=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}\\&=2x.2v+4y.1+(-2z).1\\&=4xv+4y-2z\\&=4.2uvv+4(u+v)-2(u-v)=8uv^2+2u+6v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial v}&=2x.2u+4y.1+(-2z)(-1)\\&=4xu+4y+2z\\&=4.2uvu+4(u+v)+2(u-v)\\&=8u^2v+4u+4v+2u-2v=8u^2v+6u+2v\end{aligned}$$

b) $w=xy+xz+yz, x=u^2-v^2, y=uv, z=(u-v)^2$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = (y+z).2u + (x+z).v + (x+y).2(u-v)$$
$$= 2uy + 2uz + xv + zv + 2ux + 2uy - 2vx - 2vy$$
$$= 4uy + 2uz - xv + zv + 2ux - 2vy$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2v^3 + 4u^3 - 4uv^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = (y+z).(-2v) + (x+z).u + (x+y).2(u-v)(-1)$$
$$= -2yv - 2zv + xu + zu - 2ux - 2uy + 2vx + 2vy$$
$$= -ux - 2zv + zu - 2uy + 2vx$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = -4v^3 - 4u^2v + 6uv^2$$

28. Se $z = f(x,y), x = r\cos\theta, y = rsen\theta$, onde *f* é uma função diferenciável, expressar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de r e θ.

Temos que:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}.sen\theta$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}.r(-sen\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}.r\cos\theta$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial y}sen\theta\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x}rsen\theta\right)$$

Assim temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial z}{\partial \theta} sen\theta - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial z}{\partial x}.sen\theta sen\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r} tg\theta \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{sen^2\theta}{\cos\theta}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + tg^2\theta\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r} tg\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta \sec^2\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r} tg\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

$$= \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + rsen\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - rsen\theta sen\theta\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial z}{\partial \theta} + sen\theta\frac{\partial z}{\partial r}$$

29. Supondo que a função diferenciável $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação dada, determinar sua derivada de $\frac{dy}{dx}$:

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{18x}{8y} = \frac{-9x}{4y}$$

b) $2x^2 - 3y^2 = 5xy$

$$2x^2 - 3y^2 - 5xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(4x-5y)}{-6y-5x} = \frac{4x-5y}{6y+5x}.$$

30. Supondo que a função diferenciável $z = f(x, y)$ é definida pela equação dada, determinar

$\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $x^3y^2 + x^3 + z^3 - z = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-\left(3x^2y^2 + 3x^2\right)}{3z^2 - 1} = \frac{-3x^2\left(y^2 + 1\right)}{3z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2x^3y}{3z^2 - 1}$$

b) $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(2x - y)}{-2z} = \frac{2x - y}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(2y - x)}{-2z} = \frac{2y - x}{2z}$$

c) $xyz - x - y + x^2 = 3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(yz - 1 + 2x)}{xy} = \frac{1 - yz - 2x}{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(xz - 1)}{xy} = \frac{1 - xz}{xy}$$

31. Supondo que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$, z>0 sejam definidas implicitamente pelo sistema dado, determinar as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-(2x-2z)}{2y-2z}=\frac{-x+z}{y-z}.$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2y & 2x\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{2y-2z}=\frac{-(2y-2x)}{2y-2z}=\frac{-y+x}{y-z}.$$

b) $\begin{cases}2x^2-y^2=z^2\\ x+y=2\end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\begin{vmatrix}4x & -2z\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2y & -2z\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-(2z)}{2z}=-1; z\neq 0$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-\begin{vmatrix}-2y & 4x\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{2z}=\frac{-(-2y-4x)}{2z}=\frac{y+2x}{z}; z\neq 0$$

32. Determinar as derivadas parciais de 1ª ordem das funções $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ definidas implicitamente pelo sistema dado:

a) $\begin{cases} x^3 + u^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + v^2 = 0 \end{cases}$

Temos que:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2y \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4uy$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 6x^2 y - 4xy$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2u \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4ux$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ 2v & 2y \end{vmatrix} = -4vy$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 2x & 2v \end{vmatrix} = 6x^2 v$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = \frac{-4uy}{6x^2 y - 4xy} = \frac{-2uy}{3x^2 y - 2xy}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = \frac{4ux}{6x^2 y - 4xy} = \frac{2ux}{3x^2 y - 2xy}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}=\frac{-4vy}{6x^2y-4xy}=\frac{-2vy}{3x^2y-2xy}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}=\frac{-6x^2v}{6x^2y-4xy}=\frac{-3x^2v}{3x^2y-2xy}$$

b) $\begin{cases} x+u-v=3 \\ y-3uv+v^2=0 \end{cases}$

Temos que:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3v & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3v \end{vmatrix}=-3v$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3u & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3u+2v \end{vmatrix}=2v-3u$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{3v}{1}=3v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-2v+3u}{1}=3u-2v$$

33. Pode-se garantir que a equação $x^3+2xy+y^3=8$ define implicitamente alguma função diferencial $y=y(x)$? Em caso positivo, determinar $\frac{dy}{dx}$.

Vamos analisar as hipóteses do teorema da função implícita.

$$F(x,y)=x^3+2xy+y^3-8$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=3x^2+2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x+3y^2$$

As derivadas são contínuas em $\Re^2$, portanto podemos garantir que $x^3+2xy+y^3=8$ define implicitamente uma função diferencial. Temos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+2y}{2x+3y^2} \text{ para } 2x+3y^2\neq 0$$

34. Verificar que a equação dada define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y=y(x)$. Determinar $\frac{dy}{dx}$.

a) $e^{xy}=4$

$$F(x,y)=e^{xy}-4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=ye^{xy}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^{xy}}{xe^{xy}}=\frac{-y}{x},\quad x\neq 0.$$

b) $x^3 + y^3 + y + 1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2}{3y^2 + 1}$$

35. Escrever a regra da cadeia para

a) $h(x,y) = f\left(x, u(x,y)\right)$

Temos,

$f(v,u), v = x, u = u(x,y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}.1 + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}.0 + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}$$

b) $h(x) = f\left(x, u(x), v(x)\right)$

$h(x) = f\left(x, u(x), v(x)\right) = f(w,u,v), w = x, u = u(x), v = v(x)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}.1 + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{dv}{dx}$$

c) $h(u,v,w) = f\left(x(u,v,w), y(u,v), z(w)\right)$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dw}$$

36. Dadas as funções $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$, definidas pelo sistema $\begin{cases} u = 2x^2 + y^2 \\ v = x - 2y \end{cases}$, determinar as derivadas parciais de 1ª ordem de *x* e *y* em relação a *u* e *v*.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2y \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4x & 2y \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-8x-2y} = \frac{1}{4x+y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & 2y \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{-2y}{-8x-2y} = \frac{y}{4x+y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{-\begin{vmatrix} 4x & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{-1}{-8x-2y} = \frac{1}{8x+2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{-\begin{vmatrix} 4x & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8x-2y} = \frac{4x}{-8x-2y} = -\frac{2x}{4x+y}$$

37. As equações

$$2u + v - x - y = 0$$

$$xy + uv = 1$$

determinam u e v como funções de x e y. Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ v & u \end{vmatrix}} = -\frac{-u-y}{2u-v} = \frac{u+y}{2u-v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x & u \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{u+x}{2u-v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ v & y \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{-(2y+v)}{2u-v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ v & x \end{vmatrix}}{2u-v} = \frac{-(2x+v)}{2u-v}$$

38. Calcular o jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ para:

a) $x = u\cos v, y = usenv$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -usenv \\ senv & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + usen^2 v = u$$

b) $x = u + v, y = \dfrac{v}{u}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u} + \frac{v}{u^2} = \frac{u+v}{u^2}$$

c) $x = u^2 + v^2, y = uv$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 - 2v^2$$

39. Supondo que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam definidas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y = 4 \end{cases}$, determinar:

a) $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{1} = -\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2y + 2x = 2x - 2y\,.$$

b) um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ definidas implicitamente pelo sistema dado.

$$y^2 = z - x^2$$
$$y = 4 - x$$
$$(4-x)^2 = z - x^2$$
$$z = 2x^2 - 8x + 16$$

40. Achar as derivadas de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 8xy^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -9y^2 + 8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + 8y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18y + 8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 16xy. \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 16xy.$$

b) $z = x^2y^2 - xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 - y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xy - 1$$

c) $z = \ln xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

d) $z = e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = xye^{xy} + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$$

41. Encontrar as derivadas de 3ª ordem da função $z = x + y + x^3 - x^2 - y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 3x^2 - 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 0.$$

Obs.: As demais derivadas de 3ª. ordem são nulas.

Nos exercícios de 42 a 47, determinar as derivadas parciais indicadas.

42. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\frac{1}{2}\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.2x}{x^2+4y^2}=\frac{-x}{\left(x^2+4y^2\right)\sqrt{x^2+4y^2}}=-x\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-x.\frac{-3}{2}\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2x+\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-3}{2}}(-1)=3x^2\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-5}{2}}-\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=-x\frac{-3}{2}\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{-5}{2}}.8y=\frac{12xy}{\left(x^2+4y^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

43. $z=x\cos xy, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x.senxy.y+\cos xy$$
$$=-xysenxy+\cos xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-xy.\cos xy.y+senxy(-y)+(-senxy).y$$
$$=-xy^2\cos xy-ysenxy-ysenxy$$
$$=-xy^2\cos xy-2ysenxy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-xy.\cos xy.x+senxy.(-x)+(-senxy).x$$
$$=-x^2y\cos xy-xsenxy-xsenxy$$
$$=-x^2y\cos xy-2xsenxy$$

44. $z=\ln\left(x^2+y^2\right), \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 (4x) - \left(2x^2 - 2y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)2x}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$$

$$= \frac{-4x^3 + 12xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

45. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-1}{2}} (-2z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -z.\frac{-1}{2}\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-3}{2}} (-2z) + \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-1}{2}}.(-1)$$

$$= -z^2\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-3}{2}} - \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -y\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} == -xy\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

46. $w = x^2 + y^2 + 4z^2 + 1, \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} = 0$$

47. $z=\sqrt{2xy+y^2}\,,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=y.\frac{-1}{2}\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}.\left(2x+2y\right)+\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$=-y\left(x+y\right)\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}+\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y.\frac{-1}{2}\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}.2y=-y^2\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-y^2.\frac{-3}{2}\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2y=3y^3\left(2xy+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}$$

48. Verificar o teorema de Schwartz para as funções:

a) $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y.2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2.(-2x)+2xy.2\left(x^2+y^2\right).2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)x+8xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{-2x^3-2xy^2+8xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$=\frac{-2x^3+6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\quad\forall\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right).1-y.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2.2x-\left(x^2-y^2\right).2\left(x^2+y^2\right).2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{\left(x^2+y^2\right)2x-\left(x^2-y^2\right).4x}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{2x^3+2xy^2-4x^3+4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$=\frac{-2x^3+6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\forall\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$$

b) $z=xe^{x+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xe^{x+y^2} + e^{x+y^2} = e^{x+y^2}\left(x+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x+1\right)e^{x+y^2}.2y = e^{x+y^2}\left(2xy+2y\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x.e^{x+y^2}.2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy.e^{x+y^2} + e^{x+y^2}.2y = e^{x+y^2}\left(2xy+2y\right)$$

49. Se $= f\left(x, y\right)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e satisfaz a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ela é dita uma função harmônica. Verificar se as funções dadas são harmônicas.

a) $z = e^x seny$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x seny \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x seny$$

$e^x seny - e^x seny = 0$. É harmônica.

b) $z = e^x \cos y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x seny$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$e^x \cos y - e^x \cos y = 0$. É harmônica.

c) $z = y^3 - 3x^2 y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6xy \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$-6y+6y=0$ É harmônica
.

d) $z=x^2+2xy$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y$ $\quad\quad$ $\frac{\partial z}{\partial y}=2x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$2\neq 0$. Não é harmônica.

50. Calcular as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

a) $\vec{f}\left(x,y,z\right)=\sqrt{y}\,\vec{i}+x^2y^2z^2\,\vec{j}+e^{xyz}\,\vec{k}$

$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=2xy^2z^2\,\vec{j}+yz\,e^{xyz}\,\vec{k}$.

$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}=\frac{1}{2}y^{-1/2}\,\vec{i}+2x^2yz^2\,\vec{j}+xz\,e^{xyz}\,\vec{k}$.

$\frac{\partial\vec{f}}{\partial z}=2x^2y^2z\,\vec{j}+xy\,e^{xyz}\,\vec{k}$.

b) $\vec{g}(x,y,z)=\left(\frac{x-y}{x+y},\ 2x,3\right)$

$\frac{\partial\vec{g}}{\partial x}=\left(\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2},2,0\right)=\left(\frac{2y}{(x+y)^2},2,0\right)$.

$\frac{\partial\vec{g}}{\partial y}=\left(\frac{(x+y)(-1)-(x-y)(1)}{(x+y)^2},0,0\right)=\left(\frac{-2x}{(x+y)^2},0,0\right)$.

$\frac{2\vec{g}}{2z}=(0,0,0)$.

c) $\vec{h}(x,y,z)=\left(9-z^2,9-y^2,9-x^2\right)$

$\frac{\partial\vec{h}}{\partial x}=(0,0,-2x)$

$\frac{\partial\vec{h}}{\partial y}=(0,-2y,0)$

$\frac{\partial\vec{h}}{\partial z}=(-2z,0,0)$

d) $\vec{p}(x,y)=\left(e^{2x}, xy\,e^{3y}\right)$

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial x}=\left(2e^{2x},\, ye^{3y}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial y}=\left(0, 3xy\,e^{3y}+xe^{3y}\right)=\left(0,(3y+1)xe^{3y}\right)$$

e) $\vec{q}(x,y)=\left(x\sqrt{y}\,,(x-y)\ln y\right)$

$$\frac{\partial\vec{q}}{\partial x}=\left(\sqrt{y}\,,\ln y\right)$$

$$\frac{\partial\vec{q}}{\partial y}=\left(\frac{1}{2}xy^{-1/2}\,,(x-y)\cdot\frac{1}{y}+\ln y(-1)\right)=\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\,,\frac{x-y}{y}-\ln y\right)$$

f) $\vec{u}(x,y,z)=e^{xy}\,\vec{i}+\ln xz\,\vec{j}+2\vec{k}$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}=ye^{xy}\,\vec{i}+\frac{z}{xz}\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}=xe^{xy}\,\vec{i}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}=\frac{x}{xz}\,\vec{j}=\frac{1}{z}\,\vec{j}$$

51. Dada $\vec{f}(x,y,z)=\left(e^{xy}, e^{yz}, e^{xz}\right)$ encontrar $\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial z}$.

Temos:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=\left(ye^{xy}, 0, ze^{xz}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}=\left(xe^{xy}, ze^{yz}, 0\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial z}=\left(0, ye^{yz}, xe^{xz}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial z}=\left((x+y)e^{xy},(y+z)e^{yz},(x+z)e^{xz}\right).$$

52. Dada $\vec{f}(x,y,z)=(x^2y\,,x+y\,,xz)$, verificar que $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x}(1,0,1)+\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial y}(1,0,1)=\vec{a}$ onde,

$\vec{a}=\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)}\vec{f}(x,y,z)$.

Temos:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=(2xy\,,1,z)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(1,0,1)=(0,1,1)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}=(x^2\,,1,0)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}(1,0,1)=(1,1,0)$$

$$\vec{a}=\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)}(x^2y\,,x+y\,,xz)=(1,2,1)$$

Assim,

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(1,0,1)+\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}(1,0,1)=(1,2,1).$$

53. Seja $\vec{f}$ a função vetorial definida por $\vec{f}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+y(1+x)^2\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.

a) Descrever a curva obtida fazendo $y=2$ e $z=1$

$$f(x,2,1)=x\,\vec{i}+2(1+x^2)\vec{j}+\vec{k}$$

$$\begin{cases} x=x \\ y=2(1+x^2) \\ z=1 \end{cases}$$

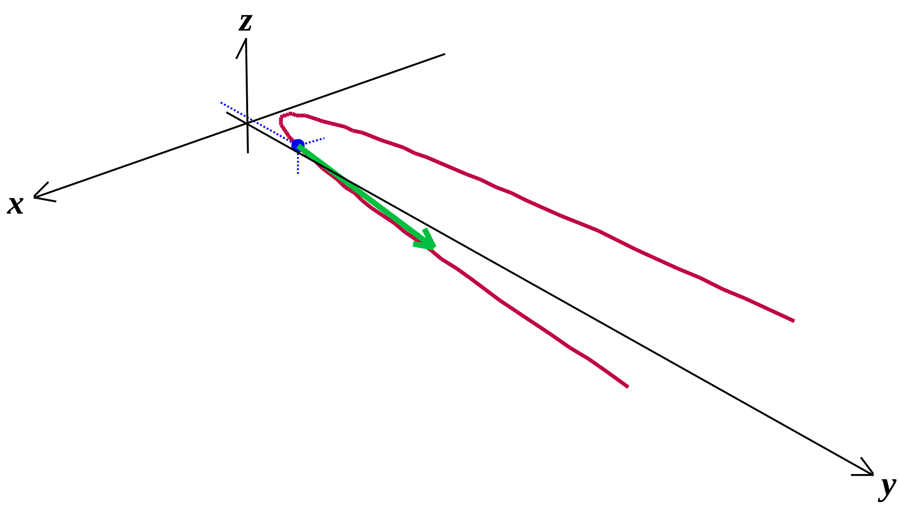
É uma parábola no plano $z=1$.

b) Representar nessa curva a derivada parcial $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P_0(1,4,1)$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=z\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(1,4,1)=\vec{i}+8\vec{j}$$

Veja gráfico que segue:



54. Seja $\vec{f}$ a função vetorial definida por $\vec{f}(u,v)=\left(u\cos v, u\,sen\,v, 3+u^2\right)$ para $0\le u\le 3,\ 0\le v\le 2\pi$.

a) Determinar as curvas obtidas fazendo $u=\sqrt{3}$ e $v=\dfrac{\pi}{2}$, respectivamente.

$$\vec{f}\left(\sqrt{3},v\right)=\left(\sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\,sen\,v, 6\right),\ 0\le v\le 2\pi$$

$$\vec{f}\left(u,\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,u,3+u^2\right),\ 0\le u\le 3$$

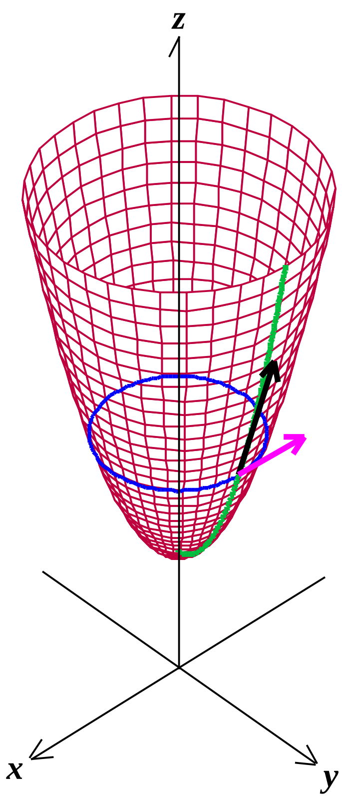
b) Determinar $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ representando-os geometricamente.

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}=\left(\cos v, sen\,v, 2u\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,1,2\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial v}=\left(-u\,sen\,v, u\cos v, 0\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\sqrt{3},0,0\right)$$



55. Dada a função $\vec{f}(x,y) = \left(xyz\,, xy\,, \sqrt{x^2+z^2}\right)$, determinar $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}$ e $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(yz\,,\ y\,,\ \frac{1}{2}\left(x^2+z^2\right)^{-1/2} \cdot 2x \right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \left(0,0,\left(x^2+z^2\right)^{-1/2} + x \cdot \frac{-1}{2}\left(x^2+z^2\right)^{-3/2} \cdot 2x \right) = \left(0,0,\left(x^2+z^2\right)^{-1/2} - x^2\left(x^2+z^2\right)^{-3/2} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = (xz\,, x\,, 0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (z,1,0)$$

56. Determinar $\dfrac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x \partial y \partial z}$ e $\dfrac{\partial^4 \vec{f}}{\partial x \partial z^2 \partial y}$, sendo $\vec{f}(x,y,z) = \left(xy^4\,, xz^3+1, xe^{yz}\right)$.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(0, 3xz^2, xye^{yz}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial z} = \left(0, 0, xyze^{yz} + xe^{yz}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x \partial y \partial z} = \left(0, 0, yze^{yz} + e^{yz}\right) = \left(0, 0, e^{yz}\left(yz + 1\right)\right)$$

$$\frac{\partial^4 \vec{f}}{\partial x \partial z^2 \partial y} = \left(0,0,\left(y^2 z + 2y\right)e^{yz}\right)$$

57. Encontrar $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^2 \partial y}$ e $\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial z^3}$ das seguintes funções:

a) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, \ln y, \ln z)$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = (yz, 0, 0)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(xz, \frac{1}{y}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \left(0, \frac{-1}{y^2}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = (z, 0, 0)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^2 \partial y} = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(xy, 0, \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = \left(0, 0, \frac{-1}{z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial z^3} = \left(0, 0, \frac{2}{z^3}\right)$$

b) $\vec{f}(x, y, z) = \left(e^y \, sen \, x, e^x \, sen \, y, z\right)$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(e^y \cos x, e^x sen\, y, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \left(-e^y sen\, x, e^x sen\, y, 0\right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(e^y sen\, x, e^x \cos y, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \left(e^y sen\, x, -e^x sen\, y, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = \left(e^y \cos x, e^x \cos y, 0\right)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^2 \partial y} = \left(-e^y sen\, x, e^x \cos y, 0\right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = (0,0,1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^3} = (0,0,0)$$

c) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y^2}, xyz\right)$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(\frac{-1}{x^2}, 0, yz\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{x^3}, 0, 0\right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(0, \frac{-2}{y^3}, xz\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \left(0, \frac{6}{y^4}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = (0,0,z)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^2 \partial y} = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = (0,0,xy)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = (0,0,0)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial z^3} = (0,0,0)$$

58. Encontrar $\dfrac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial z^2}$ dados,
$\vec{f}(x,y,z) = \left(x+y+z\,,(x+y+z)^2,(x+y+z)^3\right)$ e $P_0(1,0,1)$.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(1,2(x+y+z),3(x+y+z)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = (0,2,6(x+y+z))$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial x^2} = (0,2,12)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(1,2(x+y+z),3(x+y+z)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = (0,2,6(x+y+z))$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial y^2} = (0,2,12)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial z^2} = (0,2,12)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial y^2} - 4\frac{\partial^2 \vec{f}(P_0)}{\partial z^2} = 2(0,2,12) - 4(0,2,12) = (0,-4,-24).$$

CAPÍTULO 5
5.10 - EXERCÍCIOS
pág. 190 - 192

1. Encontrar, se existirem, os pontos de máximo e de mínimo globais das funções:

a) $z = 4 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$
$$-2x = 0$$
$$-2y = 0$$

$(0,0)$ é um ponto crítico. Este ponto é um ponto de máximo global; não existe um ponto de mínimo global.

b) $z = x^2 + y^2 - 5$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$
$$x = 0$$
$$y = 0$$

$(0,0)$ é um ponto crítico. Este ponto é um ponto de mínimo global; não existe ponto de máximo global

c) $z = x + y + 4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Não existem máximos ou mínimos globais.

d) $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.2y = \frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$$

Em (0,0) as derivadas não existem e como a função é um cone com concavidade voltada para cima, (0,0) é mínimo global. Não existe ponto de máximo global.

e) $z = senx + \cos y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -seny$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ seny = 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2n\pi\right), \quad k, n \in Z$ são pontos de máximo global e

$\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, (2n+1)\pi\right), \quad k, n \in Z$ são pontos de mínimo global.

f) $f(x, y) = x^4 + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

$x = 0$

$y = 0$

$(0,0)$ é um ponto crítico. Este ponto é um ponto de mínimo global; não existe ponto de máximo global.

g) $z = \sqrt{-x^2 + 2x - y^2 + 2y - 1}$

Estamos diante do hemisfério superior de uma esfera, centrada em (1,1,0) e raio igual a 1. Assim,

$(1,1)$ é ponto de máximo global e os pontos sobre a circunferência de centro em $(1,1)$ e raio 1 são pontos de mínimo global.

2. Verificar se o ponto (0,0) é ponto crítico das funções:

a) $z = 2x^2 + 2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x \rightarrow 4.0 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y \rightarrow 4.0 = 0$$
é ponto crítico

b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(4 - x^2 - y^2\right)^{\frac{-1}{2}} . -2x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Temos que para $(x, y) = (0, 0)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ e \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Portanto (0,0) é um ponto crítico.

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{4x^2 + 2y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$

$$(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow f(x, y) = \frac{3x^2}{4x^2 + 2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3(\Delta x)^2}{4(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{4} . \frac{1}{\Delta x}$$
$$= \infty$$

A função dada não é diferenciável em (0,0). Portanto, temos um ponto crítico.

Nos exercícios de 3 a 16 determinar os pontos críticos das funções dadas.

3. $z = x^4 - 2x^2 + y^2 - 9$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Resolvendo o sistema temos:

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$2y = 0 \therefore y = 0$$

$$x(4x^2 - 4) = 0 \therefore x = 0$$
$$4x^2 - 4 = 0$$
$$4x^2 = 4$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Portanto, temos os seguintes pontos críticos: (1,0), (-1,0) e (0,0).

4. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para $(x, y) \neq (0,0)$ as derivadas parciais não são ambas nulas. Portanto, esses pontos não são pontos críticos.

Esta função não é diferenciável em (0,0), portanto (0,0) é um ponto crítico.

5. $z = 2x^4 - 2y^4 - x^2 + y^2 + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3 - 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -8y^3 + 2y$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ -8y^3 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$x(8x^2 - 2) = 0$$

$$y(-8y^2 + 2) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$-8y^2 + 2 = 0$$

$$8y^2 = 2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

e

$$x = 0$$

$$8x^2 - 2 = 0$$

$$8x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Portanto, temos os seguintes pontos críticos:

$$(0,0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

6. $f(x,y) = \cos^2 x + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos x.(-senx)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 2\cos x.senx = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Temos que os pontos críticos são:

$$\left(\frac{n\pi}{2}, 0\right) \quad , \quad n \in Z$$

7. $f(x,y) = \cos x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -senx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Resolvendo a equação temos:

$senx = 0$

$x = k\pi, k \in Z$

Pontos críticos $(k\pi, b); k \in Z; b \in \Re$.

8. $z = 2y^3 - 3x^4 - 6x^2 y + 5$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -12x^3 - 12xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 6x^2$$

Resolvendo o sistema temos

$$\begin{cases} -12x^3 - 12xy = 0 \\ 6y^2 - 6x^2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} -x^3 - xy = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$-x^3 - xy = 0$

$xy = -x^3$

$y = \frac{-x^3}{x}$

$y = -x^2$

$(-x^2)^2 - x^2 = 0$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$

$x = \pm 1$

e $y = -1$.

Pontos críticos: (1,-1), (-1,-1) e (0,0)

9. $z = (x-2)^2 + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 2(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \therefore x = 2 \\ 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Ponto crítico: (2,0)

10. $z = e^{x-y}(y^2 - 2x^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}(-4x) + \left(y^2 - 2x^2\right).e^{x-y}$$
$$= -4xe^{x-y} + \left(y^2 - 2x^2\right)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y}(2y) + \left(y^2 - 2x^2\right)e^{x-y}(-1)$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} e^{x-y}\left(-4x + y^2 - 2x^2\right) = 0 \\ e^{x-y}\left(2y - y^2 + 2x^2\right) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} -4x + y^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 4x \\ 2y - y^2 + 2x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 2y \end{cases}$$

Assim,

$$2y + 2x^2 - 4x - 2x^2 = 0$$
$$2y - 4x = 0$$
$$y - 2x = 0$$
$$y = 2x$$

$$-4x + (2x)^2 - 2x^2 = 0$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Assim, os pontos críticos são: (0,0) e (2,4).

11. $z = xe^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xe^{-x^2-y^2}(-2x) + e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{-x^2-y^2}(-2y)$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\left(-2x^2 + 1\right)e^{-x^2-y^2} = 0$$
$$-2xye^{-x^2-y^2} = 0$$
$$-2x^2 + 1 = 0$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$-2xy = 0$

$y = 0$

Assim, os pontos críticos são: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) e \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

12. $z = y^3 - 3x^2y + 3y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -6xy$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 + 3$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} -6xy = 0 \\ 3y^2 - 3x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $x=0$ ou $y=0$.
Para y=0 temos

$-3x^2 + 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Para $x=0$, temos:

$3y^2 + 3 = 0$

$3y^2 = -3$ Impossível.

Assim, os pontos críticos são: (1,0) e (-1,0).

13. $z = \cos(2x + y)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -sen(2x + y).2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -sen(2x + y)$

Resolvendo o sistema temos:

$sen(2x + y) = 0$

$2x + y = k\pi, k \in Z$

$x = a \quad ; \quad y = k\pi - 2a \quad ; \ a \in \Re.$

Assim, os pontos críticos são:

$(a, k\pi - 2a),\ a \in \Re,\ \ k \in Z.$

14. $z = y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}.2x - 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - \frac{1}{2}.2y$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 4y^3 - y = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $x = 1$ e da segunda equação temos:

$$4y^3 - y = 0$$
$$y(4y^2 - 1) = 0$$
$$y = 0 \quad ou \quad 4y^2 = 1; \quad y = \pm\frac{1}{2}.$$

Portanto, os pontos críticos são: $\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e $(1,0)$.

15. $z = x^2 + y^2 + 8x - 6y + 12$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 8$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 2x + 8 = 0 \Rightarrow 2x = -8 \therefore x = -4 \\ 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \therefore y = 3 \end{cases}$$

Portanto temos o ponto crítico (-4,3).

16. $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{64}{x} + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{-64}{x^2} + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{y^2} + x$$

Resolvendo o sistema vem:

$$\begin{cases} \dfrac{64}{x^2} + y = 0 \\ \dfrac{-1}{y^2} + x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{64 + x^2 y}{x^2} = 0 \\ \dfrac{-1 + xy^2}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos:

$$-1 + xy^2 = 0 \therefore xy^2 = 1 \quad e \quad x = \frac{1}{y^2}$$

Aplicando este resultado na primeira equação temos:

$$64 + \frac{1}{y^4}.y = 0$$

$$64 + \frac{1}{y^3} = 0$$

$$\frac{1}{y^3} = -64 \therefore y^3 = -\frac{1}{64}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{-1}{64}} = -\frac{1}{4}.$$

Dessa forma $x = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{16}} = 16$. Temos, então o ponto crítico $\left(16, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Nos exercícios de 17 a 34 determinar os pontos críticos das funções dadas, classificando-os quando possível.

17. $z = 10 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Igualando as derivadas a zero encontramos o ponto crítico (0,0).
Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de máximo.

18. $z = 2x^2 + y^2 - 5$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Igualando as derivadas a zero encontramos o ponto crítico (0,0).
Temos que:

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de mínimo.

19. $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$$

Igualando as derivadas a zero encontramos o ponto crítico (0,0).
Temos que:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$H(0,0) > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4 < 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de máximo.

20. $z = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 7$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2$$

$$\begin{cases} 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Igualando as derivadas a zero encontramos o ponto crítico (3,1).
Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1) = 2 > 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (3,1) é um ponto de mínimo.

21. $z = y + x.seny$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = seny$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + x.\cos y$$

$$\begin{cases} seny = 0 \\ 1 + x\cos y \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $y = k\pi, k \in Z$. Substituindo esse valor na segunda equação vamos obter:

$$1 + x\cos(k\pi) = 0$$

$$1 + x(\pm 1) = 0$$

$$1 - x = 0 \therefore x = 1$$

$$1 + x = 0 \therefore x = -1$$

Assim temos:

$(1, k\pi), k$ é impar $\in Z$ ou zero

$(-1, k\pi), k$ é par $\in Z$

ou

$(-1, 2k\pi)$; $(1, (2k-1)\pi)$ com $k \in Z$.

Assim, igualando as derivadas a zero encontramos os pontos críticos

$(-1, 2k\pi)$; $(1, (2k-1)\pi)$ com $k \in Z$.

Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x.seny \end{vmatrix} = -\cos^2 y < 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que todos os pontos são pontos de sela.

22. $z = xsen2y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = sen2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x.\cos 2y.2$$

$$\begin{cases} sen2y = 0 \\ 2x\cos 2y = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos

$sen2y = 0 \Rightarrow 2y = k\pi, k \in \mathrm{Z}$ ou $y = \dfrac{k\pi}{2}$

Aplicando na segunda equação vem:

$$2x.\cos 2.\frac{k\pi}{2} = 0$$

$$2x.\cos(k\pi) = 0$$

$$2x(\pm 1) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Temos que $\left(0, \dfrac{k\pi}{2}\right), k \in \mathrm{Z}$ são pontos críticos. Temos:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 2\cos 2y \\ 2\cos 2y & -2xsen2y.2 \end{vmatrix} = -4\cos^2 2y < 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que $\left(0, \dfrac{k\pi}{2}\right)$ são pontos de sela.

23. $z = e^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}.2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}.2y$$

$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y^2} = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \, e \, y = 0$$

Igualando as derivadas a zero encontramos o ponto crítico (0,0).
Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2xe^{x^2+y^2}.2x + e^{x^2+y^2}.2 & 4xye^{x^2+y^2} \\ 2xe^{x^2+y^2}.2y & 2ye^{x^2+y^2}.2y + e^{x^2+y^2}.2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{x^2+y^2}.e^{x^2+y^2}\left(16x^2y^2 + 8x^2 + 8y^2 + 4 - 16x^2y^2\right)$$

$$= \left(e^{x^2+y^2}\right)^2.\left(8x^2 + 8y^2 + 4\right) > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de mínimo.

24. $z = 4xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x$$

Temos o ponto crítico (0,0), que é um ponto de sela pois $H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16 < 0$.

25. $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2 + 2y - 6x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$\begin{cases} 24x^2 + 2y - 6x = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos:

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Aplicando o resultado obtido na primeira equação vem:

$$24x^2 + 2(-x) - 6x = 0$$

$$24x^2 - 8x = 0$$

$$8x(3x - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Temos que $(0,0) e \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ são pontos críticos

Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 48x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 96x - 12 - 4 \ = 96x - 16$$

$$H(0,0) = -16 < 0$$

$$H\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=96.\frac{1}{3}-16>0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=48.\frac{1}{3}-6>0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de sela e $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ é um ponto de mínimo.

26. $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-12$$

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-15=0\\6xy-12=0\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\xy-2=0\end{cases}$$

Da segunda equação temos que $xy=2 \quad ou \quad y=\frac{2}{x}.$ Aplicando o resultado obtido na primeira equação vem:

$$x^2+\frac{4}{x^2}-5=0$$

$$x^4+4-5x^2=0$$

$$x^4-5x^2+4=0$$

$$x^2=4 \quad e \quad x^2=1$$

$$x=\pm 2 \quad e \quad x=\pm 1$$

Assim temos os pontos críticos: (1,2); (-1,-2); (2,1) e (-2,-1).
Temos que:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}6x & 6y\\6y & 6x\end{vmatrix}=36x^2-36y^2$$

$$H(1,2)=36-36.4<0$$

$$H(-1,-2)=36-36.4<0$$

$H(2,1) = 36.4 - 36 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 > 0$

$H(-2,-1) = 36.4 - 36.1 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = 6.(-2) < 0$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (1,2) e (-1,-2) são pontos de sela; (2,1) é um ponto de mínimo e (-2,-1 é um ponto de máximo.

27. $z = 4x^2 + 3xy + y^2 + 12x + 2y + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 3y + 12$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y + 2$$

$$\begin{cases} 8x + 3y + 12 = 0 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos:

$$2y = -2 - 3x$$

$$y = \frac{-2 - 3x}{2}$$

Aplicando este resultado na primeira equação vem:

$$8x + 3.\frac{-2 - 3x}{2} + 12 = 0$$

$$16x + 3(-2 - 3x) + 24 = 0$$

$$16x - 6 - 9x + 24 = 0$$

$$7x + 18 = 0$$

$$x = -\frac{18}{7}.$$

Assim,

$$y = \frac{-2 - 3.\frac{-18}{7}}{2} = \frac{1}{2}\left(-2 + \frac{54}{7}\right) = \frac{20}{7}.$$

Temos o ponto crítico $\left(-\frac{18}{7}, \frac{20}{7}\right)$.

Temos que:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}8 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=16-9>0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{18}{7},\frac{20}{7}\right)=8>0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que $\left(-\frac{18}{7},\frac{20}{7}\right)$ é um ponto de mínimo.

28. $z=x^4+\frac{1}{4}y^5+x+\frac{1}{3}y^3+15$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4}.5y^4+\frac{1}{3}.3y^2$$

$$\begin{cases}4x^3+1=0\\ \frac{5}{4}y^4+y^2=0\end{cases}$$

Da primeira equação temos, $4x^3=-1 \quad ou \quad x=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Da segunda equação temos:

$y^2\left(\frac{5}{4}y^2+1\right)=0,\ y=0.$

Assim, temos o ponto crítico $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}},0\right)$.

Temos que:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}12x^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}.20y^3+2y\end{vmatrix}=12x^2\left(5y^3+2y\right)$$

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}},0\right)=0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que nada se pode afirmar a respeito do ponto $\left(-\frac{18}{7},\frac{20}{7}\right)$.

29. $z=x^2+y^2-2x-8y+7$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 8$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \quad ou \quad x = 1\ . \\ 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = 8 \quad ou \quad y = 4. \end{cases}$$

Dessa forma temos o ponto (1,4) para analisar.
Temos que:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1{,}4) = 2 > 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (1,4) é um ponto de mínimo.

30. $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 4x^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 4y$$

$$\begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos:

$$x - y = 0$$
$$x = y$$

Usando o resultado obtido na primeira equação vem:

$$4x - 4x^3 = 0$$
$$4x^3 - 4x = 0$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Temos assim os pontos: (0,0), (1,1), (-1,-1).
Temos que:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}-12x^2 & 4\\ 4 & -4\end{vmatrix}=48x^2-16$$

$H(0,0)=-16<0$

$H(1,1)=48-16>0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-12<0$

$H(-1,-1)=48-16>0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-12<0$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (0,0) é um ponto de sela; (1,1) é um ponto de máximo e (-1,-1) é um ponto de máximo.

31. $z=\dfrac{x}{x^2+y^2+4}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2+4)1-x(2x)}{(x^2+y^2+4)^2}=\frac{x^2+y^2+4-2x^2}{(x^2+y^2+4)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2+4).0-x.2y}{(x^2+y^2+4)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+4)^2}$$

$$\begin{cases}-x^2+y^2+4=0\\ -2xy=0\end{cases}$$

Da segunda equação obtemos: $x=0 \quad ou \quad y=0.$ Aplicando este resultado na primeira equação vem:

$x=0 \Rightarrow y^2+4=0$

$y^2=-4 \ não\ \exists$

$y=0 \Rightarrow -x^2+4=0$

$x^2-4=0$

$x^2=4 \therefore x=\pm 2.$

Temos os pontos (2,0) e (-2,0) para analisar.

Para a análise vamos precisar das derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x^2+y^2+4}{\left(x^2+y^2+4\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.(-2x)-\left(-x^2+y^2+4\right).2\left(x^2+y^2+4\right).2x}{\left(x^2+y^2+4\right)^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.2y-\left(-x^2+y^2+4\right).2\left(x^2+y^2+4\right).2y}{\left(x^2+y^2+4\right)^4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2+4\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.(-2x)-(-2xy).2\left(x^2+y^2+4\right).2y}{\left(x^2+y^2+4\right)^4}$$

Assim,

$H(x,y)=$

$$\begin{vmatrix} \frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.(-2x)-\left(-x^2+y^2+4\right).2\left(x^2+y^2+4\right).2x}{\left(x^2+y^2+4\right)^4} & \frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.2y-\left(-x^2+y^2+4\right).2\left(x^2+y^2+4\right).2y}{\left(x^2+y^2+4\right)^4} \\ \frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.2y-\left(-x^2+y^2+4\right).2\left(x^2+y^2+4\right).2y}{\left(x^2+y^2+4\right)^4} & \frac{\left(x^2+y^2+4\right)^2.(-2x)-(-2xy).2\left(x^2+y^2+4\right).2y}{\left(x^2+y^2+4\right)^4} \end{vmatrix}$$

Temos que:

$$H(2,0)=\begin{vmatrix} \frac{-1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{16} \end{vmatrix}>0$$

$$H(2,0)>0 \;\; e \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$$

$$H(-2,0)=\begin{vmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{vmatrix}>0$$

$$H(-2,0) \;\; e \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,0)>0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (2,0) é ponto de máximo e (-2,0) é ponto de mínimo.

32. $z = y\cos x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -ysenx$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x$$

$$\begin{cases} -ysenx = 0 \Rightarrow y = 0 \; ou \quad senx = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in Z \end{cases}$$

Assim, temos os pontos: $\left((2n+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ com $n \in Z$.

Temos que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -y\cos x & -senx \\ -senx & 0 \end{vmatrix} = -sen^2 x$$

$$H\left((2n+1)\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1 < 0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que os pontos $\left((2n+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ com $n \in Z$, são pontos de sela

33. $z = \frac{1}{3}y^3 + 4xy - 9y - x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}3y^2 + 4x - 9$$

$$\begin{cases} 4y - 2x = 0 \\ y^2 + 4x - 9 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que

$$4y = 2x$$

$$y = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}.$$

Substituindo este valor encontrado na segunda equação temos:

$$\frac{x^2}{4}+4x-9=0$$

$$x^2+16x-36=0$$

$$x=2 \quad x=-18$$

Dessa forma temos os pontos críticos: (2,1)   (-18,-9)
Temos que:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & 2y\end{vmatrix}=-4y-16$$

$$H(2,1)=-4-16=-20<0$$

$$H(-18,-9)=-4.(-9)-16=36-16=20>0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-18,-9)=-2<0$$

Dessa forma usando a Proposição 5.6.1 temos que (2,1) é ponto de sela e (-18,-9) é um ponto de máximo.

34. $z=\dfrac{y}{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+y).0-y.1}{(x+y)^2}=\frac{-y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+y).1-y.1}{(x+y)^2}=\frac{x+y-y}{(x+y)^2}=\frac{x}{(x+y)^2}$$

Não existem pontos críticos no domínio da função.

Nos exercícios de 35 a 43 determinar os valores máximo e mínimo da função dada, na região indicada.

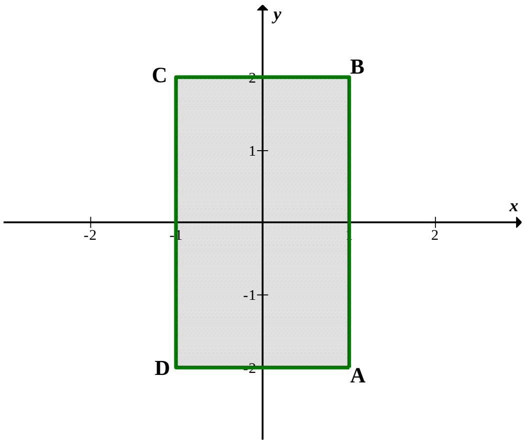
Vamos aplicar o Teorema de Weierstrass (seção 5.7) nos exercícios de 35 a 43.

35. $f(x,y)=x+2y$ no retângulo de vértice (1,-2), (1,2), (-1,2), (-1,-2).

Neste caso não temos pontos críticos no interior do retângulo dado (ver Figura que segue), pois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2$$



Dessa forma vamos analisar a fronteira.

$AB \to x = 1$

$f(1, y) = 1 + 2y \quad , \ -2 \leq y \leq 2$

Não tem pontos críticos.

$f(1, -2) = 1 + 2(-2) = 1 - 4 = -3(\min)$

$f(1, 2) = 1 + 2.2 = 5(máx)$

$BC \to y = 2 \ ; \quad -1 \leq x \leq 1$

$f(x, 2) = x + 4$

Não tem pontos críticos.

$f(-1, 2) = -1 + 4 = 3(\min)$

$f(1, 2) = 1 + 4 = 5(máx)$

$CD \to x = -1$

$f(-1, y) = -1 + 2y \ ; \ -2 \leq y \leq 2$

Não tem pontos críticos.

$f(-1, -2) = -1 + 2(-2) = -5(\min)$

$f(-1, 2) = -1 + 2.2 = 3(máx)$

$DA \to y = -2$

$f(x, -2) = x + 2(-2) = x - 4$

Não tem pontos críticos.

$f(1, -2) = 1 - 4 = -3(máx)$

$f(1, 2) = -1 - 4 = -5$

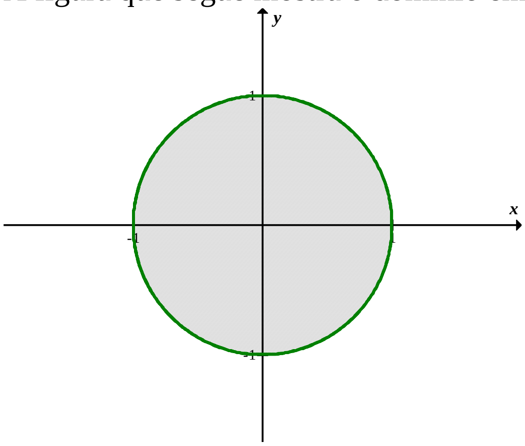
Dessa forma temos que:

- (-1,-2) é ponto de mínimo e o valor mínimo é -5;

- (1,2)é ponto de máximo e o valor máximo é igual a 5.

36. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ no círculo $x^2+y^2\leq 1$

A figura que segue mostra o domínio em análise.



$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}.2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}.2y$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos o ponto (0,0) no interior do domínio.

$f(0,0)=1$.

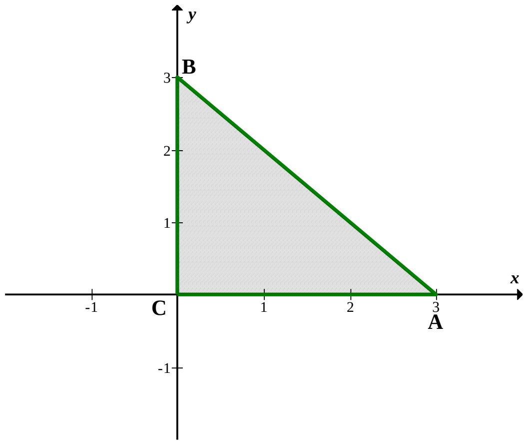
Para a fronteira temos todos os pontos tais que $x^2+y^2=1$. Para esses pontos vamos sempre obter a imagem da função igual a $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Dessa forma:

- (0,0) é ponto de mínimo da função e o valor mínimo é igual 1;
- Todos os pontos da fronteira, pares *(x,y)* tais $x^2+y^2=1$ são pontos de máximo e o valor máximo é igual a $\sqrt{2}$.

37. $z=x^2+y^2-2x-2y$ no triângulo de vértices (0,0), (3,0), (0,3).

A Figura que segue mostra o domínio em análise.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \therefore x = 1 \\ 2y - 2 = 0 \therefore y = 1 \end{cases}$$

No interior temos o ponto (1,1)

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$$

Pela proposição 5.6.1 temos que (1,1) é um ponto de mínimo.
Vamos agora analisar a fronteira do domínio.

$$AB \rightarrow x + y = 3 \therefore y = 3 - x; 0 \le x \le 3$$

$$\begin{aligned} z &= x^2 + (3 - x)^2 - 2x - 2(3 - x) \\ &= x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x - 6 + 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' = 4x - 6 \therefore 4x - 6 &= 0 \\ 4x &= 6 \\ x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Temos assim o ponto (3/2,3/2) para ser analisado, sendo que em *x=3/2* vamos ter um ponto de mínimo.

$$BC \rightarrow x = 0; 0 \le y \le 3$$

$$z = y^2 - 2y$$

$$z' = 2y - 2 \therefore y = 1$$

Temos assim, o ponto (0,1) para ser analisado, sendo que vamos ter um ponto de mínimo.

$CA \to y = 0; 0 \leq x \leq 3$

$z = x^2 - 2x$

$z' = 2x - 2; x = 1$

Temos o ponto (1,0) para ser analisado sendo que em *x=1* temos um ponto de mínimo.

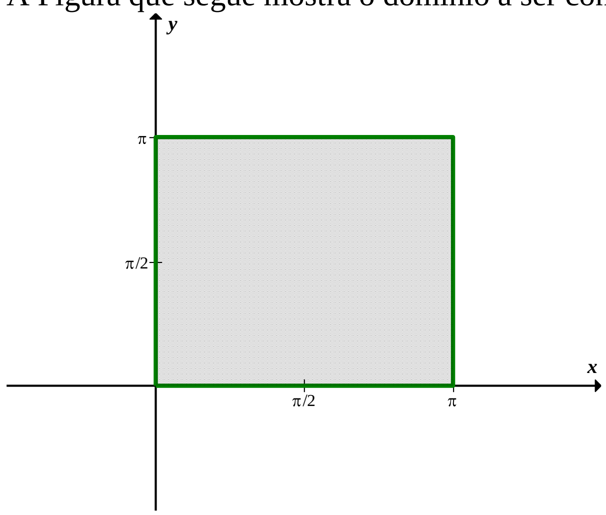
O quadro que segue ajudará na definição dos valores máximo e mínimo.

PONTOS	LOCALIZAÇÃO	IMAGEM DO PONTO
(1, 1)	Interior do triângulo	-2 (mínimo)
(0,3)	Fronteira	3 (máximo)
(3,0)	Fronteira	3 (máximo)
(3/2,3/2)	Fronteira	-3/2 (mínimo)
(0,1)	Fronteira	-1 (mínimo)
(0,0)	Fronteira	0 (mínimo)
(3,0)	Fronteira	3 (máximo)

Portanto o valor mínimo da função do domínio dado é igual a -2 e o valor máximo é igual a 3.

38. $z = senx + seny + sen(x + y) \quad 0 \leq x \leq \pi \; e \; 0 \leq y \leq \pi$.

A Figura que segue mostra o domínio a ser considerado.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x + y)$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as equações termo a termo temos

$\cos x - \cos y = 0$

$\cos x = \cos y \therefore x = y,$ já que $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$

Substituindo este valor na primeira equação vamos ter:

$\cos x + \cos 2x = 0$

$\left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos x = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$\cos x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

e

$\cos x = -1.$

Considerando-se que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, e aplicando os valores encontrados, podemos escrever que:

$sen^2 x = 1 - 1 = 0$

$sen^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$senx = 0 \ e \ senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen2x = 2senx \cos x$

$sen2x = 2.0 = 0$

$sen2x = 2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, temos:

$z = 0$

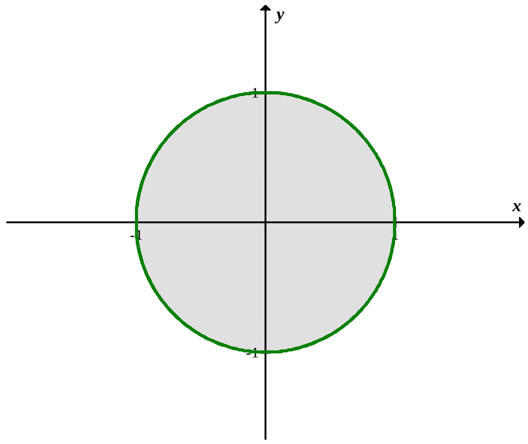
$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

O valor mínimo é zero e o valor máximo é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Observação. Para a fronteira deve-se proceder como no exercício anterior.

39. $z = xy$; no círculo $x^2 + y^2 \le 1$.

A figura que segue mostra o domínio em análise.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x = 0$$

Temos assim o ponto $(0,0)$ para analisar.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Assim, o ponto (0,0) é um ponto de sela.

Para $x^2 + y^2 = 1$ temos:

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$z = \sqrt{1 - y^2}.y$$

$$z' = \sqrt{1-y^2} + y.\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)^{\frac{-1}{2}}.\left(-2y\right)$$

$$\sqrt{1-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

$$1-y^2-y^2=0$$

$$1-2y^2=0$$

$$2y^2=1$$

$$y^2=\frac{1}{2} \therefore y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x=\sqrt{1-y^2}$$

$$x=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Resumindo temos:

$f(0,0)=0$ - ponto de sela

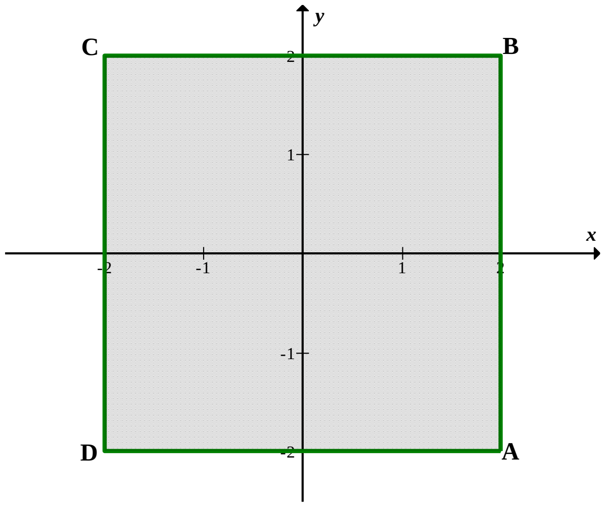
$$\left.\begin{array}{l} f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2} \\ f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{valores máximo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2} \\ f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{valores mínimo.}$$

Portanto, o valor máximo é $\frac{1}{2}$ e o valor mínimo é $-\frac{1}{2}$.

40. $z = xy \quad -2 \le x \le 2 \; e \; -2 \le y \le 2$

A figura que segue mostra o domínio em análise.



No interior já foi analisado no exercício anterior.

$AB \to x = 2$

$z = 2y$

$z' = 2$

$f(2,-2) = -4 \to$ valor mínimo

$f(2,2) = 4 \to$ valor máximo

Similarmente:

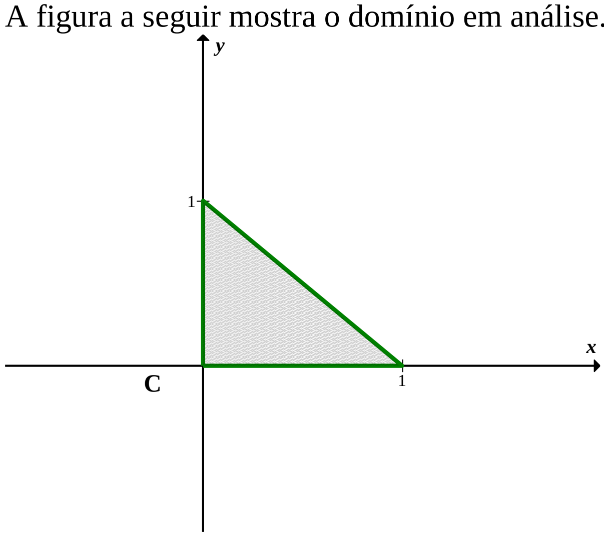
$f(-2,2) = -4 \to$ valor mínimo

$f(-2,-2) = 4 \to$ valor máximo

Portanto, o valor máximo é 4 e o valor mínimo é -4.

41. $f(x,y) = 2 + x + 3y \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + y \leq 1$

A figura a seguir mostra o domínio em análise.



A função não tem pontos críticos no interior do domínio. Na fronteira, também não há pontos críticos. Por exemplo, no segmento que une os pontos (1,0) e (0,1), temos:

$$x + y = 1$$

$$x = 1 - y$$

$$z = 2 + 1 - y + 3y$$

$$z = 3 + 2y$$

$$z' = 2$$

Basta, então, verificar o valor de *f* nos pontos (0,0), (1,0) e (0,1). Temos:

$$f(0,0) = 2 \rightarrow mínimo$$

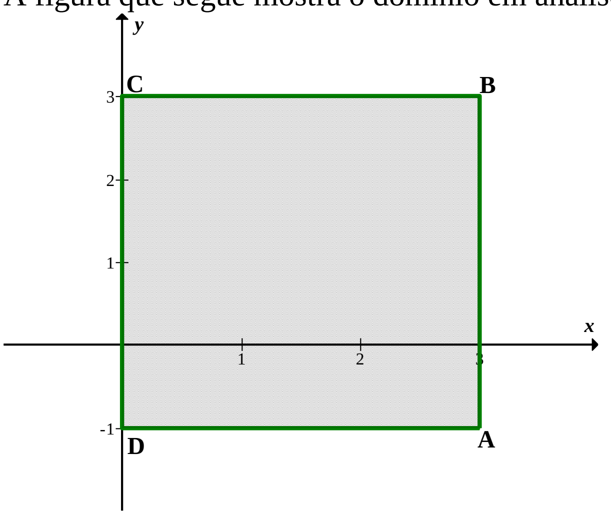
$$f(1,0) = 2 + 1$$

$$f(0,1) = 2 + 3 = 5 \rightarrow máximo$$

Portanto, o valor mínimo é 2 e o valor máximo é 5.

42. $z = x^3 + y^3 - 3xy \quad 0 \leq x \leq 3 \quad -1 \leq y \leq 3$

A figura que segue mostra o domínio em análise.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - y = 0$$

$$y^2 - x = 0 \therefore x = y^2$$

$$y^4 - y = 0$$

$$y\left(y^3 - 1\right) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y^3 = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Pontos para análise (1,1) e (0,0).
Analisando a fronteira temos:

$x = 3, -1 \le y \le 3$

$z = 27 + y^3 - 9y$

$z' = 3y^2 - 9$

$3y^2 - 9 = 0$

$3y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}$

Pontos para análise: $\left(3, \sqrt{3}\right)$.

$y = 3, 0 \le x \le 3$

$z = x^3 + 27 - 9x$

$x = \pm\sqrt{3}$

Pontos para análise: $\left(\sqrt{3}, 3\right)$.

$x = 0, -1 \le y \le 3$

$z = y^3$

$z' = 3y^2 \Rightarrow y = 0$

Pontos para análise: $(0, 0)$

$y = -1, 0 \le x \le 3$

$z = x^3 - 1 + (3x)$

$z' = 3x^2 + 3$

$3x^2 = -3$

$x^2 = -1 \;\; não\, \exists\, valores$

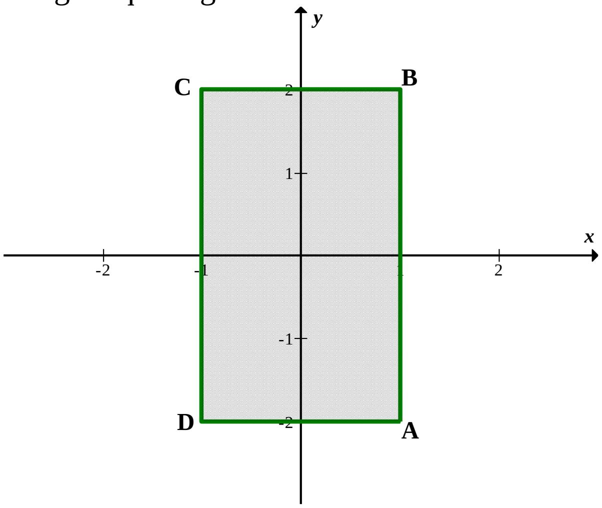
Vamos fazer o quadro resumo:

PONTOS	LOCALIZAÇÃO	IMAGEM DO PONTO
(0,0)	Fronteira	0
(1,1)	Interior	-1
$\left(3, \sqrt{3}\right)$	Fronteira	$27 - 6\sqrt{3}$
$\left(\sqrt{3}, 3\right)$	Fronteira	$27 - 6\sqrt{3}$
(0,-1)	Fronteira	-1
(0,3)	Fronteira	27
(3,-1)	Fronteira	35
(3,3)	Fronteira	27

Portanto o valor mínimo da função do domínio dado é igual a -1 e o valor máximo é igual a 27.

43. $z = y^3 - x^3 - 3xy \quad -1 \leq x \leq 1 \quad -2 \leq y \leq 2$

A figura que segue mostra o domínio em análise:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

Resolvendo o sistema temos

$$\begin{cases} -x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos $y = -x^2$. Substituindo este resultado na segunda equação obtemos:

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 = 1 \therefore x = 1$$

Temos assim os pontos $(0,0)$ e $(1,-1)$ para analisar.

Analisando a fronteira vem:

$$x = 1, -2 \leq y \leq 2$$

$$z = y^3 - 1 - 3y$$

$$z' = 3y^2 - 3$$

$$3y^2 = 3$$

$$y = \pm 1$$

Assim, temos os pontos (1,1) e (1,-1).

$y = 2, -1 \leq x \leq 1$

$z = 8 - x^3 - 6x$

$z' = -3x^2 - 6$

$3x^2 + 6 = 0$

$3x^2 = -6$

Neste caso não temos pontos para analisar.

$x = -1, -2 \leq y \leq 2$

$z = y^3 + 1 + 3y$

$z' = 3y^2 + 3$

$3y^2 = -3$

Não existem pontos para analisar.

$y = -2, -1 \leq x \leq 1$

$z = -8 - x^3 + 6x$

$-3x^2 + 6 = 0$

$3x^2 = 6$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Os pontos $\left(\sqrt{2}, -2\right)$ $\left(-\sqrt{2}, -2\right)$ não pertencem a região analisada.

Estabelecendo o quadro resumo vem:

PONTOS	LOCALIZAÇÃO	IMAGEM DO PONTO
(0,0)	Interior	0
(1,-1)	Fronteira	1
(1,1)	Fronteira	-3
(1,2)	Fronteira	1
(-1,2)	Fronteira	15
(-1,-2)	Fronteira	-13
(1,-2)	Fronteira	-3

Dessa forma temos que o valor máximo é 15 e o valor mínimo é -13.

44. Dada a função $z = ax^2 + by^2 + c$, analisar os pontos críticos, considerando que:

a) $a > 0$ e $b > 0$

b) $a < 0$ e $b < 0$

c) a e b têm sinais diferentes.

a) Temos um parabolóide virado para cima, com vértice em *(0,0,c)*. Portanto, $(0,0)$ é ponto de mínimo;

b) Temos um parabolóide virado para baixo, com vértice em *(0,0,c)*. Portanto, $(0,0)$ é ponto de máximo;

d) Neste caso temos que $(0,0)$ é ponto de sela.

45. Um disco tem a forma do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Supondo que a temperatura nos pontos do disco é dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$, determinar os pontos mais quentes e mais frios do disco.

$T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1$

$\dfrac{\partial T}{\partial y} = 4y$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

obtemos o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ na região interior do disco.

Analisando a fronteira temos:

$T(x, y) = x^2 - x + 2(1 - x^2) = -x^2 - x + 2$

$T' = -2x - 1$

$-2x - 1 = 0$

$x = -1/2$

$y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Assim temos os pontos $\left(\dfrac{-1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Verificando as imagens dos pontos dados temos:

$T(1/2, 0) = -1/4$

$T\left(\dfrac{-1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9/4.$

Os pontos mais quentes do disco são $\left(\frac{-1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e o ponto mais frio é $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

46. A distribuição de temperatura na chapa circular $x^2 + y^2 \le 1$ é $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10.$ Achar as temperaturas máxima e mínima da chapa.

Temos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2y + 5$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

obtemos o ponto (1,-5/2), que está fora do domínio.

Na fronteira, usando $y = \sqrt{1 - x^2}$, temos

$$T = x^2 + y^2 - 2x + 5\sqrt{1 - x^2} - 10$$
$$= -9 - 2x + 5\sqrt{1 - x^2}$$

e

$$T' = -2 - \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Fazendo $-2 - \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$, obtemos o ponto $\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Observe que $x = \frac{2}{\sqrt{29}}$ não satisfaz a equação $T' = 0$.

Ainda, na fronteira, usando $y = -\sqrt{1 - x^2}$, temos

$$T = x^2 + y^2 - 2x - 5\sqrt{1 - x^2} - 10$$
$$= -9 - 2x - 5\sqrt{1 - x^2}$$

$$T' = -2 + \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Fazendo $T' = 0$, obtemos o ponto $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Analisando as imagens dos pontos vem:

$$T\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=-9+\sqrt{29}$$

$$T\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=-9-\sqrt{29.}$$

Portanto, a temperatura máxima da chapa é $-9+\sqrt{29}$ e a temperatura mínima é $-9-\sqrt{29}$.

47. Achar as dimensões de uma caixa com base retangular, sem tampa, de volume máximo, com área lateral igual a 5 cm^2.

O problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \max \quad abc \\ s.a.\ ab+2bc+2ac=5. \end{cases}$$

Usando a função lagrangeana temos:

$$L=abc-\alpha(ab+2bc+2ac-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a}=bc-\alpha b-2c\alpha=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=ac-\alpha a-2c\alpha=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c}=ab-2\alpha b-2a\alpha=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=-\alpha b-2bc-2ac+5=0$$

Resolvendo o sistema vamos obter as dimensões da caixa iguais a $\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

48. Entre todos os triângulos de perímetro igual a 10 cm, achar o que tem maior área.

Supondo o triângulo de lados *a*,*b* e *c*, a situação dada pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \max \quad s(s-a)(s-b)(s-c) \\ s.a. \quad a+b+c=10 \end{cases}$$

sendo que s é o semiperímetro.

A função lagrangeana fica:

$$L = 5(5-a)(5-b)(5-c) + \alpha(a+b+c-10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -5(5-b)(5-c) + \alpha = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -5(5-a)(5-c) + \alpha = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = -5(5-a)(5-b) + \alpha = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = a+b+c-10 = 0$$

Resolvendo vamos obter todos os valores das dimensões iguais a $\frac{10}{3}$ cm. Dessa forma estamos diante de um triângulo equilátero.

49. Achar o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais próximo do ponto $(3,3,3)$.

A situação dada pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min & \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2} \\ s.a. & x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

A função lagrangeana fica:

$$L = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2} + \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}((x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2)^{-1/2} 2(x-3) + 2\alpha x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}((x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2)^{-1/2} 2(y-3) + 2\alpha y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2}((x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2)^{-1/2} 2(z-3) + 2\alpha z = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

Resolvendo o sistema vamos obter o ponto $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

50**.** Em uma empresa que produz dois diferentes produtos, temos as funções de demanda

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$$
$$Q_2 = 35 - P_1 - P_2$$

onde Q_i, $i = 1, 2$, representa o nível de produção do i-ésimo produto por unidade de tempo e P_i, $i = 1, 2$, os respectivos preços. A função custo é dada por

$$C = Q_1^2 + Q_2^2 + 10$$

e a função receita é dada por

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2.$$

a) Sabendo-se que

lucro = receita – custo

encontrar a função lucro.

A função Lucro é dada por $L = P_1Q_1 + P_2Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 - 10$.

b) Achar os níveis de produção que maximizam o lucro.

Temos:

$$\begin{aligned} L &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 - 10 \\ &= P_1(40 - 2P_1 - P_2) + P_2(35 - P_1 - P_2) - (40 - 2P_1 - P_2)^2 - (35 - P_1 - P_2)^2 - 10 \\ &= -7P_1^2 - 8P_1P_2 + 270P_1 - 3P_2^2 + 185P_2 - 2835 \end{aligned}$$

Derivando vem:

$$\frac{\partial L}{\partial P_1} = -14P_1 - 8P_2 + 270$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_2} = -8P_1 - 6P_2 + 185$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema obtemos $(P_1, P_2) = \left(7, \frac{43}{2}\right)$ que é um ponto de máximo.

Assim, os níveis de produção que maximizam o lucro são:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2 = \frac{9}{2}$$

$$Q_2 = 35 - P_1 - P_2 = \frac{13}{2}.$$

c) Qual é o lucro máximo?

Quando aplicamos esses valores na função lucro vamos obter o lucro máximo que é igual a $98{,}75$.

51. Determinar o ponto $P(x, y, z)$ do plano $x + 3y + 2z = 6,$ cuja distância à origem seja mínima.

A situação dada pode ser modelada por:

$$\begin{aligned} &\min \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &s.a. \quad x + 3y + 2z = 6 \end{aligned}$$

Usando a função lagrangeana vem:

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \alpha(x + 3y + 2z - 6).$$

Derivando vamos ter

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2x - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2y - 3\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2z - 2\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -(x + 3y + 2z - 6)$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos obter o ponto $\left(\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

52. Determinar três números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

Podemos modelar essa situação como:

$$\begin{cases} \min \quad x + y + z \\ s.a. \quad xyz = 100 \end{cases}$$

A função lagrangeana fica

$$L = x + y + z - \alpha(xyz - 100)$$

Derivando vem:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \alpha yz$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \alpha xz$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \alpha xy$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -(xyz - 100)$$

Igualando a zero e resolvendo o sistema vamos obter os valores

$x = \sqrt[3]{100}, y = \sqrt[3]{100}, z = \sqrt[3]{100}$.

53. Uma firma de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 64 cm^3 de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo.

Supondo a caixa com dimensões da base igual a e b e altura c. Supondo também que o custo da tampa e fundo é igual a x, vamos ter que a situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min \quad x2ab + \dfrac{x}{2}(2ac + 2bc) \\ s.a \quad abc = 64 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \min \quad 2abx + acx + bcx \\ s.a \quad abc = 64 \end{cases}$$

A função lagrangeana é dada por:

$$L = 2abx + acx + bcx - \alpha(abc - 64)$$

Calculando as derivadas, vem:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 2bx + cx - \alpha(bc)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2ax + cx - \alpha(ac)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = ax + bx - \alpha(ab)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2ab + ac + (bc)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 64 - abc$$

Igualando a zero e resolvendo o sistema obtemos as dimensões da caixa como:

$a = \sqrt[3]{32}, b = \sqrt[3]{32}, c = 2\sqrt[3]{32}$.

54. Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados:

a) $(1, 2)$; $(0, 0)$ e $(2, 3)$.

Para estruturar o sistema de equação que nos dá a solução vamos calcular:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 + 0 + 2 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 1.2 + 0.0 + 2.3 = 8$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = 2 + 0 + 3 = 5.$$

Temos, então, o sistema

$$\begin{cases} 5a + 3b = 8 \\ 3a + 3b = 5. \end{cases}$$

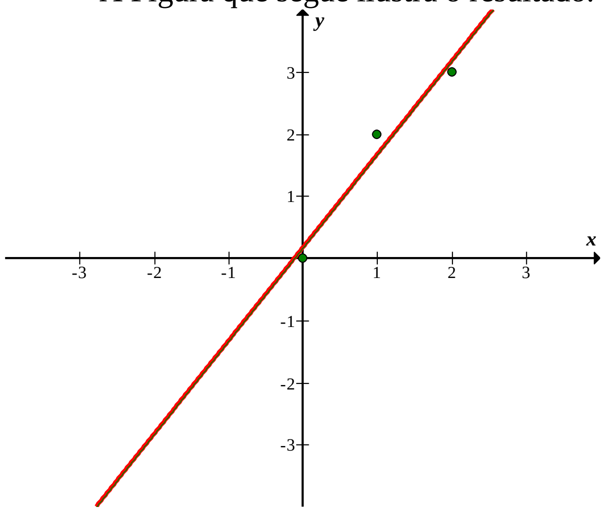
Resolvendo esse sistema, obtemos

$$a = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{1}{6}.$$

Assim, a reta que melhor aproxima o conjunto de pontos dados é a reta

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}.$$

A Figura que segue ilustra o resultado.



b) $(0,1)$; $(1,2)$; $(2,3)$ e $(2,4)$.

Para estruturar o sistema de equação que nos dá a solução vamos calcular:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 + 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0.1 + 1.2 + 2.3 + 2.4 = 16$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Temos, então, o sistema

$$\begin{cases} 9a + 5b = 16 \\ 5a + 4b = 10. \end{cases}$$

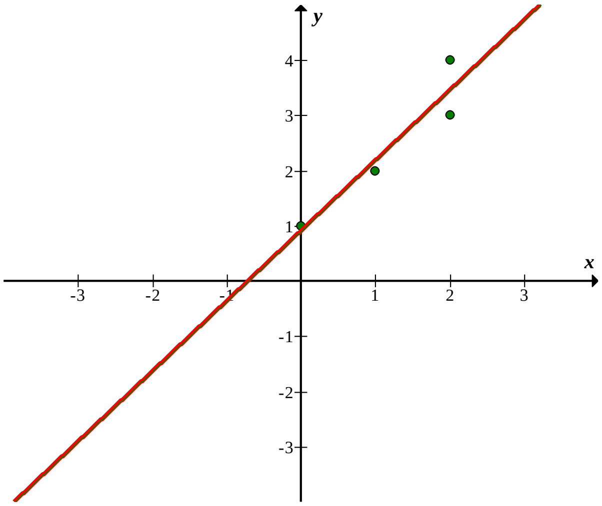
Resolvendo esse sistema, obtemos

$$a = \frac{14}{11} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{10}{11}.$$

Assim, a reta que melhor aproxima o conjunto de pontos dados é a reta

$$y = \frac{14}{11}x + \frac{10}{11}.$$

A Figura ilustra esse exemplo.



55. Determinar as dimensões do paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no tetraedro formado pelos planos coordenados e pelo plano $x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=1.$

A situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \max & xyz \\ s.a. & x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=1. \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = xyz - \alpha(x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz - \alpha/3$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy - \alpha/2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - x - y/3 - z/2$$

Resolvendo o sistema vamos encontrar $\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}$ para as dimensões do paralelepípedo.

56. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar 270 m^3 de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura,

determinar as dimensões do tanque.

A situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min \quad 2ab + 2ac + 2bc \\ s.a. \quad abc = 270 \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = 2ab + 2ac + 2bc - \alpha(abc - 270)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 2b + 2c - \alpha bc$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2a + 2c - \alpha ac$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = 2a + 2b - \alpha ab$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 270 - abc$$

Resolvendo o sistema vamos encontrar $3\sqrt[3]{10}\,, 3\sqrt[3]{10}\,, 3\sqrt[3]{10}$ para as dimensões do paralelepípedo.

Nos exercícios 57 a 61, determinar os pontos de máximo e/ou mínimo da função dada, sujeita às restrições indicadas:

57. $z = 4 - 2x - 3y$; $x^2 + y^2 = 1$

Vamos definir a função lagrangeana

$$L = 4 - 2x - 3y - \alpha(x^2 + y^2 - 1).$$

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2 - 2\alpha x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -3 - 2\alpha y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - x^2 - y^2$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar dois pontos: $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ que é ponto de mínimo e $\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$ que é ponto de máximo.

Observe que o método de Lagrange não permite classificar os pontos. Isso foi feito através de uma visualização geométrica.

58. $z = 2x + y$; $x^2 + y^2 = 4$

Vamos definir a função lagrangeana

$L = 2x + y - \alpha(x^2 + y^2 - 4)$.

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 - 2\alpha x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\alpha y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 4 - x^2 - y^2$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar dois pontos: $\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ que é ponto de mínimo e $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ que é ponto de máximo.

Veja observação no final do exercício anterior.

59. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 1$

Vamos definir a função lagrangeana

$L = x^2 + y^2 - \alpha(x + y - 1)$.

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - x - y$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar um único ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Observando que estamos diante de um parabolóide virado para cima, temos que este ponto é um ponto de mínimo.

60. $z = xy$; $2x^2 + y^2 = 16$

Vamos definir a função lagrangeana

$L = xy - \alpha(2x^2 + y^2 - 16)$.

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 4\alpha x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\alpha y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 16 - x^2 - y^2$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar quatro pontos para serem analisados. Basta lembrar-se da geometria do gráfico da função (função com um ponto de sela), e conferindo as imagens dos pontos podemos dizer que $\left(2,2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2,-2\sqrt{2}\right)$ são pontos de máximo e $\left(2,-2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2,2\sqrt{2}\right)$ são pontos de mínimo.

61. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 9$

Vamos definir a função lagrangeana

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \alpha(x + y + z - 9).$$

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 9 - x - y - z$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar um único ponto: $(3,3,3)$. Analisando geometricamente o problema concluímos que o mesmo é ponto de mínimo.

62. Determinar o ponto do plano $3x + 2y + 4z = 12$ para o qual a função

$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2$$

tenha um valor mínimo.

A situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min \quad x^2 + 4y^2 + 5z^2 \\ s.a. \quad 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = x^2 + 4y^2 + 5z^2 - \alpha(3x + 2y + 4z - 12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 3\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8y - 2\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 10z - 4\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -(3x + 2y + 4z - 12)$$

Igualando a zero e resolvendo o sistema obtemos o ponto $\left(\frac{30}{11}, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}\right)$, que é um ponto de mínimo.

63. A reta t é dada pela interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $2x + 3y + z = 6$. Determinar o ponto de t cuja distância até a origem seja mínima.

A situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ s.a. & x + y + z = 1 \\ & 2x + 3y + z = 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min & x^2 + y^2 + z^2 \\ s.a. & x + y + z = 1 \\ & 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \alpha(x + y + z - 1) - \beta(2x + 3y + z - 6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \alpha - 2\beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \alpha - 3\beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \alpha - \beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 1 - x - y - z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 6 - 2x - 3y - z$$

Igualando a zero e resolvendo o sistema obtemos o ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

64. Determinar a distância mínima entre o ponto (0, 1) e a curva $x^2 = 4y$.

A situação pode ser modelada por:

$$\begin{cases} \min & \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} \\ s.a. & x^2 = 4y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min & x^2+(y-1)^2 \\ s.a. & x^2 = 4y \end{cases}$$

Derivando a função lagrangeana temos:

$$L = x^2 + (y-1)^2 - \alpha(x^2 - 4y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\alpha x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 4\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 4y - x^2$$

Igualando a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar o ponto (0,0). Dessa forma a distância mínima é $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2} = 1$.

65. Achar os valores extremos de $z = 2xy$ sujeitos à condição $x + y = 2$.

Vamos definir função lagrangeana

$L = 2xy - \alpha(x + y - 2)$.

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x - \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2 - x - y$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema vamos encontrar o ponto $(1,1)$ que é ponto de máximo.

66. Determinar o ponto do plano $x + y - z = 1$ cuja distância ao ponto (1, 1, 1) seja mínima.

Como o ponto (1,1,1) pertence ao plano dado, a distância mínima é zero e portanto o ponto do plano é (1,1,1).

67. Mostrar que o paralelepípedo retângulo de maior volume que pode ser colocado dentro de uma esfera tem a forma de um cubo.

Vamos considerar que o paralelepípedo tem dimensões a, b e c. A esfera tem raio r. A única hipótese para termos um paralelepípedo de maior volume inserido na esfera de raio r é que a sua diagonal ($\sqrt{a^2+b^2+c^2}$) tenha a medida do diâmetro, ou seja, 2r.

Dessa forma podemos modelar um problema de maximização como segue:

$$\begin{cases} \max \quad abc \\ s.a. \quad a^2+b^2+c^2=4r^2 \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = abc - \alpha(4r^2 - a^2 - b^2 - c^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = bc + 2\alpha a$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = ac + 2\alpha b$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = ab + 2\alpha c$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\left(4r^2 - a^2 - b^2 - c^2\right)$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema obtido vamos obter que $a = b = c$, o que caracteriza que o paralelepípedo é um cubo.

68. Calcular as dimensões de um retângulo de área máxima inscrito numa semi-circunferência de raio 2.

Ao inscrever um retângulo, de dimensões *a* e *b*, de área máxima, na semicircunferência de raio 2, fica estabelecida uma relação tal que $2^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{4}$.

Dessa forma a modelagem da situação fica:

$$\begin{cases} \max \quad ab \\ s.a. \quad \dfrac{1}{4}a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

Escrevendo a função lagrangeana e derivando, temos:

$$L = ab - \alpha(4 - b^2 - \frac{a^2}{4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = b + \alpha a / 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = a + 2\alpha b$$

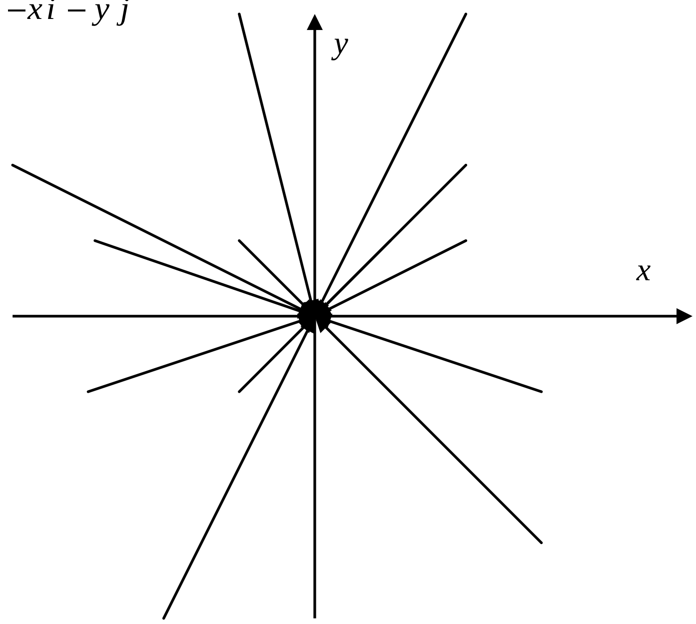
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = b^2 + \frac{a^2}{4} - 4$$

Igualando as derivadas a zero e resolvendo o sistema, obtemos $a = 2b$ e $b = \sqrt{2}$, caracterizando as dimensões do retângulo $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

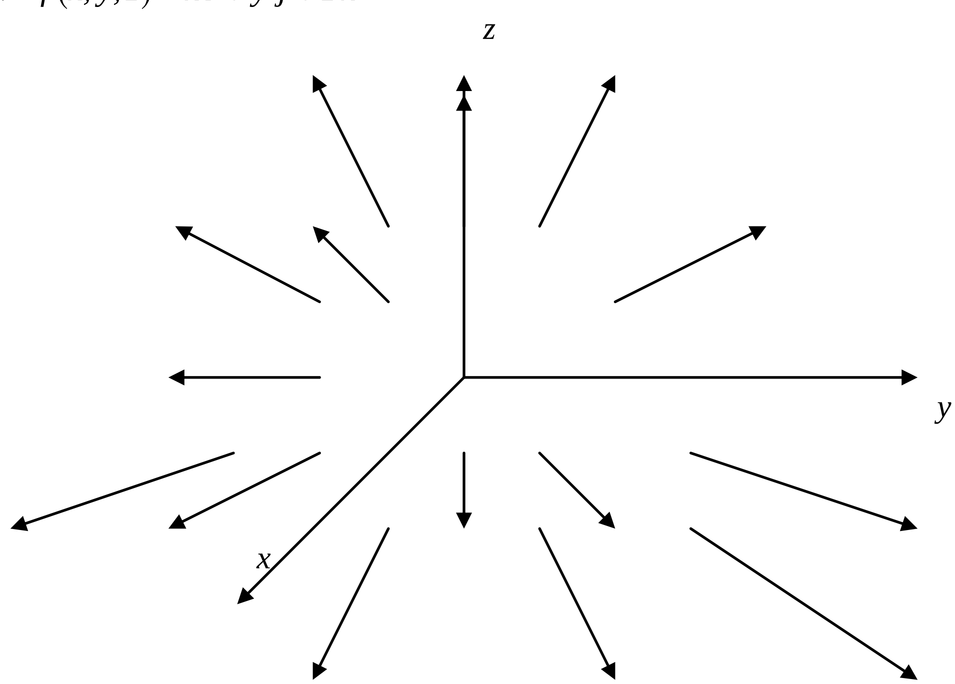
CAPÍTULO 6
6.2 - EXERCÍCIOS
pág. 197 - 198

Nos exercícios de 1 a 9 representar graficamente os seguintes campos vetoriais.

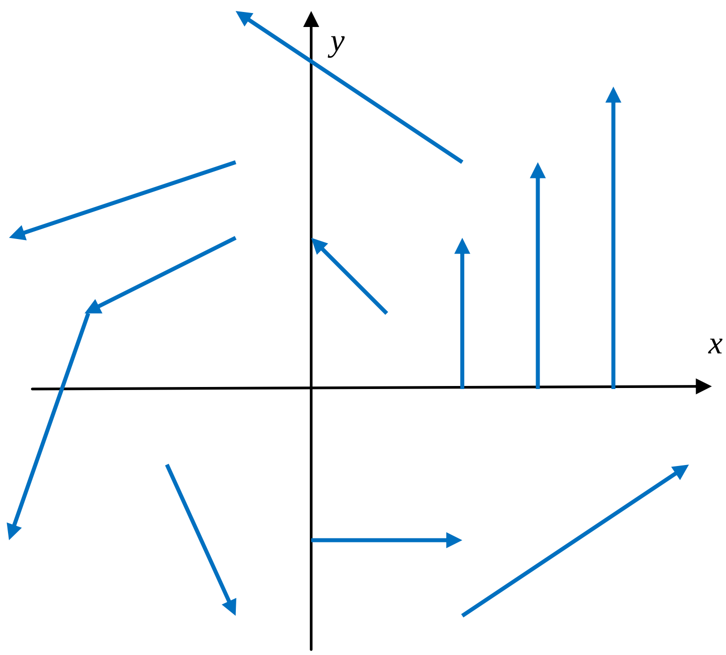
1. $\vec{f}(x,y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$



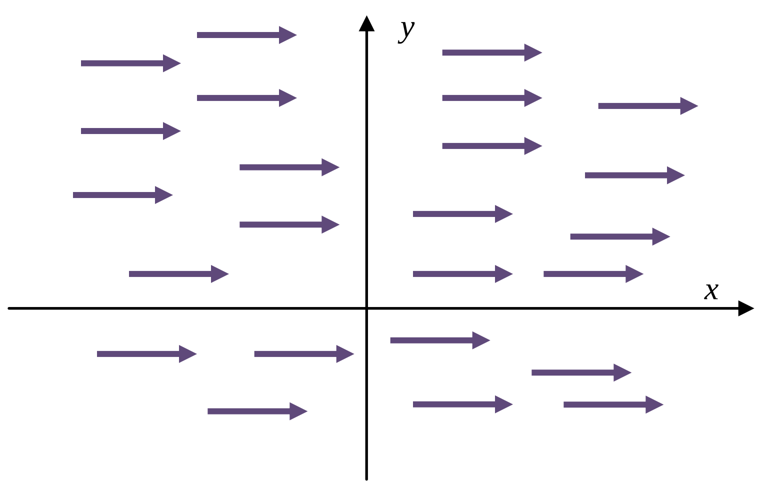
2. $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



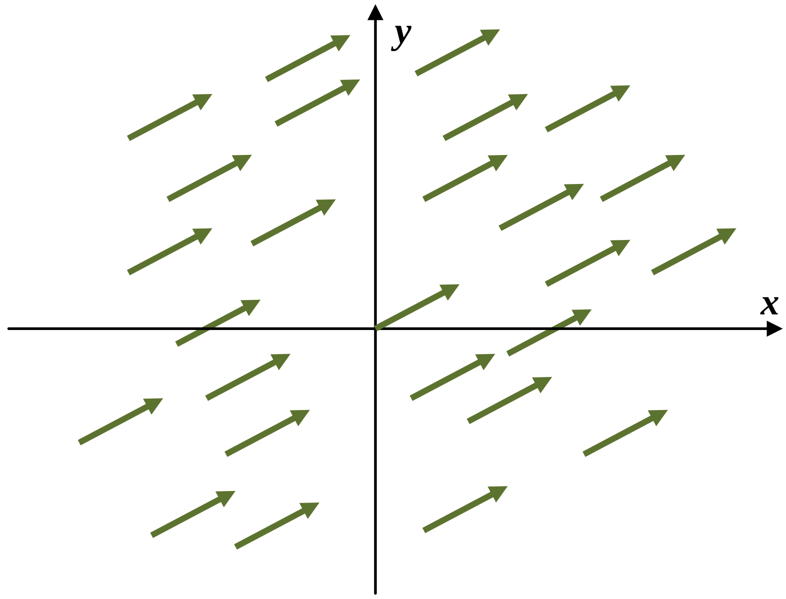
3. $\vec{f}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$



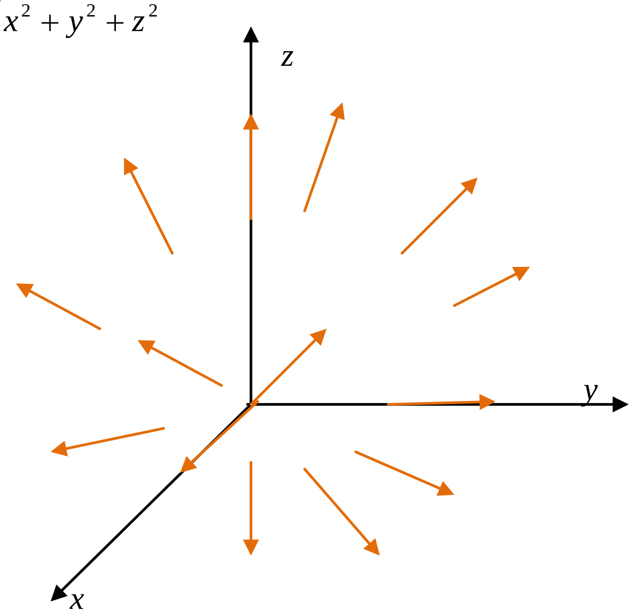
4. $\vec{f}(x,y) = 2\vec{i}$



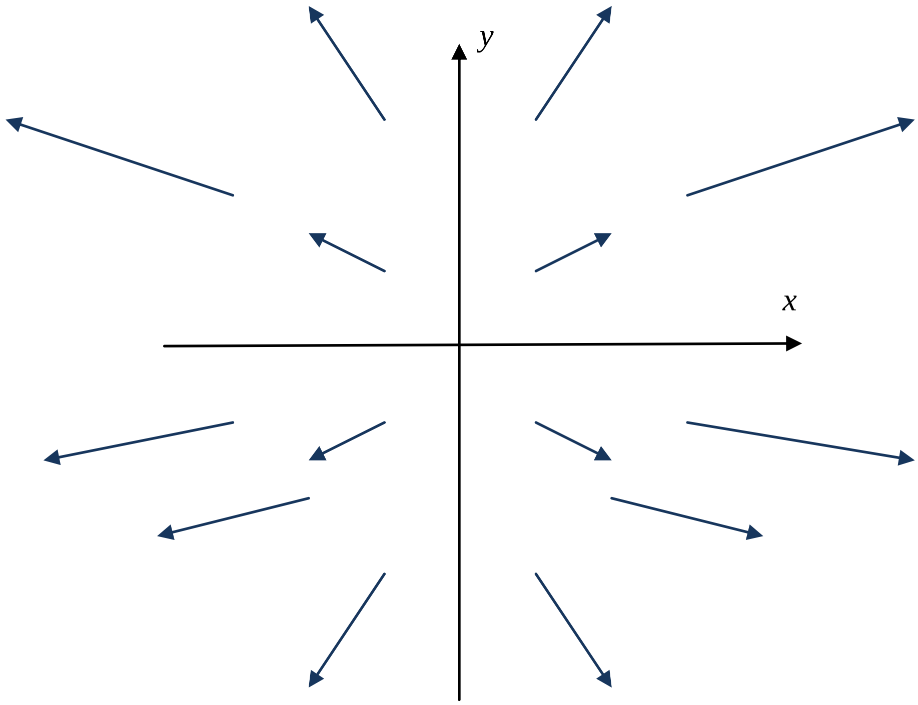
5. $\vec{f}(x,y)=2\vec{i}+\vec{j}$



6. $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



7. $\vec{f}(x,y)=\left(x,\dfrac{y}{2}\right)$



8. Suponha que a temperatura em um ponto (x,y,z) do espaço é dada por $x^2+y^2+z^2$. Uma partícula P se move de modo que no tempo t a sua posição é dada por (t,t^2,t^3).

a) Identificar a função escalar que nos dá a temperatura num ponto qualquer do espaço.

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

b) Identificar a função vetorial que descreverá o movimento da partícula P.

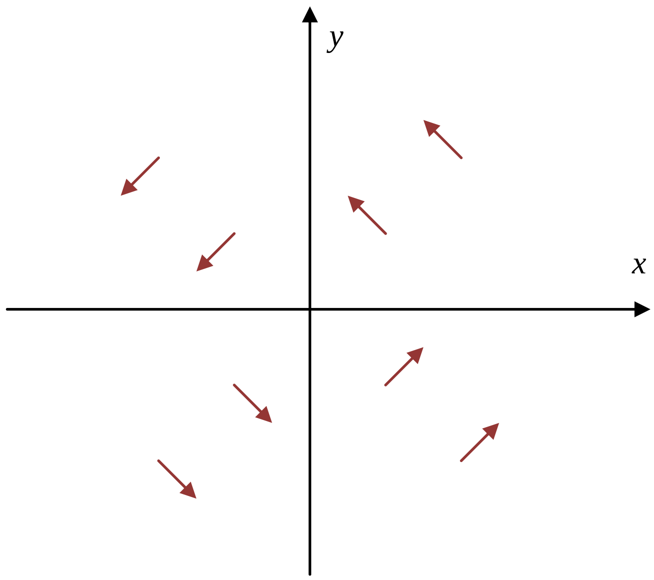
$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$

c) Determinar a temperatura no ponto ocupado pela partícula em $t=\dfrac{1}{2}$.

Para $t=\dfrac{1}{2}$ temos o ponto $P=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$. Assim,

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{16+4+1}{64}=\frac{21}{64}\ uni.\ temp.$$

9. O campo vetorial $\vec{f} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ aproxima o campo de velocidade da água, que ocorre quando se puxa um tampão numa canalização. Representar graficamente este campo.



10. Seja D um sólido esférico de raio r. A temperatura em cada um de seus pontos é proporcional à distância do ponto até a superfície da esfera.

a) Usando coordenadas cartesianas, determinar a função que define o campo de temperatura.

$$T = K\left(r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

b) Determinar as superfícies isotermas do campo de temperatura em D, isto é determinar as superfícies em que a temperatura é constante.

Supondo que a temperatura é constante temos

$$T = k_1$$

$$k\left(r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = k_1$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{kr - k_1}{k}$$

$$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{kr-k_1}{k}\right)^2$$

Assim temos uma superfície esférica de raio $r - \dfrac{k_1}{k}$, centrada na origem.

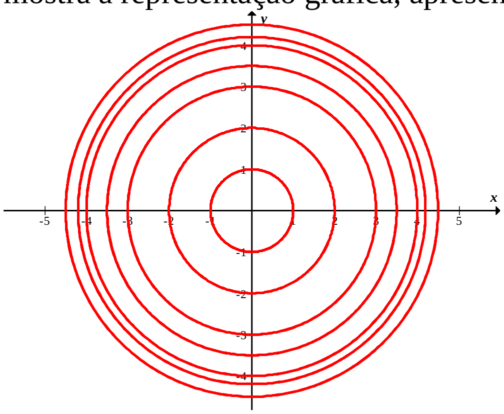
11. As funções a seguir definem campos vetoriais sobre $\Re^2$. Determinar e fazer os gráficos das curvas onde $\left|\vec{f}\right|$ é constante.

a) $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k$$
$$x^2 + y^2 = k^2$$

Temos uma família de circunferências de raio k centrada na origem. A figura que segue mostra a representação gráfica, apresentando-se alguns membros da família de curvas.



b) $\vec{f} = x\vec{i} + 4y\vec{j}$

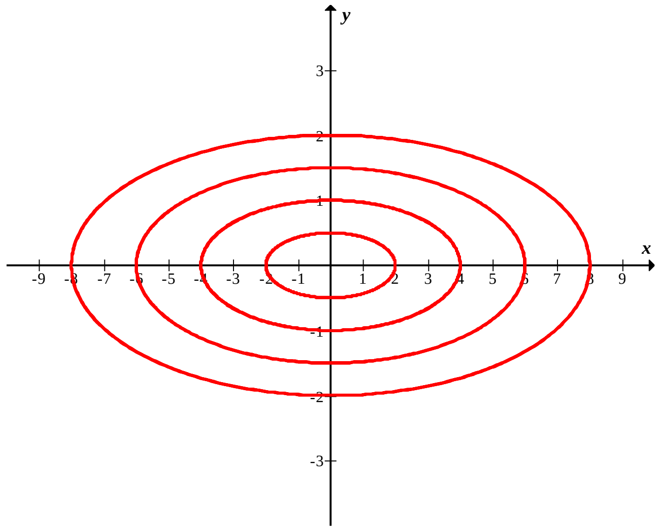
$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{x^2 + 16y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + 16y^2} = k$$

$$x^2 + 16y^2 = k^2$$

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{16}} = 1$$

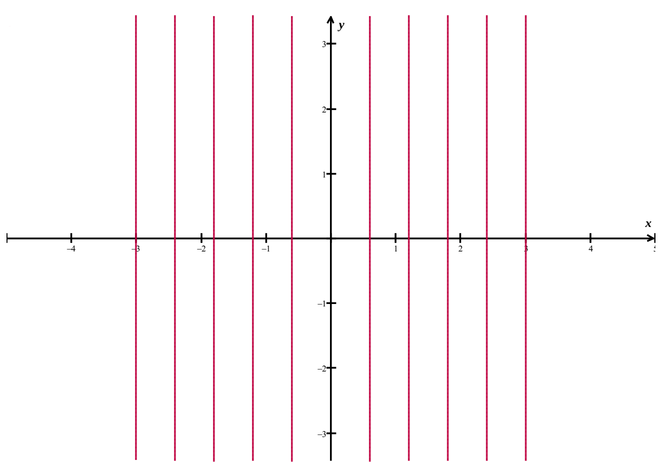
Temos uma família de elipses centrada na origem. A figura que segue mostra a representação gráfica, apresentando-se alguns membros da família de curvas.



c) $\vec{f} = 2\vec{i} + x\,\vec{j}$

$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{4 + x^2}$$
$$\sqrt{4 + x^2} = k$$
$$4 + x^2 = k^2$$
$$x^2 = k^2 - 4$$
$$x = \sqrt{k^2 - 4}$$

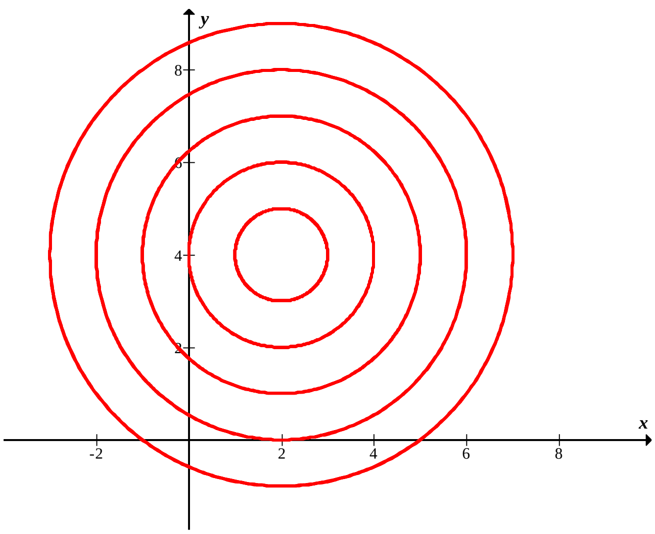
Temos uma família de retas verticais. A figura que segue mostra a representação gráfica, apresentando-se alguns membros da família de curvas.



d) $\vec{f} = (x-2)\vec{i} + (y-4)\vec{j}$

$$\left|\vec{f}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = k$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = k^2$$

Temos uma família de circunferências centradas em (2,4). A figura que segue mostra a representação gráfica, apresentando-se alguns membros da família de curvas.



12. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retângulo cuja base tem dimensões 1m e 2m e cuja altura é 1,5m. O tanque está cheio de uma substância com densidade variável. Em cada ponto, a densidade é proporcional à distância do ponto até a superfície superior do tanque.

a) Determinar a função que define o campo de densidade.

$$f(x,y,z) = k(1{,}5 - z)$$

b) Determinar as superfícies em que a densidade é constante.

$$k(1{,}5 - z) = a$$
$$1{,}5 - z = \frac{a}{k}$$
$$1{,}5 - z = b$$
$$z = 1{,}5 - b$$
$$z = c$$

Planos paralelos ao plano *xy*. Ou planos paralelos à base do tanque.

13. A temperatura nos pontos de um sólido esférico é dada pelo quadrado da distância do ponto até o centro da esfera. Usando coordenadas cartesianas, determinar o campo temperatura.

A distância de um ponto até o centro é dada por $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Assim a função que modela o campo de temperatura é $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

14. Um campo minado tem a forma de um retângulo de lados a e b. O campo foi dividido em pequenos retângulos de lados $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{n}$, m e n inteiros e positivos. Os explosivos foram colocados nos vértices desses retângulos. Usando coordenadas cartesianas, descrever analiticamente este campo.

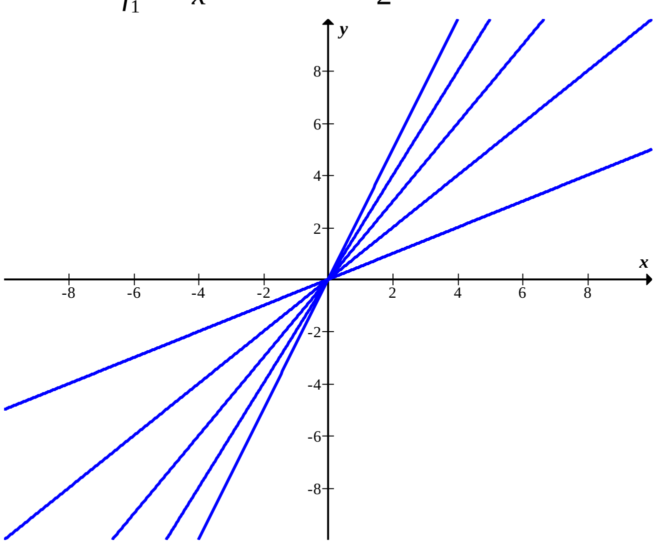
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \quad se \quad (x, y) \mid x = \dfrac{ia}{m} \; e \; y = \dfrac{jb}{n}, \quad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n \\ 0 \quad \text{nos demais pontos.} \end{cases}$$

15. As funções a seguir definem campos vetoriais em $\Re^2$. Determinar e fazer os gráficos das curvas onde $\vec{f}$ tem direção constante.

a) $\vec{f} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$

Devemos ter $tg\theta = c$, c constante, onde θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e $\vec{f}$. Assim, se $\vec{f} = (f_1, f_2)$, devemos ter $\frac{f_2}{f_1} = c$.

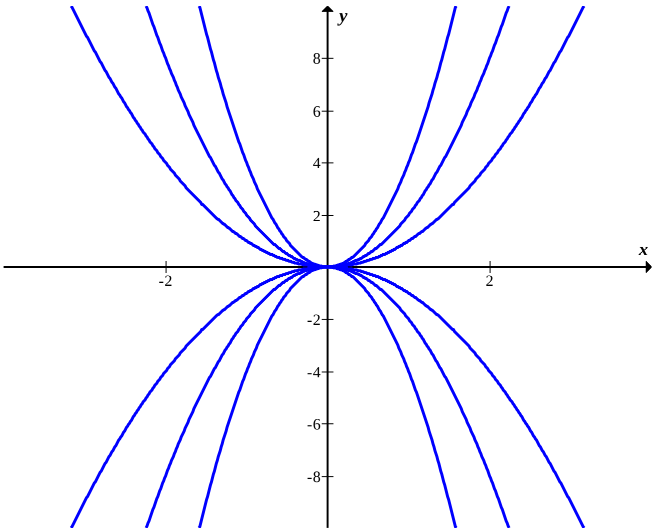
Temos, $\frac{f_2}{f_1} = \frac{2y}{x} = c$ ou $y = \frac{cx}{2}$, que é uma família de retas que passam pela origem.



b) $\vec{f} = x^2\vec{i} + y\,\vec{j}$

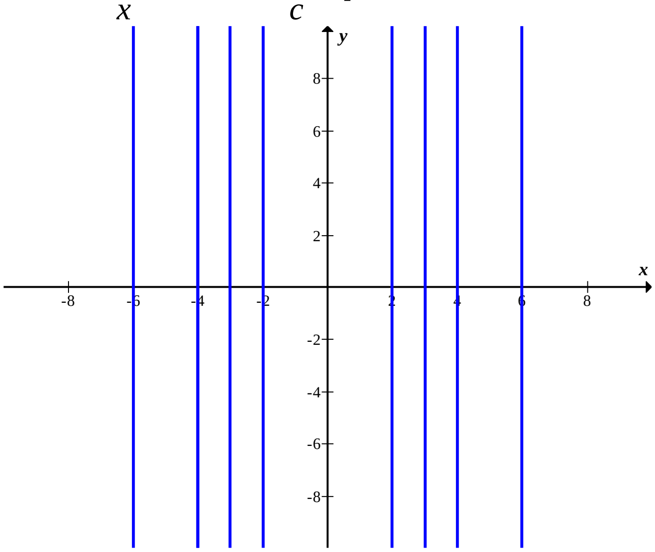
Temos,

$\dfrac{y}{x^2} = c$ ou $y = cx^2$, que é uma família de parábolas.



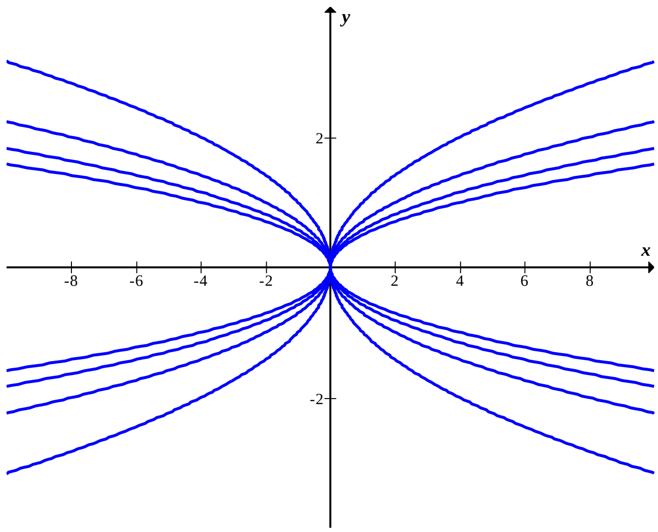
c) $\vec{f} = x\vec{i} + \vec{j}$

Temos: $\dfrac{1}{x} = c$ ou $x = \dfrac{1}{c}$., que é uma família de retas verticais.



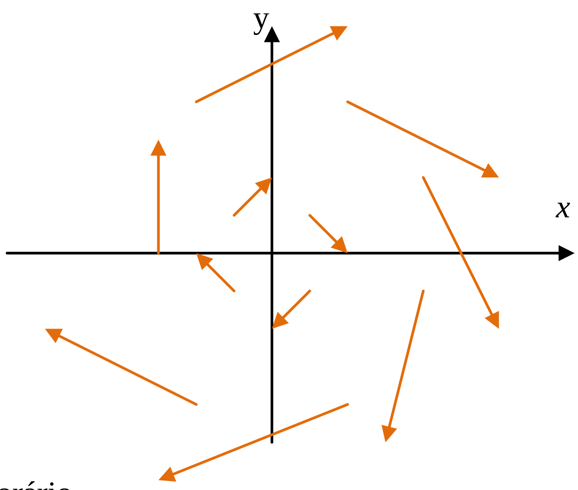
d) $\vec{f} = x\vec{i} + y^2\vec{j}$

Temos: $\dfrac{y^2}{x} = c$ ou $y^2 = cx$, que é uma família de parábolas.



16. O campo $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ representa a velocidade de um volante em rotação rígida em torno do eixo z. Descrever graficamente o campo. Qual o sentido do movimento de rotação?

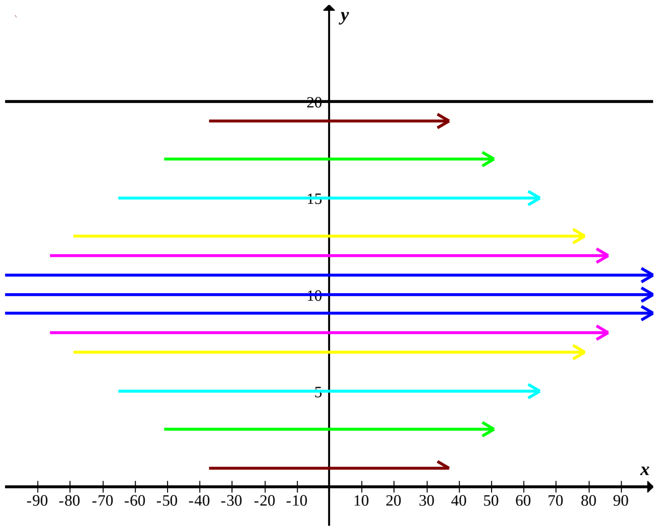
    Segue a descrição gráfica do campo



    Temos o sentido horário.

17. Um furacão se desloca na superfície terrestre, atingindo uma faixa retilínea de 20 km de largura. Na zona central da faixa (2 km de largura) a velocidade do vento é de 200 km/h. Nos demais pontos é dada por $\vec{v} = 200 - 14x$, onde x é a distância do ponto até o centro da faixa. Esboçar o campo.

A figura que segue apresenta um visual focado em um ponto. Mostrando apenas que os vetores velocidades diminuem na medida em que nos afastamos do centro da faixa.



18. Seja P_0 um ponto fixo no espaço e $d(P, P_0)$ a distância de um ponto qualquer P até P_0. Se P_0 têm coordenadas cartesianas (x_0, y_0, z_0) e $P = P(x, y, z)$, descrever analiticamente este campo.

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right)$$

19. Uma cidade x está localizada a 1100m acima do nível do mar. O plano diretor da cidade prevê a construção de edifícios, desde que eles não ultrapassem a cota de 1140m. O relevo da cidade é bastante irregular, tendo partes altas e baixas. Definimos um campo escalar em x, associando a cada ponto P, a altura máxima que poderá ter um edifício ali localizado. Descrever analiticamente este campo.

A altura máxima do edifício (A), é função da cota e é dada por $A = 1140 - z$, onde z é a cota da localização do edifício.

20.

a) Escrever uma função vetorial em duas dimensões que define um campo vetorial, cuja intensidade seja igual a 1.

$$\vec{f} = \alpha\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$$

$$\left|\vec{f}\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = 1$$

$$\alpha\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Portanto,

$$\vec{f} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}.$$

Observa-se que outras funções podem ser definidas.

b) Escrever uma função vetorial em três dimensões que defina um campo radial, cuja intensidade seja igual a 1.

$$\vec{f} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$$

c) Escrever uma função vetorial em duas dimensões que defina um campo vetorial tangencial, cuja intensidade em cada ponto (x, y) é igual a distância deste ponto até a origem.

$$\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)\cdot \vec{f}(x, y) = 0$$

$$\left|\vec{f}(x, y)\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x.\alpha\, y - y.\alpha x = 0$$

$$\vec{f}\,(x, y) = (\alpha y, -\alpha x)$$

$$\left|\vec{f}\,(x, y)\right| = \sqrt{\alpha^2 y^2 + \alpha^2 x^2}$$

$$= |\alpha|\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessa forma temos que $|\alpha| = 1$. Assim

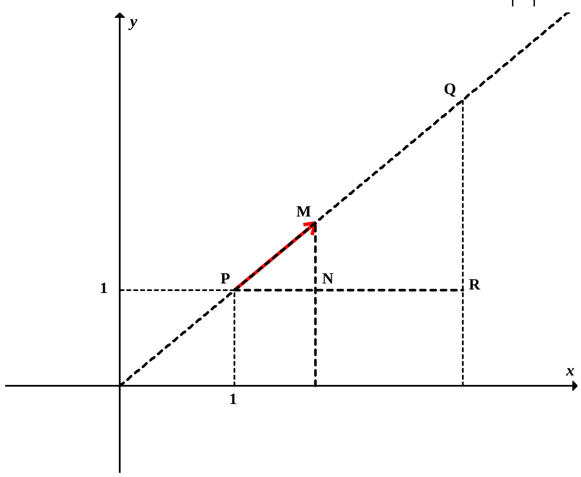
$\vec{f}(x, y) = (y, -x)$ ou $\vec{f}\,(x, y) = (-y, x)$.

CAPÍTULO 6
6.6 - EXERCÍCIOS
pág. 212 -214

1. Calcular, usando a definição, a derivada direcional do campo escalar $f(x,y)$ no ponto indicado e na direção $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$ em $P(1,1)$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{1+1}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Observe a Figura



O ΔQRP *é semelhante ao* ΔMNP. Temos:

$$\overline{PM} = 1 \qquad\qquad PQ = s$$

$$\overline{PN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \overline{PR} = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \overline{QR} = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Assim as coordenadas do ponto Q são $\left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{2}}, 1 + \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{S \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}, 1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - [2.1+2.1]}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right) - 4}{s}$$

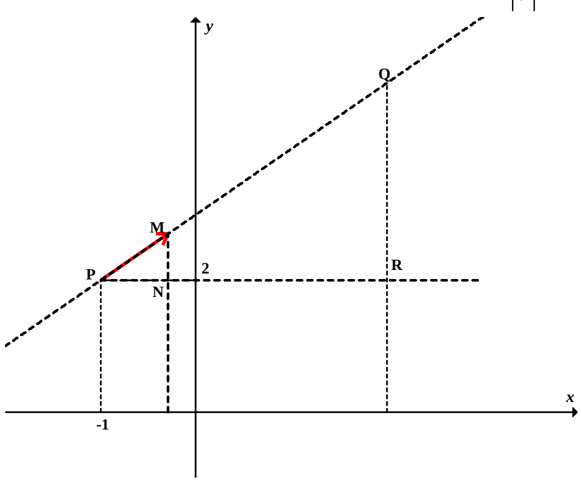
$$= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{8s}{\sqrt{2}} + 2s^2}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{8}{\sqrt{2}} + 2s\right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,.$$

b) $f(x,y) = 2x + y \ em \ P(-1,2)$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Observe a Figura



Temos que: $PR = \frac{s}{\sqrt{2}}$ e $Q\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1\,, 2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S\to 0} \frac{f\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1, 2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - f(-1,2)}{s}$$

$$= \lim_{S \to 0} \frac{2\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1\right) + 2 + \frac{s}{\sqrt{2}} - \left(2.(-1) + 2\right)}{s}$$

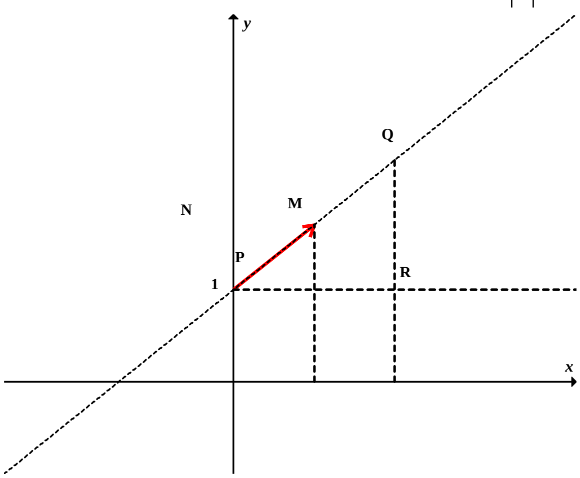
$$= \lim_{S \to 0} \frac{\frac{2s}{\sqrt{2}} - 2 + 2 + \frac{s}{\sqrt{2}} - 0}{s}$$

$$= \lim_{S \to 0} \frac{3s}{\sqrt{2}s}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

c) $f(x, y) = e^{x+y}$ em $P(0,1)$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Observe a Figura



Temos que $Q\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - f(0,1)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{e^{\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{s}{\sqrt{2}}} - e^{0+1}}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}+1} - e}{s}$$

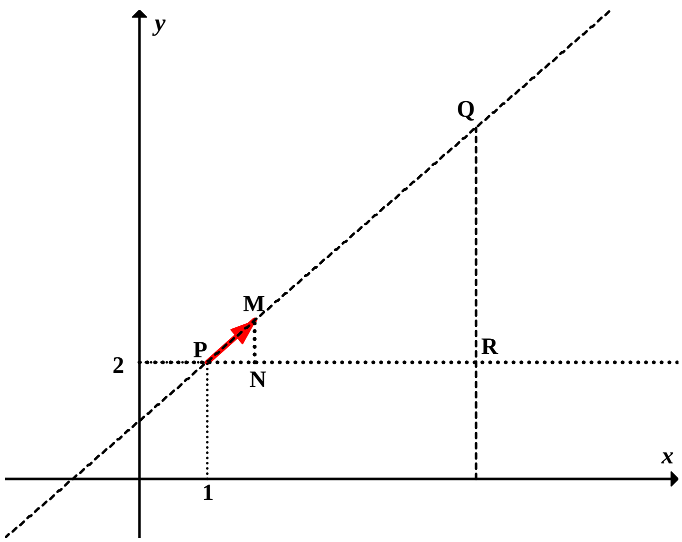
$$= \lim_{s\to 0} \frac{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}+1}(2/\sqrt{2})}{1}$$

$$= \frac{2e}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e\,.$$

Nos exercícios de 2 a 6, calcular, usando a definição, a derivada direcional no ponto e direção indicados.

2. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $P(1,2)$ *na direção de* $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2,2)}{\sqrt{4+4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Veja a figura que segue



Temos o ponto Q dado por:

$$Q\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}, 2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S\to 0} \frac{f\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}, 2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S\to 0} \frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1^2 - 2^2)}{s}$$

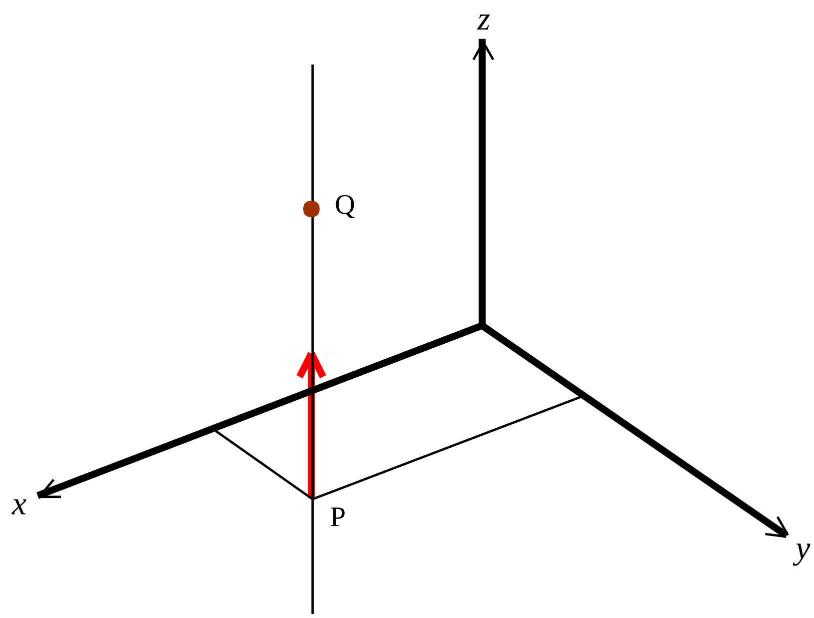
$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S \to 0} \frac{1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2} - 4 - \frac{4s}{\sqrt{2}} - \frac{s^2}{2} + 3}{s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S \to 0} \frac{\frac{-2s}{\sqrt{2}}}{s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S \to 0} \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,.$$

3. $f(x,y,z) = xy + z$, $P(2,1,0)$, na direção do eixo positivo dos z.

O vetor unitário na direção dada é $\vec{b} = \vec{k}$. O ponto Q ficará $Q(2,1,s)$. Ver figura que segue.



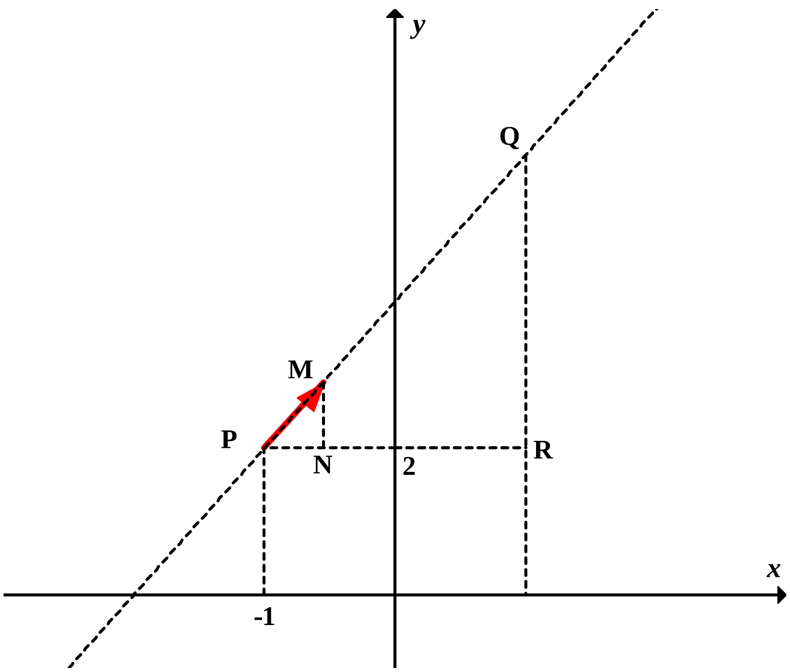
Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S \to 0}\left(\frac{f(2,1,s) - f(2,1,0)}{s}\right) = \lim_{S \to 0} \frac{2.1 + s - 2.1}{s} = \lim_{S \to 0} \frac{s}{s} = 1\,.$$

4. $f(x,y) = 2x + 3y$, $P(-1,2)$ na direção da reta $y = 2x$

Um vetor na direção dada é $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Mais especificamente temos que o vetor unitário é igual a $\vec{b} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1+4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

O ponto Q é dado por $Q\left(\frac{s}{\sqrt{5}}-1\,,\,2+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$. Ver Figura que segue



Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P)=\lim_{S\to 0}\frac{f\left(\frac{s}{\sqrt{5}}-1\,,\,2+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)-f(-1,2)}{s}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{2\left(\frac{s}{\sqrt{5}}-1\right)+3\left(2+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)-\left(2.(-1)+3.2\right)}{s}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{\frac{2s}{\sqrt{5}}-2+6+\frac{6s}{\sqrt{5}}+2-6}{s}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{\frac{8s}{\sqrt{5}}}{s}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

5. $f(x,y)=2-x^2-y^2, P(1,1)$, na direção do vetor tangente utilitário à curva $C:\vec{r}(t)=(t,t^2)\ em\ P(1,1)$.

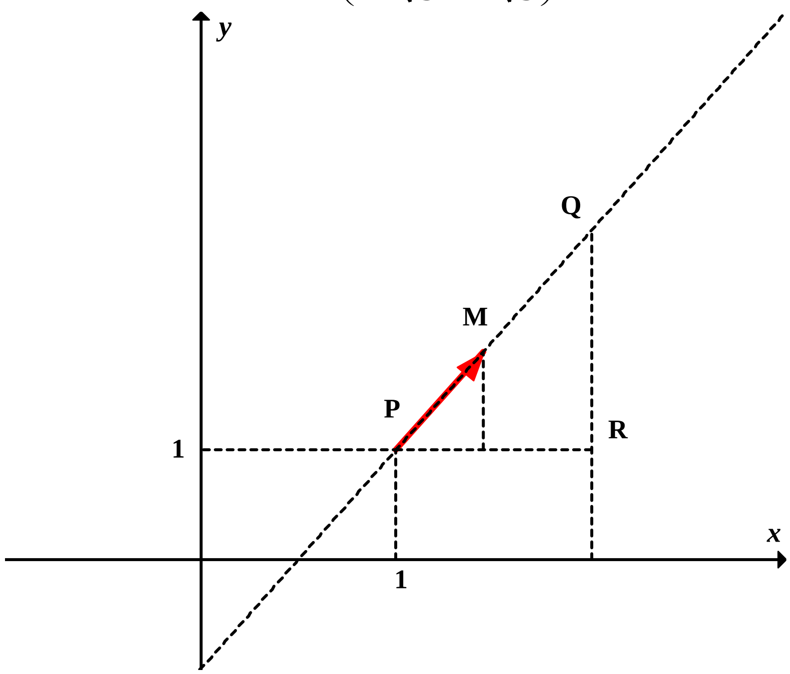
Para definirmos o vetor tangente unitário temos:

$\vec{r}\,'(t)=(1,2t)$

$\vec{r}\,'(1)=(1,2)$

$$\vec{b} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Dessa forma temos que $Q\left(1+\frac{s}{\sqrt{5}}, 1+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$. Ver figura que segue



Portanto,

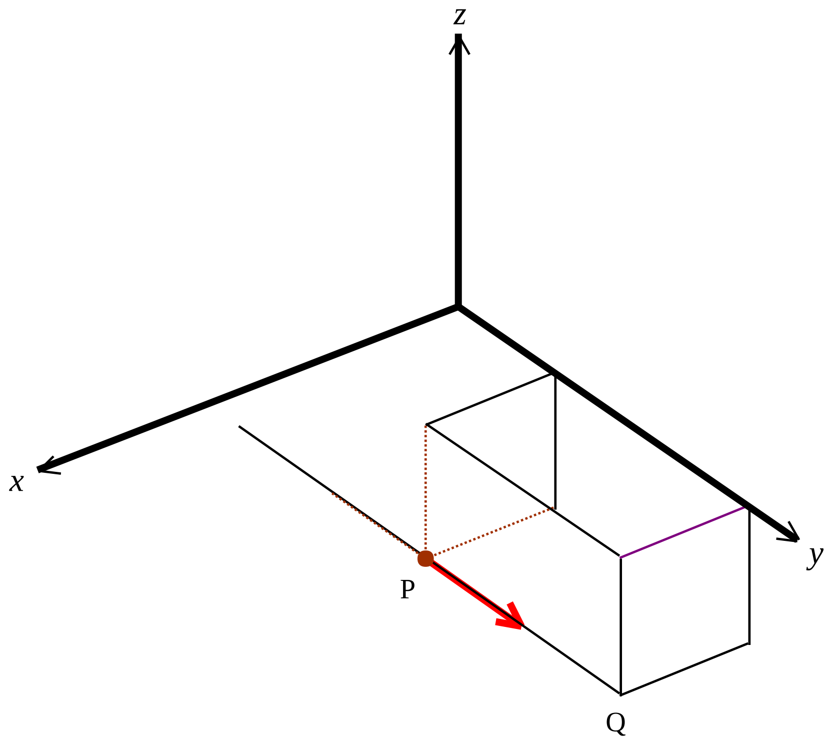
$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{S\to 0} \frac{f\left(1+\frac{s}{\sqrt{5}}, 1+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) - f(1,1)}{s}$$

$$= \lim_{S\to 0} \frac{2-\left(1+\frac{s}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(1+\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)^2 - (2-1-1)}{s}$$

$$= \lim_{S\to 0} \frac{2-1-\frac{2s}{\sqrt{5}}-\frac{s^2}{5}-1-\frac{4s}{\sqrt{5}}-\frac{4s^2}{5}-0}{s} = \lim_{S\to 0} \frac{-s^2-\frac{6s}{\sqrt{5}}}{s} = \lim_{S\to 0}\left(-s-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

6. $f(x,y,z) = 2x+3y-z$, $P(1,1,-1)$, na direção do eixo positivo dos y.

O vetor unitário na direção dada é $\vec{b} = \vec{j}$.
Dessa forma temos $Q = (1,1+s,-1)$. Ver figura que segue.



Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P)=\lim_{S\to 0}\frac{f(1,1+s,-1)-f(1,1,-1)}{s}=\lim_{S\to 0}\frac{2+3(1+s)+1-(2.1+3.1+1)}{s}=3.$$

Nos exercícios 7 a 17, calcular o gradiente do campo escalar dado.

7. $f(x,y,z)=xy+xz+yz$

$grad\ f=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

8. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2$

$grad\ f=2x\vec{i}+4y\vec{j}+8z\vec{k}$.

9. $f(x,y)=3xy^3-2y$

$grad\ f=3y^3\vec{i}+(9xy^2-2)\vec{j}$.

10. $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$

$$grad\ f = \frac{1}{2}(xyz)^{-\frac{1}{2}}.yz\,\vec{i} + \frac{1}{2}(xyz)^{-\frac{1}{2}}.xz\,\vec{j} + \frac{1}{2}(x,y,z)^{-\frac{1}{2}}.xy\,\vec{k}$$

$$grad\ f = \frac{\sqrt{xyz}}{2x}\vec{i} + \frac{\sqrt{xyz}}{2y}\vec{j} + \frac{\sqrt{xyz}}{2z}\vec{k}\,.$$

11. $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$grad\ f = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x\,\vec{i} - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2y\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$grad\ f = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}\,.$$

12. $f(x,y) = e^{2x^2+y}$

$$grad\ f = e^{2x^2+y}.4x\,\vec{i} + e^{2x^2+y}\,\vec{j}\,.$$

13. $f(x,y) = arctg\ xy$

$$grad\ f = \frac{y}{1+x^2y^2}\vec{i} + \frac{x}{1+x^2y^2}\vec{j}\,.$$

14. $f(x,y) = \dfrac{2x}{x-y}$

$$grad\ f = \frac{(x-y).2-2x.1}{(x-y)^2}\vec{i} + \frac{(x-y).0-2x(-1)}{(x-y)^2}\vec{j}$$

$$grad\ f = \frac{-2y}{(x-y)^2}\vec{i} + \frac{2x}{(x-y)^2}\vec{j}\,.$$

15. $f(x,y,z) = 2xy + yz^2 + \ln z$

$$grad\ f = 2y\,\vec{i} + \left(2x+z^2\right)\vec{j} + \left(2yz + \frac{1}{z}\right)\vec{k}$$

16. $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x+y}{z}}$

$$grad\ f = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{z}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{1}{z}\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{z}\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{z}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{-1(x+y)}{z^2}\vec{k}$$

$$grad\ f = \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ \vec{i} + \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ \vec{j} - \frac{x+y}{2z^2}\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ \vec{k}\,.$$

17. $f(x,y,z) = z.e^{x^2-y}$

$$grad\ f = 2xz.e^{x^2-y}\ \vec{i} - z.e^{x^2-y}\ \vec{j} + e^{x^2-y}\ \vec{k}\,.$$

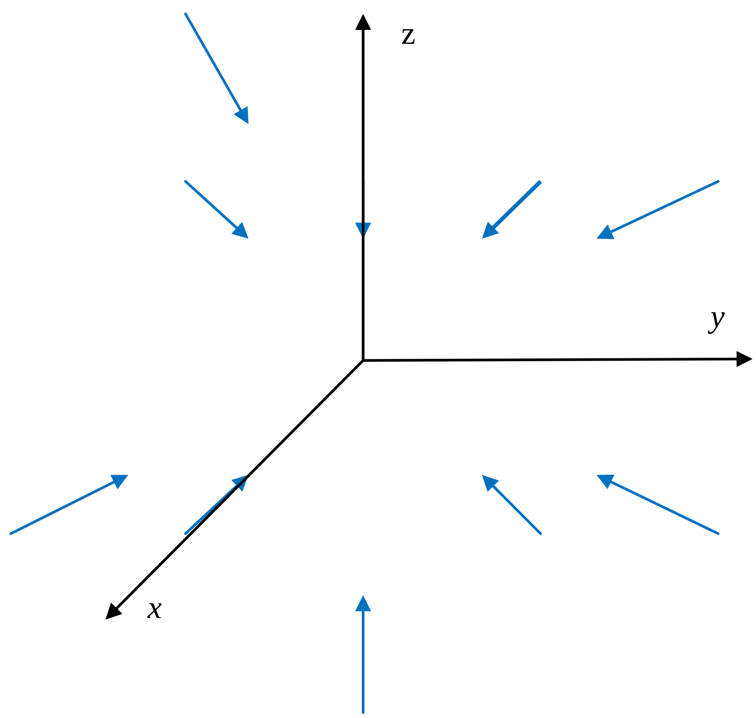
Nos exercícios de 18 a 24, representar geometricamente o campo gradiente definido pela função dada:

18. $u(x,y,z) = \frac{-1}{6}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$$grad\, u = \frac{-1}{6}.2x\vec{i} - \frac{1}{6}.2y\,\vec{j} - \frac{1}{6}.2z\,\vec{k}$$

$$grad\, u = \frac{-1}{3}x\,\vec{i} - \frac{1}{3}y\,\vec{j} - \frac{1}{3}z\,\vec{k}$$

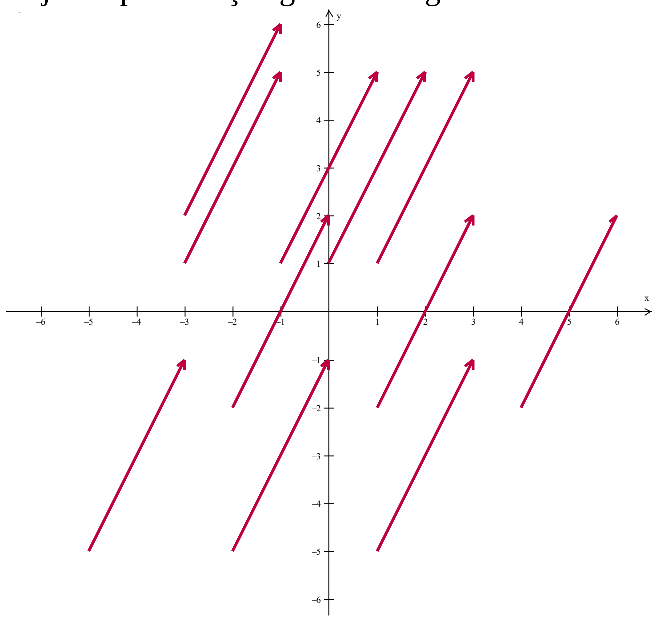
Veja a representação gráfica a seguir



19. $u(x,y) = 2x + 4y$

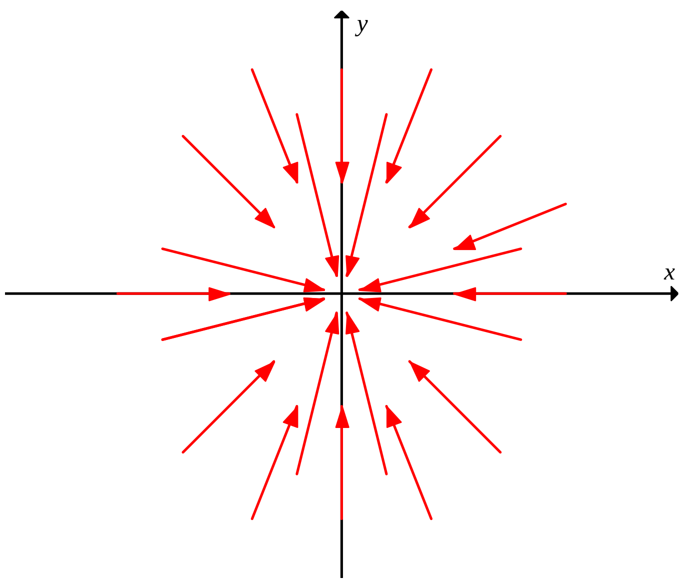
$$grad\, u = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

Veja a representação gráfica a seguir



20. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$

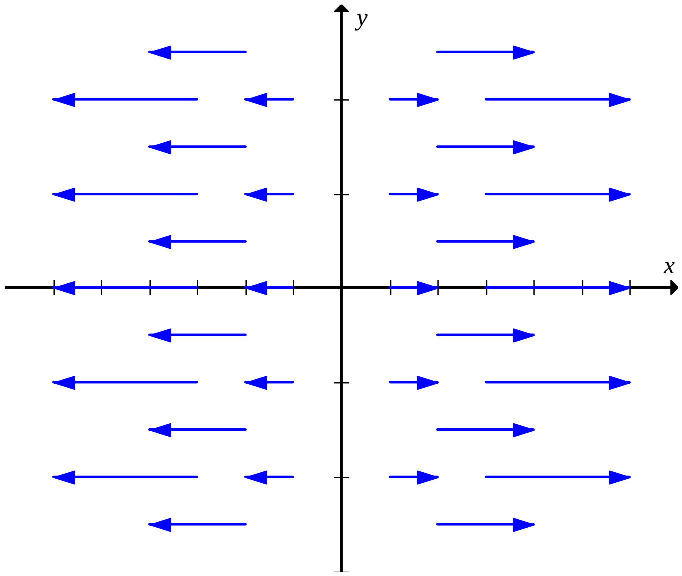
$$grad\, u = \frac{-x}{2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} - \frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$$



21. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2$

$grad\ f = \frac{1}{2}.2x\vec{i} = x\vec{i}$

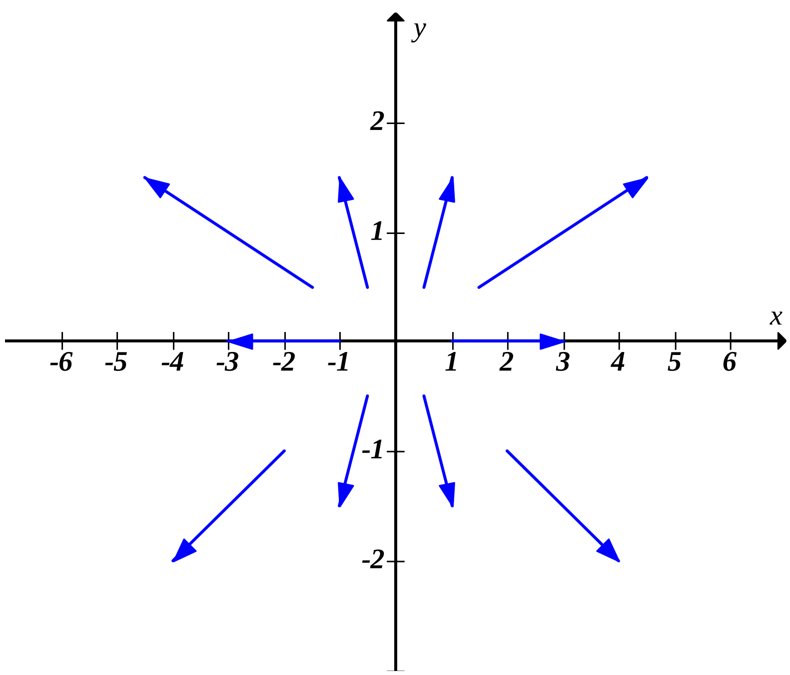
Veja a representação gráfica a seguir



22. $u(x,y) = x^2 + y^2$

$grad\, u = 2x\vec{i} + 2y\,\vec{j}$

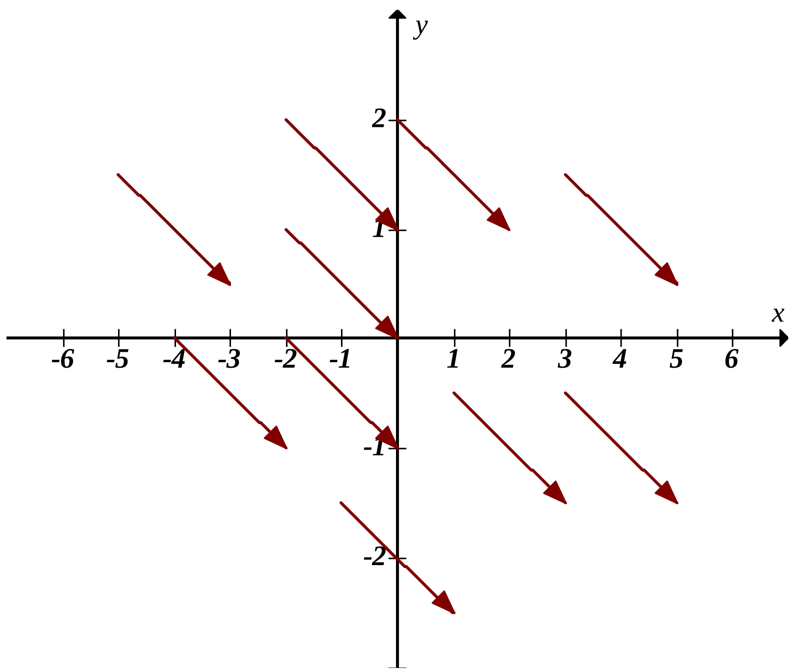
Veja a representação gráfica a seguir



23. $u(x,y) = 2x - y$

$grad\, u = 2\vec{i} - \vec{j}$

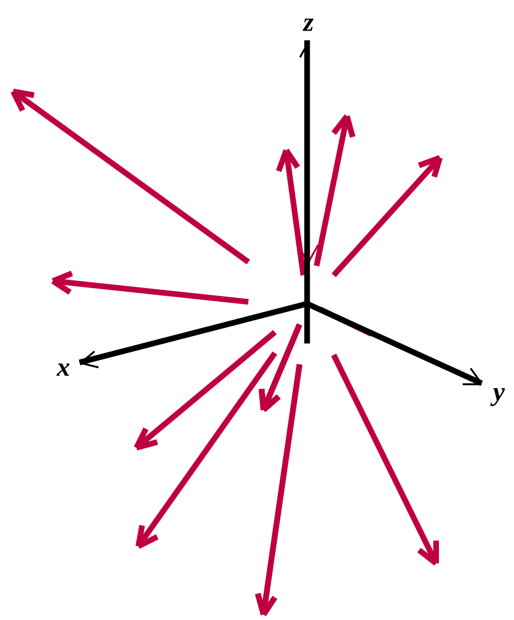
Veja a representação gráfica a seguir.



24. $u(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$

$grad\, u = 4x\vec{i} + 4y\vec{j} + 4z\vec{k}$

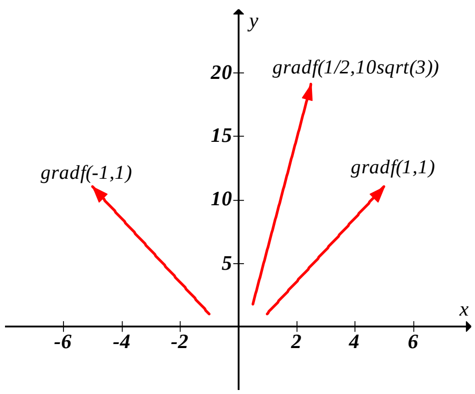
Veja a representação gráfica a seguir



25. Seja $f(x,y)=2x^2+5y^2$. Representar geometricamente $\nabla f(x_0,y_0)$, sendo (x_0,y_0) dado por:

a) $(1,1)$
b) $(-1,1)$
c) $\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$

Temos:
$\nabla f=4x\vec{i}+10y\,\vec{j}$
Assim:
a) $\nabla f(1,1)=4\vec{i}+10\vec{j}$
b) $\nabla f(-1,1)=-4\vec{i}+10\vec{j}$
c) $\nabla f\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)=2\vec{i}+10\sqrt{3}\vec{j}$
Veja a representação gráfica



26. Dados $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2},2\right)$ e a função $f(x,y)=\ln xy$, determinar o ângulo formado pelos vetores $\nabla f(A)\ e\ \nabla f(B)$.

Temos que:
$f(x,y)=\ln xy$

$$\nabla f=\frac{y}{xy}\vec{i}+\frac{x}{xy}\vec{j}=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}$$

$$\nabla f\left(1,\frac{3}{2}\right)=\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},2\right)=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$$

Assim,

$$\cos\theta = \frac{\left(1.2+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}\times\sqrt{4+\frac{1}{4}}} = \frac{14}{\sqrt{221}}.$$

Assim,

$$\theta = arc\cos\frac{14}{\sqrt{221}}.$$

27. Provar as propriedades (a), (b), (d) da Subseção 6.4.3

(a) $grad(cf) = c\, grad\ f$

Seja $f = f(x,y,z)$ uma função e c uma constante. Podemos escrever $cf = cf(x,y,z)$

$$grad(cf) = \frac{\partial}{\partial x}cf\ \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}cf\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}cf\ \vec{k}$$

Usando propriedades das derivadas, vem:

$$grad(cf) = c\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + c\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + c\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$= c\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= c\, grad\ f.$$

(b) $grad(f+g) = grad\ f + grad\ g$

Seja $f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ e $f+g = f(x,y,z)+g(x,y,z)$

Temos:

$$grad(f+g) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y,z)+g(x,y,z))\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y,z)+g(x,y,z))\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y,z)+g(x,y,z))\vec{k}$$

$$grad(f+g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$grad(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}$$

$$grad(f+g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$grad\left(f+g\right)=grad\ f+grad\ g$$

(d) $grad\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g.grad\ f-f.grad\ g}{g^2}$

$$grad\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{k}$$

$$grad\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\dfrac{\partial f}{\partial x}-f\dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\vec{i}+\frac{g\dfrac{\partial f}{\partial y}-f\dfrac{\partial g}{\partial y}}{g^2}\vec{j}+\frac{g\dfrac{\partial f}{\partial z}-f\dfrac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\vec{k}$$

$$grad\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}-f\dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+g\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}-f\dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+g\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}-f\dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k}}{g^2}$$

$$grad\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)-f\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)}{g^2}$$

$$grad\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g.grad\ f-f.grad\ g}{g^2}$$

28. Determinar e representar graficamente um vetor normal à curva dada no ponto indicado:

a) $2x^2+3y^2=8$; $P\left(1,\sqrt{2}\right)$

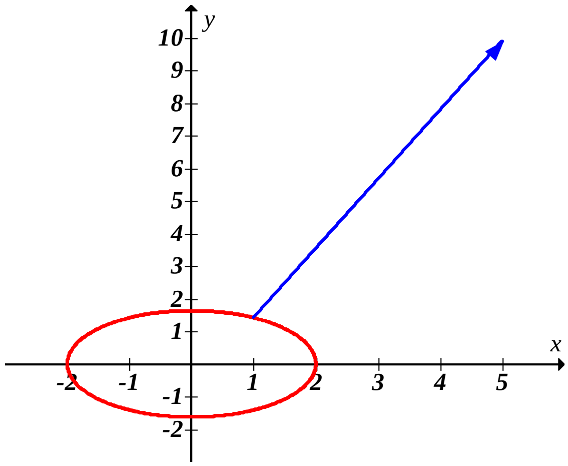
Temos:

$f\left(x,y\right)=2x^2+3y^2-8$

$\nabla f=4x\vec{i}+6y\,\vec{j}$

$\nabla f\left(1,\sqrt{2}\right)=4\vec{i}+6\sqrt{2}\,\vec{j}$

Veja a representação gráfica.



b) $y = 2x^2$; $P(-1,2)$.

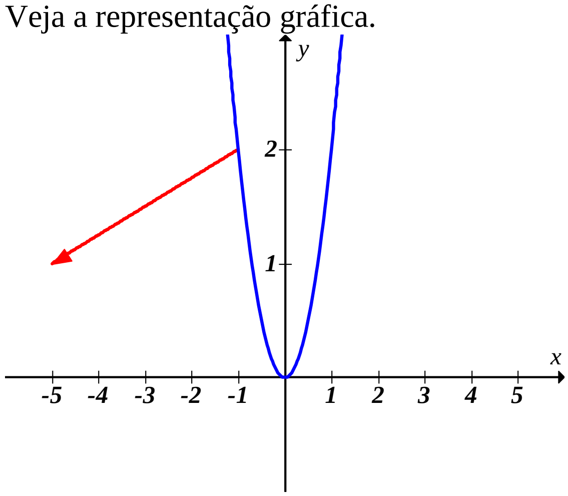
Temos:

$f(x,y) = 2x^2 - y$

$\nabla f = 4x\vec{i} - \vec{j}$

$\nabla f(-1,2) = -4\vec{i} - \vec{j}$.

Veja a representação gráfica.



c) $x^2 + y^2 = 8$ $P(2,2)$

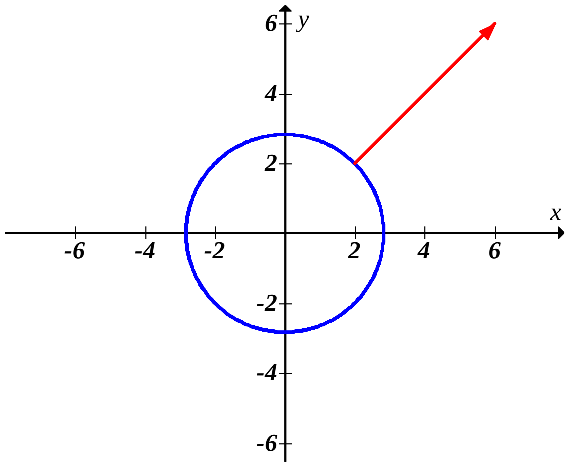
Temos:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 8$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$

$\nabla f(2,2) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$

Veja a representação gráfica.



d) $y = 5x - 2$; $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

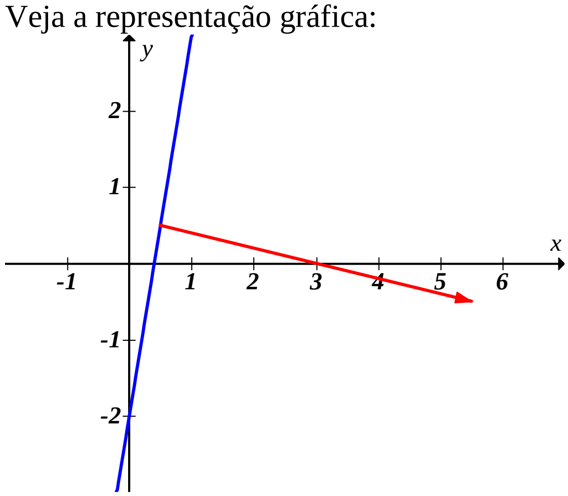
Temos:

$f(x, y) = 5x - 2 - y$

$\nabla f = 5\vec{i} - \vec{j}$

$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5\vec{i} - \vec{j}$

Veja a representação gráfica:



29. Determinar um vetor normal à superfície dada no ponto indicado e representá-lo geometricamente.

a) $2x + 5y + 3z = 10$; $P\left(1, 2, \frac{2}{3}\right)$

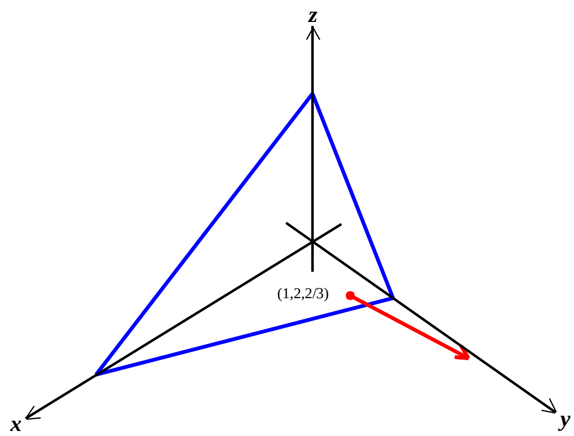
Temos

$f(x, y, z) = 2x + 5y + 3z - 10$

$\nabla f = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\nabla f\left(1, 2, \dfrac{2}{3}\right) = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$

Veja a representação gráfica:



b) $z = 2x^2 + 4y^2$; $P(0,0,0)$

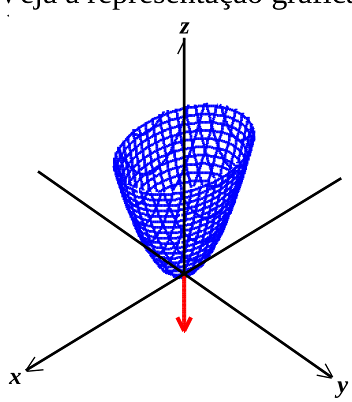
Temos:

$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - z$

$\nabla f = 4x\vec{i} + 4y\vec{j} - \vec{k}$

$\nabla f(0,0,0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k} = -\vec{k}$

Veja a representação gráfica



c) $2z = x^2 + y^2$; $P(1,1,1)$

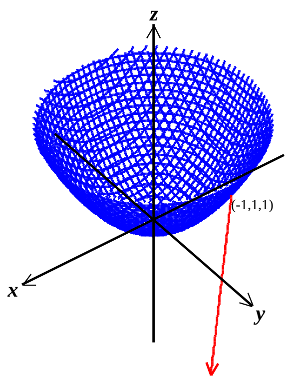
Temos:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2\vec{k}$

$\nabla f(1,1,1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

Veja a representação gráfica:



30. Traçar as curvas de nível de $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$ que passam pelos pontos $(1,1)$, $(1,-2)$ e $(-2,-1)$. Traçar os vetores $\nabla f(1,1)$, $\nabla f(1,-2)$ e $\nabla f(-2,-1)$

Temos as curvas de nível:

$$(1,1)\to\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.1=1\to1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\to2=x^2+y^2$$

$$(1,-2)\to\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.4=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}\to\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\to x^2+y^2=5$$

$$(-2,-1)\to\frac{1}{2}.4+\frac{1}{2}.1=\frac{5}{2}\to x^2+y^2=5.$$

Temos os vetores gradientes:

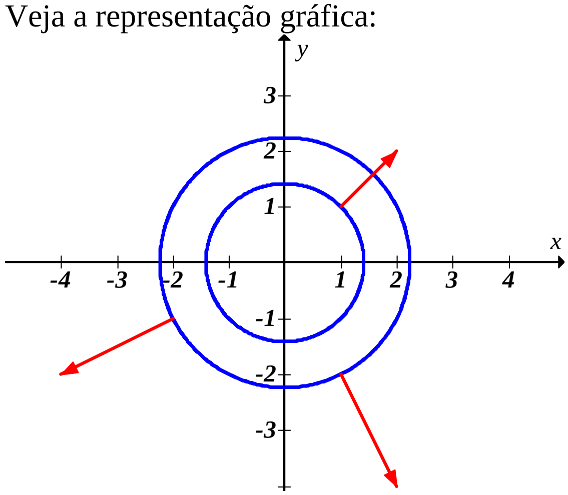
$$\nabla f=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\nabla f(1,1)=\vec{i}+\vec{j}$$

$$\nabla f(1,-2)=\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\nabla f(-2,-1)=-2\vec{i}-\vec{j}$$

Veja a representação gráfica:



Nos exercícios 31 a 35, determinar uma equação para a reta normal à curva dada, nos pontos indicados:

31. $y = x^2$; $P_0(1,1)$, $P_1(2,4)$

Para o ponto $P_0(1,1)$ temos:

$f(x,y) = x^2 - y$

$\nabla f = 2x\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}\,t = (1,1) + (2,-1)t = (1+2t)\vec{i} + (1-t)\vec{j}$

Assim,

$x = 1 + 2t$

$y = 1 - t \Rightarrow t = 1 - y \Rightarrow x = 1 + 2(1-y)$

$x = 1 + 2 - 2y$

$x + 2y - 3 = 0$

Para o ponto $P_1(2,4)$ temos:

$\nabla f(2,4) = 2.2\vec{i} - \vec{j} = 4\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{r}(t) = (2,4) + (4,-1)t = (2+4t)\vec{i} + (4-t)\vec{j}$

Assim,

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 - t \Rightarrow t = 4 - y \end{cases}$$

Assim,

$x = 2 + 4(4-y) \Rightarrow x = 2 + 16 - 4y \Rightarrow x + 4y - 18 = 0.$

32. $x^2 - y^2 = 1$; $P_0(\sqrt{2},1)$

Temos:

$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$

$\nabla f = 2x\vec{i} - 2y\,\vec{j}$

$\nabla f\left(\sqrt{2},1\right) = 2\sqrt{2}\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$

$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2},1\right) + \left(2\sqrt{2},-2\right)t$

$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}t\right)\vec{i} + (1-2t)\vec{j}$

Assim,

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}t \\ y = 1 - 2t \Rightarrow 2t = 1 - y \Rightarrow t = \dfrac{1-y}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$x = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,.\dfrac{1-y}{2}$

$x = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}y$

$x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$

33. $x - y^2 = -4$; $P_0(-3,1)$

Temos:

$f(x,y) = x - y^2 + 4$

$\nabla f = \vec{i} - 2y\,\vec{j}$

$\nabla f(-3,1) = (1,-2)$

$\vec{r}(t) = (-3,1) + (1,-2)t$

$\vec{r}(t) = (-3+t)\vec{i} + (1-2t)\vec{j}$

Assim,

$\begin{cases} x = -3 + t \Rightarrow t = x + 3 \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

$y = 1 - 2(x+3)$

$y = 1 - 2x - 6$

$2x + y + 5 = 0$.

34. $x + y = 4$; $P_0(3,1)$

Temos:

$f(x,y) = x + y - 4$

$\nabla f = \vec{i} + \vec{j}$

$\nabla f(3,1) = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{r}(t) = (3,1) + (1,1)t$

$\vec{r}(t) = (3+t)\vec{i} + (1+t)\,\vec{j}$

Assim,

$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \Rightarrow t = y - 1 \end{cases}$

$x = 3 + y - 1$

$x - y - 2 = 0.$

35. $x^2 + y^2 = 4$; $P_0(2,0)$

Temos:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$
$\nabla f(2,0) = (4,0)$
$\vec{r}(t) = (2,0) + (4,0)t$
$\vec{r}(t) = (2+4t, 0)$
Assim,
$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 0 \end{cases}$
$y = 0$.

Nos exercícios de 36 a 40, determinar uma equação vetorial para a reta normal à superfície dada, nos pontos indicados:

36. $z = x^2 + y^2 - 1 \quad ; \quad P_0(1,1,1)$

Temos:
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 - z$
$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$
$\nabla f(1,1,1) = (2, 2, -1)$
$\vec{r}(t) = (1,1,1) + (2,2,-1)t$
$= (1+2t)\vec{i} + (1+2t)\vec{j} + (1-t)\vec{t}$
ou
$(1-2t)\vec{i} + (1-2t)\vec{j} + (1+t)\vec{k}$

37. $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad ; \quad P_0 = (1,1,\sqrt{2}), \ P_1 = (1,1,-\sqrt{2})$

Temos:
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$
$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$
$\nabla f(1,1,\sqrt{2}) = (2,2,2\sqrt{2})$
$\vec{r}(t) = (1,1,\sqrt{2}) + (2,2,2\sqrt{2})t$
$= (1+2t)\vec{i} + (1+2t)\vec{j} + (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}t)\vec{k}$

$\nabla f(1,1,-\sqrt{2}) = (2,2,-2\sqrt{2})$
$\vec{r}(t) = (1,1,-\sqrt{2}) + (2,2,-2\sqrt{2})t$
$= (1+2t)\vec{i} + (1+2t)\vec{j} + (-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}t)\vec{k}$

38. $x^2 + y^2 = z^2 \quad ; \quad P_0 = (3,4,5)$

Temos:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$$\nabla f(3,4,5) = (6,8,-10)$$

$$\vec{r}(t) = (3,4,5) + (6,8,-10)t$$

$$= (3+6t)\vec{i} + (4+8t)\vec{j} + (5-10t)\vec{k}$$

39. $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \quad ; \quad P_0(1,2,-3)$

Temos:

$$f(x,y,z) = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1$$

$$\nabla f = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\nabla f(1,2,-3) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{r}(t) = (1,2,-3) + \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)t$$

$$= (1+t)\vec{i} + \left(2 + \frac{1}{2}t\right)\vec{j} + \left(-3 + \frac{1}{3}t\right)\vec{k}$$

40. $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \quad ; \quad P_0 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Temos:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 1$$

$$\nabla f = \frac{2x}{4}\vec{i} + 2y\vec{j} + \frac{2z}{9}\vec{k}$$

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\vec{r}(t) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(0,1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)t$$

$$= \left(\frac{1}{2} + t\right)\vec{j} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\vec{k}$$

41. Calcular $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ na direção $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 \quad ; \quad (x_0, y_0) = (1,2)$

Temos:

$grad\ f = 6x\,\vec{i} - 4y\,\vec{j}$

$grad\ f(1,2) = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

O vetor unitário na direção dada é $\vec{b} = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right).(6,-8)$$

$$= \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}.$$

b) $f(x, y) = e^{xy} \quad ; \quad (x_0, y_0) = (-1,2)$

Temos:

$gradf = ye^{xy}\vec{i} + xe^{xy}\vec{j}$

$gradf(-1,2) = 2e^{-2}\vec{i} - 1e^{-2}\vec{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(-1,2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right).\left(2e^{-2}, -e^{-2}\right)$$

$$= \frac{4}{e^2\sqrt{5}} + \frac{1}{e^2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}e^2} = \frac{\sqrt{5}}{e^2} = \sqrt{5}e^{-2}.$$

c) $f(x, y) = \frac{x+y}{1-x} \quad ; \quad (x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Temos:

$$gradf = \frac{(1-x)1-(x+y)(-1)}{(1-x)^2}\vec{i} + \frac{(1-x)1-(x+y)\cdot 0}{(1-x)^2}\vec{j}$$

$$= \frac{1-x+x+y}{(1-x)^2}\vec{i} + \frac{1-x}{(1-x)^2}\vec{j}$$

$$= \frac{1+y}{(1-x)^2}\vec{i} + \frac{1-x}{(1-x)^2}\vec{j}.$$

$$gradf\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3}{2},1\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

42. Calcular as derivadas direcionais das seguintes funções nos pontos e direções indicados:

a) $f(x,y) = e^{-x}\cos y$ em (0,0) na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo positivo dos *x*, no sentido anti-horário.

Temos:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{b} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\nabla f = \left(-e^{-x}\cos y, -e^{-x} seny\right)$$

$$\nabla f(0,0) = (-1.1,0) = (-1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.(-1,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.(-1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

b) $f(x,y,z) = 4x^2 - 3y^2 + z$ em (-1,2,3) na direção da normal exterior à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, no ponto $P(1,1,\sqrt{2})$.

Temos:

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$

$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla F\left(1,1,\sqrt{2}\right) = \left(2,2,2\sqrt{2}\right)$

$\vec{a} = \left(2,2,2\sqrt{2}\right)$

$$b = \frac{\left(2,2,2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{4+4+8}} = \frac{\left(2,2,2\sqrt{2}\right)}{4} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\nabla f = (8x, -6y, 1)$

$\nabla f(-1,2,3) = (-8,-12,1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s}(-1,2,3) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).(-8,-12,1)\\ &= \frac{-8}{2} - \frac{12}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{-20+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Nos exercícios de 43 a 47, determinar a derivada direcional da função dada:

43. $f(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + z$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\vec{b} = \frac{(1,2,2,)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{(1,2,2)}{3}$$

$\nabla f = (6x, 8y, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{(1,2,2)}{3}.(6x,8y,1)\\ &= \frac{6x+16y+2}{3}\\ &= 2x + \frac{16}{3}y + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

44. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, na direção de máximo crescimento de f.

Temos:

$$\nabla f = (y+z, x+z, x+y)$$

$$\vec{b} = \frac{(y+z, x+z, x+y)}{\sqrt{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,y) = \frac{(y+z, x+z, x+y)}{\sqrt{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2}}.(y+z, x+z, x+y)$$

$$= \frac{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2}{\sqrt{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2}}$$

$$= \left[(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 2xz + 2xy\right]^{\frac{1}{2}} = |\nabla f|.$$

45. $f(x,y) = x^2 + y^2$, na direção da semi-reta $y - x = 4, x \geq 0$.

Temos:

$$\vec{b} = \frac{(1,5)-(0,4)}{\sqrt{2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,y) = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.(2x,2y) = \frac{2x+2y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y.$$

46. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, na direção de máximo decrescimento de *f*.

Temos:

$$\nabla f = (-2x, -2y)$$

$$\vec{b} = \frac{(2x,2y)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.(-2x,-2y)$$

$$=\frac{-2x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=-2\sqrt{x^2+y^2}.$$

47. $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$, na direção do vetor $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Temos:

$$\vec{b}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$\nabla f=\left[\frac{1}{2}(1-x^2-y^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x),\frac{1}{2}(1-x^2-y^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2y),\frac{1}{2}(1-x^2-y^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2z)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{-z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

$$=\frac{-x-y-z}{\sqrt{3(1-x^2-y^2-z^2)}}.$$

48. A derivada direcional da função $w=f(x,y)$ em $P_0(1,1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$, $P_1(1,2)$ é 2, e na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, $P_2(2,0)$ é 4. Quanto vale $\frac{\partial w}{\partial s}$ em P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{P_00}$, onde 0 é a origem?

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(1,2)-(1,1)=(0,1)$$

$$\vec{b}=\frac{(0,1)}{\sqrt{1}}=(0,1)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2}=(2,0)-(1,1)=(1,-1)$$

$$\vec{b}=\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial s}=\nabla f(1,1).(0,1)=2\\ \frac{\partial w}{\partial s}=\nabla f(1,1).\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\end{cases}$$

$\overrightarrow{P_0 0} = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$

$\vec{b} = \dfrac{(-1,-1)}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\partial w}{\partial s} = \nabla f(1,1).\dfrac{(-1,-1)}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} (a,b).(0,1) = 2 \\ (a,b).\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4\right) \end{cases}$$

Da primeira expressão temos que $b = 2$. Da segunda temos que:

$\dfrac{a}{\sqrt{2}} - \dfrac{b}{\sqrt{2}} = 4 \therefore \dfrac{a}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 4$

$\dfrac{a}{\sqrt{2}} = 4 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$a = 4\sqrt{2} + 2$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \left(2 + 4\sqrt{2}, 2\right).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{2+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2.\frac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-2-4\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \\ &= \quad -2\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

49. Em que direção devemos nos deslocar partindo de $Q(1,1,0)$ para obtermos a taxa de maior decréscimo da função $f(x,y) = (2x+y-2)^2 + (5x-2y)^2$?

$$\begin{aligned} \nabla f &= \big(2(2x+y-2).2 + 2(5x-2y).5, 2(2x+y-2) + 2(5x-2y)(-2)\big) \\ &= (8x+4y-8+50x-20y, 4x+2y-4-20x+8y) \\ &= (58x-16y-8, -16x+10y-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1,0) &= (58-16-8, -16+10-4) \\ &= (34,-10) \end{aligned}$$

A direção solicitada é dada por $-\nabla f(Q) = (-34,10)$.

50. Em que direção a derivada direcional de $f(x,y)=2xy-x^2$ no ponto $(1,1)$ é nula?

$\nabla f = (2y-2x, 2x)$

$\nabla f(1,1)=(0,2)$

$\frac{\partial f}{\partial s}(1,1)=\vec{b}.(0,2)=0$

$=(a,b).(0,2)=0$

$=a.0+b.2=0$

$2b=0$

$b=0$

$a\in\Re$

Como $\vec{b}$ é unitário, $a=1$ ou $a=-1$.

Assim, a derivada direcional é nula na direção do vetor $(a,0)$ $a\in\Re$ -$\{0\}$.

51. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? Em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x,y)=2x^2+xy+2y^2$ em $(1,1)$

Temos:

$\nabla f = (4x+y, x+4y)$

$\nabla f(1,1)=(5,5)\rightarrow$ direção de máximo crescimento

$-\nabla f(1,1)=(-5,-5)\rightarrow$ direção de máximo decrescimento

b) $f(x,y)=e^{xy}$ em $(2,-1)$

Temos:

$\nabla f = \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right)$

$\nabla f(2,-1)=\left(-e^{-2}, 2e^{-2}\right)\rightarrow$ direção de máximo crescimento

$-\nabla f(2,-1)=\left(e^{-2}, -2e^{-2}\right)\rightarrow$ direção de máximo decrescimento

52. Determinar os dois vetores unitários para os quais a derivada direcional de f no ponto dado é zero.

a) $f(x,y)=x^3y^3-xy, P(10,10)$

Temos:

$$\nabla f = \left(3x^2y^3 - y,\ 3y^2x^3 - x\right)$$

$$\nabla f(10,10) = \left(3.10^2.10^3 - 10,\ 3.10^2.10^3 - 10\right)$$

$$= \left(3.10^5 - 10,\ 3.10^5 - 10\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(10,10) = \vec{b}.\left(3.10^5 - 10,\ 3.10^5 - 10\right) = 0$$

Assim,

$$a.\left(3.10^5 - 10\right) + b.\left(3.10^5 - 10\right) = 0$$

$$\left(3.10^5 - 10\right)\left(a + b\right) = 0$$

$$a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$\left|\vec{b}\right| = 1 \Rightarrow \left|\vec{b}\right|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dessa forma temos:

$$\vec{b} = \pm\frac{(a, -a)}{\sqrt{2a^2}} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}, P(3,2)$

Temos:

$$\nabla f = \left(\frac{(x+y) - x}{(x+y)^2}, \frac{-x}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{y}{(x+y)^2}, \frac{-x}{(x+y)^2}\right)$$

$$\nabla f(3,2) = \left(\frac{2}{25}, \frac{-3}{25}\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(3,2) = \vec{b}.\left(\frac{2}{25}, \frac{-3}{25}\right)$$

$$a.\frac{2}{25} + b.\frac{-3}{25} = 0$$

$$2a - 3b = 0$$

$$2a = 3b$$

$$a = \frac{3b}{2}$$

$$\left|\vec{b}\right| = 1 \Rightarrow \left|\vec{b}\right|^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4}b^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Dessa forma:

$$\vec{b} = \pm \frac{(3b/2, b)}{\sqrt{\frac{9b^2}{4} + b^2}} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

c) $f(x, y) = e^{2x+y}, P(1,0)$

Temos:

$\nabla f = \left(e^{2x+y}.2, e^{2x+y}\right)$

$\nabla f(1,0) = \left(2e^2, e^2\right)$

Assim,

$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0) = 0$

$(a,b).\left(2e^2, e^2\right) = 0$

$2ae^2 + e^2.b = 0$

$2a + b = 0$

$b = -2a$

$\left|\vec{b}\right| = 1 \Rightarrow \left|\vec{b}\right|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Dessa forma,

$\vec{b} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$

53. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, derivada direcional igual a $\frac{2}{5}$ na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a $\frac{11}{5}$ na direção $4\vec{i} - 3j$ .Calcular:

a) $\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(3,4)}{\sqrt{25}}.\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{5} \\ \frac{\partial f}{\partial s}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(4,-3)}{5}.\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{5} \end{cases}$$

Seja $\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (a,b)$. Temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}.a+\frac{4}{5}.b=\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5}.a-\frac{3}{5}.b=\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+4b=2 \\ 4a-3b=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a+16b=8 \\ -12a+9b=-33 \end{cases}$$

$25b=-25$

$b=-1$

$3a=2+4$

$3a=6 \therefore a=2$

Assim, $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=(2,-1)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial s}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ na direção $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial s}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.(2,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.2-\frac{1}{\sqrt{2}}.1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

54. Determinar a derivada direcional da função $z=\frac{(y-1)^2}{x}$ no ponto $P_0\left(1,\sqrt{2}\right)$ na direção da normal à elipse $2x^2+3y^2=8$ no ponto P_0.

Seja $F(x,y)=2x^2+3y^2-8$. A direção normal à elipse é dada por:

$\nabla F=(4x,6y)$

$\nabla F\left(1,\sqrt{2}\right)=\left(4,6\sqrt{2}\right)$

$$\vec{b}=\frac{\left(4,6\sqrt{2}\right)}{\sqrt{16+36.2}}=\frac{\left(4,6\sqrt{2}\right)}{\sqrt{88}}=\frac{\left(4,6\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{22}}=\frac{\left(2,3\sqrt{2}\right)}{\sqrt{22}}$$

Para determinar a derivada direcional temos:

$$\nabla z = \left(\frac{-(y-1)^2}{x^2}, \frac{2(y-1)}{x} \right)$$

$$\nabla z\left(1, \sqrt{2}\right) = \left(\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}, \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}\left(1, \sqrt{2}\right) = \frac{\left(2, 3\sqrt{2}\right)}{\sqrt{22}} . \left(-\left(\sqrt{2}-1\right)^2, 2\sqrt{2}-2 \right) = \frac{-2}{\sqrt{22}} . \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{22}} . \left(2\sqrt{2}-2\right)$$

$$= \frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{22}}.$$

Nos exercícios 55 a 58, encontrar o valor máximo da derivada direcional do campo escalar dado, nos pontos indicados:

55. $f(x,y) = xy^2 - (y-x)^2; P_0(1,1)$

Temos:

$$\nabla f = \left(y^2 + 2(y-x), 2xy - 2(y-x)\right)$$

$$\nabla f(1,1) = (1+0,2) = (1,2).$$

$$máx \frac{\partial f}{\partial s}(1,1) = |\nabla f(1,1)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

56. $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + z^2; P_0 = (0,0,0) \; e \; P_1 = (1,2,2).$

Temos:

$$\nabla f = (2x+2y, 2x, 2z)$$

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$\nabla f(1,2,2) = (2+4, 2, 4) = (6,2,4)$$

$$máx \frac{\partial f}{\partial s}(0,0,0) = |\nabla f(0,0,0)| = 0$$

$$máx \frac{\partial f}{\partial s}(1,2,2) = |\nabla f(1,2,2)| = \sqrt{36+4+16} = 2\sqrt{14}.$$

57. $f(x,y,z) = \cos x + seny; P_0(x,y,z)$

Temos:

$$\nabla f = (-senx, \cos y, 0)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (-senx, \cos y, 0)$$

$$máx\frac{\partial f}{\partial s}(x,y,z)=\left|(-senx,\cos y,0)\right|=\sqrt{sen^2 x+\cos^2 y}.$$

58. $f(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x}; P_0(-1,1)$.

Temos:

$$\nabla f=\left(\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}},\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$$

$$\nabla f(-1,1)=\left(\frac{\frac{-1}{1}}{1+1},\frac{\frac{1}{-1}}{1+1}\right)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right).$$

$$máx\frac{\partial f}{\partial s}(-1,1)=\left|\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

59. Dada a função $w=x^2+y^2+z^2$, determinar sua derivada direcional no ponto $P(1,1,\sqrt{2})$ na direção da normal exterior à superfície $z^2=x^2+y^2$ em P.

Para obtermos a normal exterior à superfície $z^2=x^2+y^2$, tomamos:

$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

$\nabla f=(2x,2y,-2z)$

$\nabla f(1,1,\sqrt{2})=(2,2,-2\sqrt{2})$

Para $w=x^2+y^2+z^2$ temos:

$\nabla w=(2x,2y,2z)$

$\nabla w(1,1,\sqrt{2})=(2,2,2\sqrt{2})$

Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial s}=(2,2,2\sqrt{2}).\frac{(2,2,-2\sqrt{2})}{\sqrt{4+4+8}}=\frac{4+4-8}{\sqrt{16}}=\frac{0}{4}=0.$$

60. Suponha que $T(x,y)=4-2x^2-2y^2$, represente uma distribuição de temperatura no plano *xy*. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca a partir de (1,2), sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

Temos:

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \rightarrow trajetória\ do\ ponto\ P.$

$\vec{r}\,'(t) = gradT(\vec{r}\,(t))$

Assim,

$\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = (-4x(t), -4y(t))$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x \\ \dfrac{dy}{dt} = -4y \end{cases}$$

Temos:

$\int \dfrac{dx}{x} = \int -4dt$

$\ln x = -4t + C$

$x = C_1 e^{-4t}$

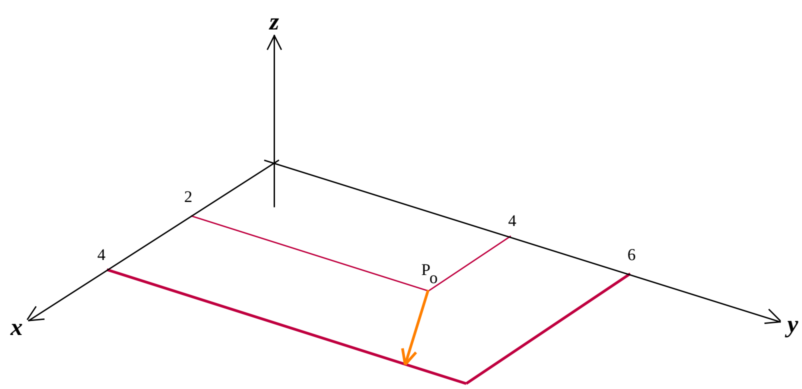
Assim, $x = C_1 e^{-4t}$ e $y = C_2 e^{-4t}$.

Para particularizar C_1 e C_2, temos que para $t = 0, P_0(1,2)$. Dessa forma obtemos $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$.

A trajetória é dada por:

$\vec{r}(t) = (e^{-4t}, 2e^{-4t});\quad t \geq 0$.

61. A figura 6.24 mostra uma plataforma retangular, cuja temperatura em cada ponto é dada por $T(x, y) = 2x + y$. Um indivíduo encontra-se no ponto P_0 desta plataforma e necessita esquentar-se o mais rápido possível. Determinar a trajetória (obter uma equação) que o indivíduo deve seguir esboçando-a sobre a plataforma.



Temos:

$T(x, y) = 2x + y$

$\nabla T = (2,1)$

$\vec{r}\,'(t) = gradT(\vec{r}(t))$

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(2,1)$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2\\ \dfrac{dy}{dt}=1\end{cases}$$

Temos

$x=2t+C_1$ e $y=t+C_2$. Particularizando as constantes vem:

$x=2t+2$ e $y=t+4$

Portanto:

$\vec{r}(t)=(2t+2,t+4)\to 0\le t\le 1$.

62. Uma plataforma retangular é representada no plano *xy* por $0\le x\le 15 \quad e \quad 0\le y\le 10$. A temperatura nos pontos da plataforma é dada por
63. $T(x,y)=x+3y$. Suponhamos que duas partículas P_1 e P_2 estejam localizadas nos pontos (1,1) e (3,7), respectivamente.

a) Se a partícula P_1 se deslocar na direção em que se esquentará mais rapidamente e a partícula P_2 se deslocar na direção em que se esfriará mais rapidamente, elas se encontrarão?
b) Obter uma equação para a trajetória da partícula P_1, representando-a sobre a plataforma.

Temos:

$T=(x+3y)$

$\nabla T=(1,3)$

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$

$\vec{r}'(t)=gradT(\vec{r}(t))$

Considerando-se a partícula P_1 temos:

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(1,3)$$

$\dfrac{dx}{dt}=1$ e $\dfrac{dy}{dt}=3$

Temos:

$x=t+C_1$ e $y=3t+C_2$

Particularizando as constantes vem: $x=t+1$ e $y=3t+1$.

Assim a trajetória é dada por $(t+1,3t+1),0\le t\le 3$.

Considerando-se a partícula P_2 temos:

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(-1,-3)$$

$$\frac{dx}{dt}=-1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt}=-3$$

Temos:

$$x=-t+C_1 \quad \text{e} \quad y=-3t+C_2$$

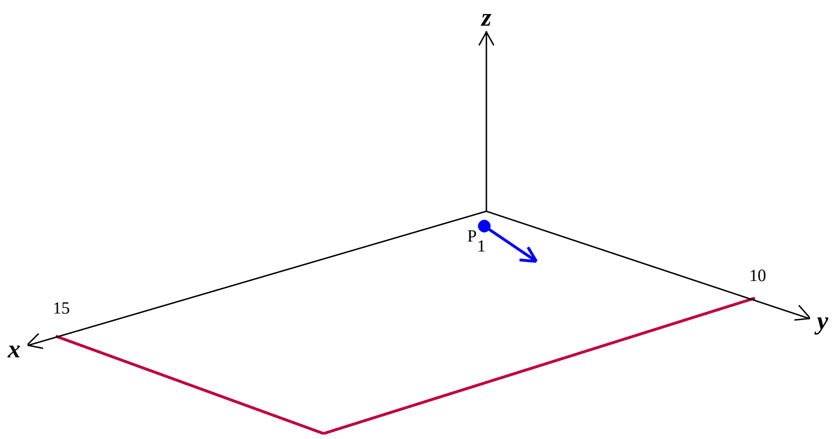
Particularizando as constantes vem: $x=-t+3$ e $y=-3t+7$.

Assim a trajetória é dada por $(-t+3,-3t+7)$.

Dessa forma temos as conclusões para os itens dado:

a) As duas trajetórias estão sobre a mesma reta $y=3x-2$ no plano *xy*. Como elas estão em sentido contrários se encontrarão.

b) A equação para a trajetória P_1 é dada por $(t+1,3t+1)$, $0\le t\le 3$ e está representada na figura que segue.



64. Resolver o exercício 62 supondo que a temperatura seja dada por

$$T(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-100 .$$

Temos:

$$T(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-100$$

$$\nabla T=(x,y)$$

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$$

$$\vec{r}'(t)=gradT(\vec{r}(t))$$

Considerando-se a partícula P_1 temos:

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

Resolvendo obtemos:

$x = C_1 e^t \quad e \quad y = C_2 e^t$

Particularizando as constantes vem: $x = e^t \quad e \quad y = e^t$

Assim a trajetória é dada por $y = x$ para $x \in [0,10]$.

Considerando-se a partícula P_2 temos:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-x, -y)$$

Obtemos:

$x = C_1 e^{-t} \quad e \quad y = C_2 e^{-t}$

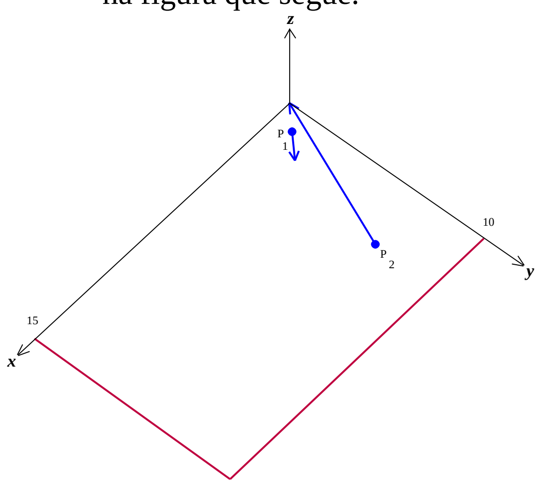
Particularizando as constantes vem $x = 3e^{-t} \quad e \quad y = 7e^{-t}$

Assim a trajetória é dada por $y = \dfrac{7}{3}x$.

Dessa forma temos as conclusões para os itens dados:

a) As trajetórias estão sobre duas retas distintas que se interceptam na origem. Como pode ser observado na figura apresentada a seguir, as trajetórias não se encontrarão.

b) A equação para a trajetória P_1 é dada por $y = x$ para $x \in [0,10]$ e está representada na figura que segue.



65. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula $\rho = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$. Encontrar a razão de variação de densidade no ponto (1,2) na direção que forma um ângulo de 45° no sentido anti-horário, com o eixo positivo dos x. Em que direção, a razão de variação é máxima?

Temos:

$$\rho = 4\left(x^2 + y^2 + 2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\rho = \left[4.\frac{-1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2\right)^{-\frac{3}{2}}.2x, 4.-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2\right)^{-\frac{3}{2}}.2y\right]$$

$$\nabla\rho(1,2) = \left(-4(1+4+2)^{-\frac{3}{2}}.1, -4(1+4+2)^{-\frac{3}{2}}.2\right) = \left(\frac{-4}{7\sqrt{7}}, \frac{-8}{7\sqrt{7}}\right)$$

Para a direção considerada (forma um ângulo de 45°) temos:

$$\vec{b} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$$

Assim,

$$\frac{\partial\rho}{\partial s} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.\left(\frac{-4}{7\sqrt{7}}, \frac{-8}{7\sqrt{7}}\right) = \frac{-4-8}{7\sqrt{14}} = \frac{-6\sqrt{14}}{49}.$$

A razão de variação é máxima na direção $\left(\frac{-4}{7\sqrt{7}}, \frac{-8}{7\sqrt{7}}\right)$ e o seu valor é $\frac{-6\sqrt{14}}{49}$.

66. Usando o gradiente, encontrar uma equação para a reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$, no ponto $\left(\sqrt{2},1\right)$.

$$\nabla f\left(P_0\right).\left[\vec{r} - \vec{r}_0\right] = 0$$

$$\nabla f\left(\sqrt{2},1\right).\left((x,y) - \left(\sqrt{2},1\right)\right) = 0$$

$$\left(2\sqrt{2},-2\right).\left(x-\sqrt{2}, y-1\right) = 0$$

$$2\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right) - 2\left(y-1\right) = 0$$

$$2\sqrt{2}x - 4 - 2y + 2 = 0$$

$$\sqrt{2}x - y - 1 = 0$$

67. Encontrar o vetor intensidade elétrica $\vec{E} = -gradV$ a partir da função potencial V, no ponto indicado.

a) $V = 2x^2 + 2y^2 - z^2; P(2,2,2)$.

Temos:

$$gradV = (4x, 4y, -2z)$$

$$gradV(2,2,2) = (8,8,-4)$$

$$\vec{E} = (-8,-8,4).$$

b) $V = e^y \cos x; P\left(\dfrac{\pi}{2},0,0\right)$.

Temos:

$$gradV = \left(-e^y senx, e^y \cos x\right)$$

$$gradV\left(\frac{\pi}{2},0,0\right) = \left(-e^0.sen\frac{\pi}{2}, e^0 \cos\frac{\pi}{2}, 0\right) = (-1,0,0)$$

$$\vec{E} = (1,0,0).$$

c) $V = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}; P(1,2,-2)$.

$$gradV = \left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2x, -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2y, -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2z\right)$$

$$gradV(1,1,-2) = \left(\frac{-1}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{2}{27}\right)$$

$$\vec{E} = (1/27, 2/27, -2/27).$$

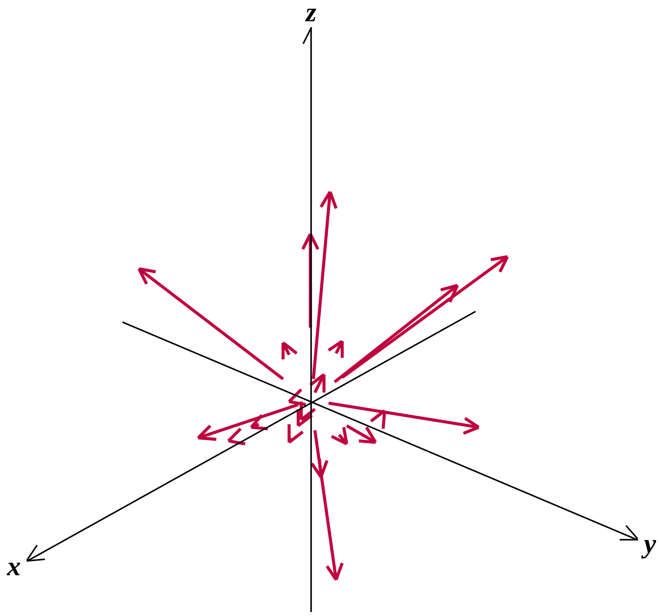
68. Um potencial elétrico é dado por $V = \dfrac{10}{x^2+y^2+z^2}$. Determinar o campo elétrico representando-o graficamente.

$$gradV = \left(\frac{-10.2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \frac{-10.2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \frac{-10.2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)$$

$$E = \left(\frac{20x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \frac{20y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \frac{20z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{20}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}(x,y,z)$$

Ver representação gráfica a seguir.


z
x
y

CAPÍTULO 6
6.10 - EXERCÍCIOS
pág. 227 -228

1. Dado o campo vetorial $\vec{f}$, calcular $div\vec{f}$.

a) $\vec{f}(x,y) = 2x^4\vec{i} + e^{xy}\vec{j}$
$div\vec{f} = 8x^3 + xe^{xy}$

b) $\vec{f}(x,y) = sen^2 x\,\vec{i} + 2\cos x\,\vec{j}$
$div\vec{f} = 2\,senx\cos x$

c) $\vec{f}(x,y,z) = 2x^2y^2\,\vec{i} + 3xyz\,\vec{j} + y^2z\,\vec{k}$
$div\vec{f} = 4xy^2 + 3xz + y^2$

d) $\vec{f}(x,y,z) = \ln xy\,\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$
$div\vec{f} = \dfrac{y}{xy} + 0 + 1 = \dfrac{1}{x} + 1$.

2. Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ dada. Verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

a) $\vec{v} = z^2\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$
$div\,\vec{v} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow É\ incompressível.$

b) $\vec{v} = 2\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$
$div\vec{v} = 0 \Rightarrow É\ incompressível.$

c) $\vec{v} = 2xy\,\vec{i} + x\,\vec{j}$
$div\vec{v} = 2y \Rightarrow não\ é\ incompressível.$

3. Provar a propriedade (a) da Subseção 6.7.3.

a) $div\left(\vec{f} \pm \vec{g}\right) = div\vec{f} \pm div\vec{g}$
Seja:

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$
$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$
Temos:
$\vec{f} \pm \vec{g} = (f_1 \pm g_1, f_2 \pm g_2, f_3 \pm g_3)$

$$\begin{aligned} div(\vec{f} \pm \vec{g}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_1 \pm g_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f_2 \pm g_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f_3 \pm g_3) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \pm \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \pm \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \pm \frac{\partial g_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) \\ &= div\ \vec{f} \pm div\,\vec{g}. \end{aligned}$$

4. Encontrar a divergência e o rotacional do campo vetorial dado.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + 4z, y - z, 3x - yz)$
$div\ \vec{f} = 2 + 1 - y = 3 - y$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{1} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + 4z & y - z & 3x - yz \end{vmatrix}$$

$rot\ \vec{f} = (1 - z)\vec{i} + (4 - 3)\,\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = (1 - z)\vec{i} + \vec{j}.$

b) $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$
$div\ \vec{f} = 2x - 2y = 2(x - y)$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & x^2 - y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$rot\ \vec{f} = (2x - 2y)\vec{k} = 2(x - y)\vec{k}.$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$
$div\ \vec{f} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z).$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}\,.$$

d) $\vec{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x sen\, y)$

$$div\ \vec{f} = e^x \cos y + e^x \cos y = 2e^x \cos y.$$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & e^x seny & 0 \end{vmatrix}$$

$$rot\ \vec{f} = \left(e^x seny + e^x seny\right)\vec{k} = 2e^x seny\vec{k}\,.$$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$

$$div\ \vec{f} = yz^3 + 6xy^2 - x^2y$$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz^3 & 2xy^3 & -x^2yz \end{vmatrix}$$

$$rot\ \vec{f} = -x^2z\,\vec{i} + \left(3xyz^2 + 2xyz\right)\vec{j} + \left(2y^3 - xz^3\right)\vec{k}\,.$$

f) $\vec{f}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), (x, y) \neq (0,0).$

$$div\ \vec{f} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}.0 + y.\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x}{x^2+y^2} + \frac{-x.\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 0$$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$rot\,\vec{f} = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x.\frac{1}{x}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x}{\left(x^2+y^2\right)} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}(-1) - (-y)\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2y}{x^2+y^2} \right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} - \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{-x^2-y^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\vec{k}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\vec{k}$$

$$= \frac{\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

g) $\vec{f}(x,y,z) = xy^2z\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

$div\,\vec{f} = y^2z + 4xyz + 3xy^2.$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & 2xy^2z & 3xy^2z \end{vmatrix}$$

$rot\,\vec{f} = \left(6xyz - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(xy^2 - 3y^2z\right)\vec{j} + \left(2y^2z - 2xyz\right)\vec{k}.$

5. Determinar $rot\,\vec{f}$ sendo:

a) $\vec{f} = senxy\,\vec{i} + \cos xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ senxy & \cos xy & z \end{vmatrix}$$

$rot\,\vec{f} = (-\,ysenxy - x\cos xy)\vec{k}.$

b) $\vec{f} = 2x^2y\,\vec{i} + 3xz\,\vec{j} - y\,\vec{k}$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 3xz & -y \end{vmatrix}$$

$$rot\,\vec{f} = (-1-3x)\vec{i} + (3z-2x^2)\vec{k}.$$

c) $\vec{f} = (x+y)\vec{i} + \ln z\,\vec{k}$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & 0 & -\ln z \end{vmatrix} = -\vec{k}.$$

6. Provar a propriedade (a) da Subseção 6.8.3.

$$rot(\vec{f}+\vec{g}) = rot\,\vec{f} + rot\,\vec{g}$$

Seja:

$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$$
$$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$$

$$\vec{f}+\vec{g} = (f_1+g_1, f_2+g_2, f_3+g_3)$$

$$rot(\vec{f}+\vec{g}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1+g_1 & f_2+g_2 & f_3+g_3 \end{vmatrix}$$

$$rot(\vec{f}+\vec{g}) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(f_3+g_3) - \frac{\partial}{\partial z}(f_2+g_2)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(f_1+g_1) - \frac{\partial}{\partial x}(f_3+g_3)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(f_2+g_2) - \frac{\partial}{\partial y}(f_1+g_1)\right]\vec{k}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}f_3 + \frac{\partial}{\partial y}g_3 - \frac{\partial}{\partial z}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}g_2\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}f_1 + \frac{\partial}{\partial z}g_1 - \frac{\partial}{\partial x}f_3 - \frac{\partial}{\partial x}g_3\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}f_2 + \frac{\partial}{\partial x}g_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1 - \frac{\partial}{\partial y}g_1\right]\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{2z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= rot\,\vec{f} + rot\,\vec{g}.$$

7. Sejam $\vec{f} = (xz, yz, xy)$ e $\vec{g} = (x^2, y^2, z^2)$. Determinar:

a) $\nabla.\vec{f}$

$$\nabla.\vec{f} = div\vec{f} = z + z + 0 = 2z$$

b) $\nabla.\vec{g}$

$$\nabla.\vec{g} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

c) $\nabla \times \vec{f}$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f} &= (x - y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (0)\vec{k} \\ &= (x - y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} \\ &= (x - y)[\vec{i} + \vec{j}] \end{aligned}$$

d) $\nabla \times \vec{g}$

$$\nabla \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

e) $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})$

$$\vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xz & yz & xy \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f} \times \vec{g} = (yz^3 - xy^3)\vec{i} + (x^3y - xz^3)\vec{j} + (xy^2z - x^2yz)\vec{k}\ .$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz^3 - xy^3 & x^3y - xz^3 & xy^2z - x^2yz \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (2xyz - x^2z + 3xz^2)\vec{i} + (3yz^2 - y^2z + 2xyz)\vec{j} + (3x^2y - 2z^3 + 3xy^2)\vec{k}\ .$$

f) $(\nabla \times \vec{f}) \times \vec{g}$

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)\times\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x-y & x-y & 0\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$$

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)\times\vec{g}=(x-y)z^2\,\vec{i}+z^2(y-x)\vec{j}+\left[y^2(x-y)-x^2(x-y)\right]\vec{k}\ .$$

g) $\left(\nabla\times\vec{f}\right)\cdot(\nabla\times\vec{g})$

$(x-y,x-y,0).(0,0,0)=0$.

8. Seja $\vec{u}=\left(x^2-y^2\right).\nabla f$. Calcular $div\,\vec{u}$ no ponto $P(1,2,3)$, sendo:

a) $f=senxy+x$

$\nabla f=(y\cos xy+1)\vec{i}+(x\cos xy)\vec{j}$

$\vec{u}=\left(x^2-y^2\right).\left[(y\cos xy+1)\vec{i}+(x\cos xy)\vec{j}\right]$

$$\begin{aligned}div\,\vec{u}&=\left(x^2-y^2\right)\left(-y^2senxy\right)+\left(y\cos xy+1\right)2x+\left(x^2-y^2\right)x^2\left(-senxy\right)+x\cos xy\left(-2y\right)\\&=-x^2y^2senxy+y^4senxy+2xy\cos xy+2x+\left(-x^4senxy\right)+x^2y^2senxy-2xy\cos xy\\&=y^4senxy+2x-x^4senxy\end{aligned}$$

No ponto P(1,2,3) temos:

$div\,\vec{u}=16sen2+2-sen2=15sen2+2.$

b) $f=xyz+2xy$

$\nabla f=(yz+2y)\vec{i}+(xz+2x)\vec{j}+xy\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\left(x^2-y^2\right)(yz+2y)\vec{i}+\left(x^2-y^2\right)(xz+2x)\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)xy\,\vec{k}\\&=\left(x^2yz+2x^2y-y^3z-2y^3\right)\vec{i}+\left(x^3z+2x^3-y^2xz-2xy^2\right)\vec{j}+\left(x^3y-xy^3\right)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}div\,\vec{u}&=(2xyz+4xy)+(-2yxz-4xy)+(0)\\&=0\end{aligned}$$

9. Se $f=2x^3yz$ e $\vec{v}=x^3\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+sen\,x\,\vec{k}$, calcular:

a) $(\nabla f)+rot\,\vec{v}$

$$\nabla f = 6x^2yz\,\vec{i} + 2x^3z\,\vec{j} + 2x^3y\,\vec{k}$$

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{2y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & xz & senx \end{vmatrix}$$

$$= -x\,\vec{i} - \cos x\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$(\nabla f) + rot\,\vec{v} = \left(6x^2yz - x\right)\vec{i} + \left(2x^3z - \cos x\right)\vec{j} + \left(2x^3y + z\right)\vec{k}$$

b) $div\left(f\vec{v}\right)$

$$f\vec{v} = \left(2x^3yz.x^3\right)\vec{i} + \left(2x^3yz.xz\right)\vec{j} + \left(2x^3yz.senx\right)\vec{k}$$
$$= 2x^6yz\vec{i} + 2x^4yz^2\,\vec{j} + 2x^3yz.senx\vec{k}$$

$$div\left(f\vec{v}\right) = 12x^5yz + 2x^4z^2 + 2x^3ysenx\,.$$

c) $rot\left(f\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^6yz & 2x^4yz^2 & 2x^3yzsenx \end{vmatrix}$

$$rot\left(f\vec{v}\right) = \left(2x^3zsenx - 4x^4yz\right)\vec{i} + \left(2x^6y - 6x^2yz.senx - 2x^3yz\cos x\right)\vec{j} + \left(8x^3yz^2 - 2x^6z\right)\vec{k}.$$

10- Sendo $\vec{u} = 2xz\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(x^2 + 2z\right)\vec{k}$, calcular $rot\left(rot\,\vec{u}\right)$

$$rot\,\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & x^2 - z^2 & x^2 + 2z \end{vmatrix}$$
$$= 2z\,\vec{i} + \left(2x - 2x\right)\vec{j} + \left(2x - 0\right)\vec{k}$$
$$= 2z\vec{i} + 2x\vec{k}.$$

$$rot\left(rot\,\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2z & 0 & 2x\end{vmatrix}$$
$$=\left(2-2\right)\vec{j}$$
$$=\vec{0}$$

11- Supondo que $\vec{v}$ representa a velocidade de um fluido em movimento, verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

a) $\vec{v}(x,y)=(2y-3)\vec{i}+x^2\vec{j}$
$div\,\vec{v}=0\Rightarrow é\,incompressível$

b) $\vec{v}(x,y,z)=(x,y,z)$
$div\,\vec{v}=1+1+1=3\Rightarrow não\,é\,incompressível$

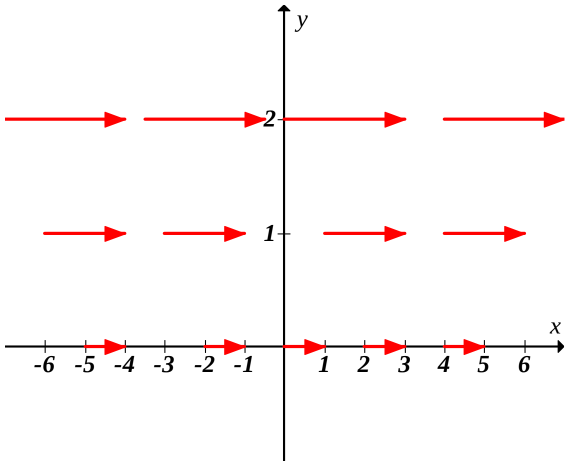
c) $\vec{v}(x,y,z)=(2x,-2y,0)$
$div\,\vec{v}=2-2=0\Rightarrow sim$

d) $\vec{v}(x,y)=(-y,x)$
$div\,\vec{v}=0\Rightarrow sim$

e) $\vec{v}(x,y,z)=(2xz,-2yz,2z)$
$div\,\vec{v}=2z-2z+2=2\Rightarrow não$

12- Um fluido escoa em movimento uniforme no domínio $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 8\}$. Se a velocidade em cada ponto é dada por $\vec{v}=(y+1)\vec{i}$, verificar que todas as partículas se deslocam em linha reta e que $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

$div\,\vec{v}=0\Rightarrow é\,incompressível$
Veja o gráfico que segue.



13. Verificar se as seguintes funções são harmônicas em algum domínio.

a) $f(x, y, z) = xz + \ln xy$

$div\ gradf = 0$?

$$\nabla f = \left(z + \frac{1}{x} \right)\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + x\vec{k}$$

$$div\ grad\ f = \nabla^2 f = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} \neq 0$$

Portanto não é harmônica.

b) $f(x, y) = 2(x^2 - y^2) + y + 10$

$\nabla f = 4x\vec{i} + (-4y + 1)\vec{j}$

$\nabla^2 f = 4 + (-4) = 0$

Portanto é harmônica em $\Re^2$.

c) $f(x, y) = sen x \cosh y$

$\nabla f = \cosh y . \cos x\,\vec{i} + sen\, x senh\, y\,\vec{j}$

$\nabla^2 f = -\cos h\, y . sen\, x + sen\, x \cosh y = 0.$

Portanto é harmônica em $\Re^2$.

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6 \neq 0.$

Portanto não é harmônica

e) $f(x,y,z)=x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$

$\nabla f=2x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$

$\nabla^2 f=2-1-1=0$

Portanto é harmônica em $\Re^3$.

f) $f(x,y,z)=x+y+z$

$\nabla f=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$\nabla^2 f=0.$

Portanto é harmônica em $\Re^3$.

g) $f(x,y)=e^x\cos y$

$\nabla f=e^x\cos y\,\vec{i}+e^x(-sen\,y)\vec{j}$

$\nabla^2 f=e^x\cos y+e^x(-\cos y)=0.$

Portanto é harmônica em $\Re^2$.

14. Verificar se o campo dado é irrotacional.

a) $\vec{f}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$

$$rot\,\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}$$

$$=(x-x)\vec{i}+(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}$$

$$=\vec{0}\Rightarrow Sim$$

b) $\vec{f}(x,y,z)=(xyz,2x-1,x^2z)$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 2x-1 & x^2z \end{vmatrix}$$

$$= (xy - 2xz)\vec{j} + (2 - xz)\vec{k} \Rightarrow Não$$

c) $\vec{f}(x,y,z) = \left(yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}\right)$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{vmatrix}$$

$$= \left(x^2yze^{xyz} + xe^{xyz} - x^2yze^{xyz} - xe^{xyz}\right)\vec{i} + \left(y^2xze^{xyz} + ye^{xyz} - y^2xze^{xyz} - ye^{xyz}\right)\vec{j}$$

$$\left(z^2xye^{xyz} + ze^{xyz} - z^2xye^{xyz} - ze^{xyz}\right)\vec{k} = 0 \Rightarrow Sim.$$

d) $\vec{f}(x,y,z) = (2x + \cos yz, -xz\,sen\,yz, -xy\,sen\,yz)$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x + \cos yz & -xz\,sen\,yz & -xy\,sen\,yz \end{vmatrix}$$

$$= 0 \Rightarrow Sim.$$

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{0} \Rightarrow Sim.$$

15- Um escoamento é representado pelo campo de velocidade

$\vec{v} = \left(y^2 + z^2\right)\vec{i} + xz\,\vec{j} + 2x^2y^2\,\vec{k}$.

Verificar se o escoamento é:

a) um possível escoamento incompressível;

b) irrotacional.

Para o item (a) temos que:

$div\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \acute{e}\ incompress\acute{\imath}vel$

Para o item (b) temos que:

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & xz & 2x^2y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(4x^2y - x\right)\vec{i} + \left(2z - 4xy^2\right)\vec{j} + \left(z - 2y\right)\vec{k} \Rightarrow N\tilde{a}o\ \acute{e}\ irrotacional.$$

16. Para um escoamento no plano *xy*, a componente em *x* da velocidade é dada por $2xy + x^2 + y^2$. Determinar uma possível componente em y para escoamento incompressível.

Temos:

$\vec{v} = \left(2xy + x^2 + y^2\right)\vec{i} + v_2\,\vec{j}$

$$div\,\vec{v} = 2y + 2x + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

Assim,

$$2y + 2x + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

$$v_2 = \int (-2y - 2x)dy + a(x)$$

$$v_2 = -2\frac{y^2}{2} - 2xy + a(x)$$

$$v_2 = -y^2 - 2xy + a(x)$$

Sendo que *a(x)* é uma função arbitrária.

17- Mostrar que se $f(x,y,z)$ é solução da equação da Laplace, ∇f é um campo vetorial que é, ao mesmo tempo, solenoidal e irrotacional.

Se $f(x,y,z)$ é solução da equação de Laplace, temos que $\nabla^2 f = 0$ ou $div(grad\ f) = 0$.

Para $f(x,y,z)$ podemos escrever que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Assim, pela hipótese dada temos que é solenoidal, pois $div(grad\ f) = 0$. Também é irrotacional, pois

$$rot(\nabla f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

18. Usando o teorema 6.9.3, o que se pode afirmar sobre o campo vetorial dado?

a) $\vec{f}(x,y) = (e^x sen\, y, e^x \cos y)$ em $\Re^2$

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x sen\, y & e^x \cos y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (e^x \cos y - e^x \cos y)\vec{k} = \vec{0}.$$

Podemos afirmar que $\vec{f}$ é um campo conservativo em $\Re^2$.

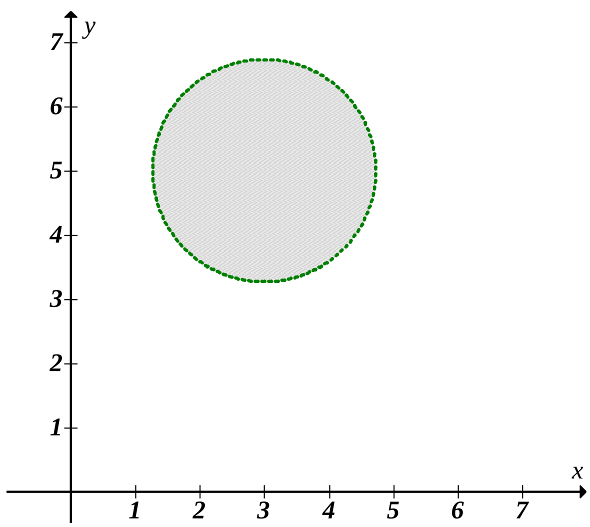
b) $\vec{f}(x,y)=\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$ em $D=\left\{(x,y)\,|\,(x-3)^2+(y-5)^2<3\right\}$

$$rot\ \vec{f}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(y.\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2x-x.\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2y\right)\vec{k}$$

$$=\vec{0}.$$

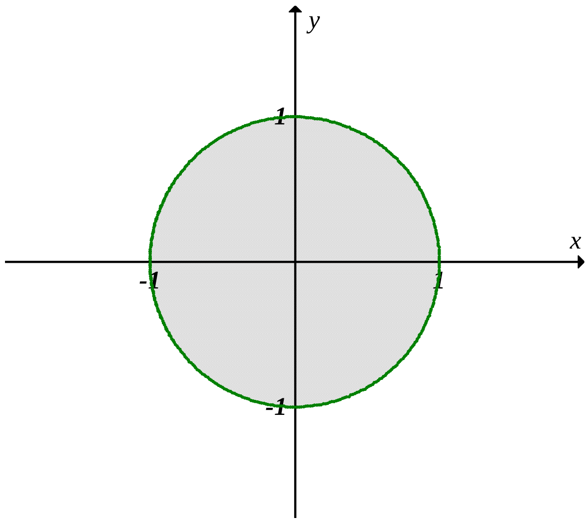
Analisando o domínio (ver figura a seguir), observamos que não contém a origem e é simplesmente conexo. Portanto, $\vec{f}$ é conservativo em D.



c) $\vec{f}(x,y)=\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$ em $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\right\}$

Temos que $rot\ \vec{f}=0$.

Analisando do domínio (ver figura a seguir) observamos que D contém $(0,0)$ e dessa forma $\vec{f}$ não é contínua em D. Portanto, $\vec{f}$ não é conservativo em D.



d) $\vec{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$

em $D=\{(x,y,z)\,|\,0<x^2+y^2+z^2<1\}$

Temos que:

$$rot\,\vec{f}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} & y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} & z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix}$$

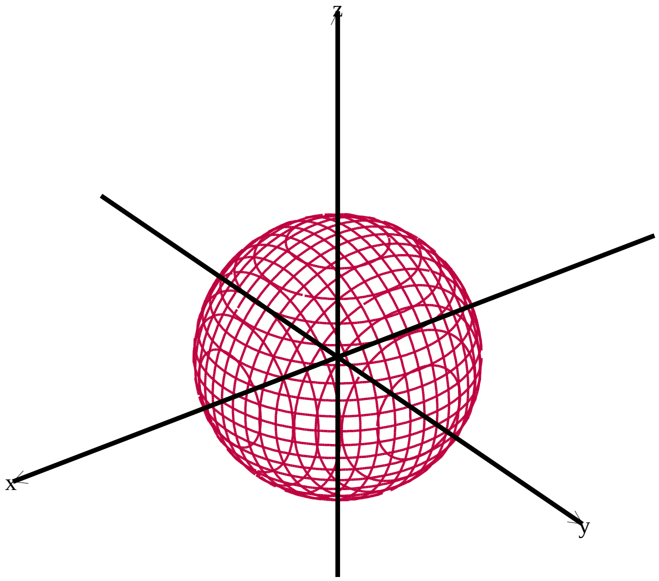
$$=\left(z.\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2y-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}z.\frac{-3}{2}\right)\vec{i}+$$

$$\left(x.\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2z-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}.\frac{-3}{2}.2x\right)\vec{j}$$

$$+\left(y.\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}.2x-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}.\frac{-3}{2}.2y\right)\vec{k}$$

$$=\vec{0}.$$

Analisando o domínio (ver figura a seguir), observamos que não contém a origem, sendo que D é simplesmente conexo. Portanto, $\vec{f}$ é conservativo em D.



e) $\vec{f}(x,y,z)=\left(x^2 sen\, y+z, y\cos y+1, z^2-xy\right) em\, \Re^3$

Temos:

$$rot\, \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 sen\, y+z & y\cos y+1 & z^2-xy \end{vmatrix}$$

$$= (-x-0)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + \left(0+x^2\cos y\right)\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Portanto, $\vec{f}$ não é conservativo em $\Re^3$.

f) $\vec{f}(x,y)=\left(x^2+y, y^2-x\right) em\, \Re^2$

Temos:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & y^2 - x & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1-1)\vec{k}$$
$$= -2\vec{k}.$$

Portanto, $\vec{f}$ não é conservativo em $\Re^2$.

g) $\vec{f}(x, y, z) = (-\,sen\,x + \cos x, z, y)\ em\,\Re^3$

Temos:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\,sen\,x + \cos x & z & y \end{vmatrix}$$
$$= (1-1)\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Portanto, $\vec{f}$ é conservativo em $\Re^3$.

h) $\vec{f}(x, y) = (sen\,x, \cos y)\ em\,\Re^2$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ sen\,x & \cos y & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{0}.$$

Portanto, $\vec{f}$ é conservativo em $\Re^2$.

19. Verificar se os seguintes campos vetoriais são conservativos em algum domínio. Em caso afirmativo, encontrar uma função potencial.

a) $\vec{f} = 2x\vec{i} + 5yz\,\vec{j} + x^2y^2z^2\,\vec{k}$

Temos:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 5yz & x^2y^2z^2 \end{vmatrix}$$
$$\neq \vec{0}$$

O campo não é conservativo.

b) $\vec{f} = (1 + ysenx)\vec{i} + (1 - \cos x)\vec{j}$

Temos:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 + ysenx & 1 - \cos x & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (senx - senx)\vec{k} = \vec{0}.$$

Portanto o campo é conservativo. Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + ysenx \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - \cos x \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$u = \int (1 + ysenx)dx + a(y)$$
$$= x + y(-\cos x) + a(y)$$

Levando este resultado na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x + \frac{da}{dy} = 1 - \cos x$$
$$\frac{da}{dy} = 1$$

Assim,

$$a = \int dy = y + C$$

A função potencial é dada por $u = x - y\cos x + y + C$.

c) $\vec{f} = \ln xy\,\vec{i} + \ln yz\,\vec{j} + \ln zx\,\vec{k}$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \ln xy & \ln yz & \ln zx \end{vmatrix}$$

$$\neq \vec{0}.$$

Portanto o campo não é conservativo.

d) $\vec{f} = \left(y^2 - 3 - \dfrac{y}{x^2 + xy} \right)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{x+y} + 2xy + 2y \right)\vec{j}$

Temos:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 3 - \dfrac{y}{x^2 + xy} & \dfrac{1}{x+y} + 2xy + 2y & 0 \end{vmatrix}$$

$$rot\,\vec{f} = \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + 2y - 2y + \frac{(x^2 + xy).1 - y(x)}{(x^2 + xy)^2} \right)\vec{k}$$

$$= \frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{x^2 + xy - xy}{x^2(x+y)^2}$$

$$= \vec{0}$$

Portanto, o campo é conservativo em domínio simplesmente conexo que não contém pontos da reta $y = -x$.

Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 3 - \dfrac{y}{x^2 + xy} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y} + 2xy + 2y \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 3 - \frac{y}{x^2 + xy}$$

$$\begin{aligned} u &= \int \left(y^2 - 3 - \frac{y}{x^2 + xy} \right) dx \\ &= y^2 x - 3x - \int \frac{y}{x(x+y)} dx \\ &= y^2 x - 3x - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+y} \right) dx \\ &= y^2 x - 3x - \ln|x| + \ln|x+y| + a(y) \end{aligned}$$

Levando este resultado na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx + \frac{1}{x+y} + \frac{da}{dy} = \frac{1}{x+y} + 2xy + 2y$$

$$\frac{da}{dy} = 2y$$

$$a = \int 2y\, dy \ = 2\frac{y^2}{2} + C \ = y^2 + C.$$

A função potencial é dada por $u = xy^2 - 3x - \ln|x| + \ln|x+y| + y^2 + C$.

e) $\vec{f} = (10xz + ysenxy)\vec{i} + xsenxy\ \vec{j} + 5x^2\vec{k}$

Temos:

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 10xz + ysenxy & xsenxy & 5x^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (10x - 10x)\,\vec{j} + (yx\cos xy + senxy - y\cos xy.x - senxy)\,\vec{k} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Portanto, o campo é conservativo. Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 10xz + ysenxy \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xsenxy \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 5x^2 \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10xz + ysenxy$$

$$u = \int \left(10xz + ysenxy\right) dx \ = 10z\frac{x^2}{2} + -\cos xy + a\left(y, z\right).$$

Levando este resultado na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xsenxy + \frac{\partial a}{\partial y} = xsenxy$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 0 + b(z)$$

$$a = b(z)$$

Usando a terceira equação temos $u = 5zx^2 - \cos xy + b(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5x^2 + \frac{db}{dz} = 5x^2$$

$$\frac{db}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow b = C$$

A função potencial é dada por $u = 5x^2 z - \cos xy + C$

f) $\vec{f} = e^x \vec{i} + 2e^y \vec{j} + 3e^z \vec{k}$

Temos:

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x & 2e^y & 3e^z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{0}$$

Portanto, o campo é conservativo. Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2e^y \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 3e^z \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x$$

$$u = \int e^x dx = e^x + a(y, z)$$

Levando este resultado na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} = 2e^y$$

$$a = \int 2e^y dy = 2e^y + b(z)$$

$$u = e^x + 2e^y + b(z)$$

Levando este resultado na terceira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{db}{dz} = 3e^z$$

$$b = \int 3e^z dz = 3e^z + C$$

A função potencial é dada por $u = e^x + 2e^y + 3e^z + C$.

20. Encontrar uma função potencial para o campo $\vec{f}$, no domínio especificado:

a) $\vec{f}(x,y,z) - \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ em qualquer domínio simplesmente conexo que não contem a origem.

$\vec{f}$ é conservativo em qualquer domínio simplesmente conexo que não contem a origem.

Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$u = \int x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + a(x,y)$$

Aplicando na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{-1}{2} .2y + \frac{\partial a}{\partial y} = y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

Assim, $\dfrac{\partial a}{\partial y} = 0$.

$$a = b(z)$$

$$u = -(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} + b(z)$$

Aplicando na terceira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-3}{2}}.2z+\frac{db}{dz}=z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{db}{dz}=0\Rightarrow b=C.$$

$$u=\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C.$$

b) $\vec{f}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

$\vec{f}$ é conservativo em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\end{cases}$$

Usando a primeira equação vem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$u=\int\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\,dx=\ln\left|x^2+y^2+z^2\right|+a(y,z).$$

Aplicando na segunda equação temos

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}=0$$

$$a=b(z)$$

Usando a terceira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{db}{dz} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{db}{dz} = 0 \Rightarrow b = C$$

A função potencial é dada por: $u = \ln\left|x^2 + y^2 + z^2\right| + C$.

c) $\vec{f}(x, y, z) = \left(ye^z, xe^z, xye^z\right)$

$\vec{f}$ é conservativo em $\Re^3$.

Vamos então encontrar a função potencial, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ye^z \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^z \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = xye^z \end{cases}$$

Usando a primeira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^z$$

$$u = \int ye^z dx = ye^z x + a(y, z)$$

Aplicando na segunda equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^z - \frac{\partial a}{\partial y} = xe^z.$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

$$a = b(z)$$

Usando a terceira equação temos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xye^z + \frac{db}{dz} = xye^z.$$

$$\frac{db}{dz} = 0 \Rightarrow b = C$$

A função potencial é dada por:

$$u = xye^z + C.$$

CAPÍTULO 7
7.6 - EXERCÍCIOS
pág. 241 -244

1. Calcular $\iint\limits_R f(x,y)\ dx\,dy$, onde:

a) $f(x,y) = x\,e^{xy}$; R é o $retângulo: \ 1 \le x \le 3; 0 \le y \le 1.$

$$\int_1^3 \int_0^1 x\,e^{xy}\ dy\,dx$$

$$\int_0^1 x\,e^{xy}\ dy = e^{xy}\Big|_0^1 = e^x - 1$$

$$\int_1^3 \left(e^x - 1\right)\ dx = e^x - x\Big|_1^3 = e^3 - e^1 - (3-1) = e^3 - e - 2$$

b) $f(x,y) = y\,e^{xy}$; R é o $retângulo: \ 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 1.$

$$\int_0^1 \int_0^3 y\,e^{xy}\ dx\,dy = \int_0^1 e^{xy}\Big|_0^3\ dy = \int_0^1 \left(e^{3y} - 1\right)\ dy = \left(\frac{1}{3}e^{3y} - y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{4}{3}.$$

c) $f(x,y) = x\cos xy$; R é o $retângulo: \ 0 \le x \le 2; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xy\ dy\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xy\ dy = sen\ xy\Big|_0^{\pi/2} = sen\ \frac{x\,\pi}{2}$$

$$\int_0^2 sen\ \frac{\pi}{2}x\ dx = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot 2 - \cos 0\right) = -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

d) $f(x,y) = y\ln x$; R é $retângulo: 2 \le x \le 3;\ \ 1 \le y \le 2.$

$$\int_1^2 \int_2^3 y \ln x \; dx\, dy$$

$$\int \ln x \; dx$$

$$u = \ln x \qquad \to \qquad du = \frac{1}{x}\; dx$$

$$dv = \; dx \qquad \to \qquad v = \int \; dx = x + c$$

$$\int \ln x \; dx = (\ln x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\; dx = x \ln x - x$$

$$\int_2^3 \ln x \; dx = (x \ln x - x)\Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 3 - 2 \ln 2 + 2 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_1^2 y(3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1)\; dy = (3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1)\; \frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2 = (3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1)\cdot\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1).$$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$; R é o quadrado: $1 \le x \le 2;\; 1 \le y \le 2.$

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y}\; dx\, dy$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+y} = \ln|x+y|\;\Big|_1^2 = \ln|2+y| - \ln|1+y|$$

$$\int_1^2 \left(\ln|2+y| - \ln|1+y|\right)\; dy$$

Resolvendo as integrais temos:

$$\int \ln(2+y)\; dy$$

$$u = \ln(2+y) \qquad \to \qquad du = \frac{1}{2+y}\; dy$$

$$dv = dy \qquad \to \qquad v = \int \; dy = y + c$$

$$\int \ln(2+y)\; dy = \ln(2+y)\cdot y - \int y \cdot \frac{1}{2+y}\; dy$$

$$= y \ln(2+y) - \int \frac{y}{2+y}\; dy$$

$$= y \ln(2+y) - \int\left(1 - \frac{2}{2+y}\right)\; dy$$

$$= y \ln(2+y) - y + 2 \ln(2+y).$$

Assim,

$$\int_1^2 \ln(2+y)\ dy = \left(y\ln(2+y) - y + 2\ln(2+y)\right)\Big|_1^2 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$$

$$\int_1^2 \ln(1+y)\ dy = y\ln(1+y) - y + \ln(1+y)\Big|_1^2 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+y} = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1 - 3\ln 3 + 2\ln 2 + 1 = 4\ln 4 - 6\ln 3 + 2\ln 2$$

$$\int_1^2 (4\ln 4 - 3\ln 3 + 2\ln 2)\ dy = 4\ln 4 - 6\ln 3 + 2\ln 2 = 10\ln 2 - 6\ln 3.$$

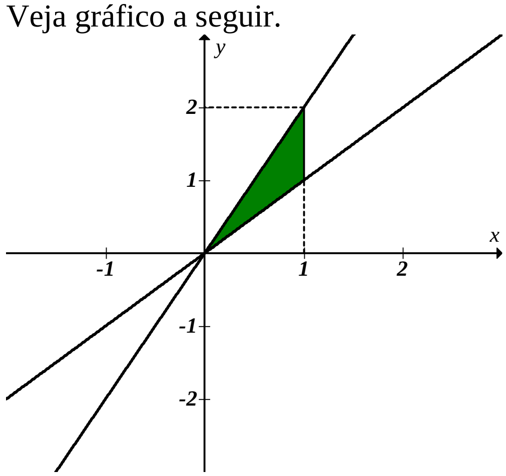
2. Esboçar a região de integração e calcular as integrais iteradas seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x} (2x+4y)\ dy\,dx$

Temos que:

$$\begin{cases} x \le y \le 2x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_x^{2x} (2x+4y)\ dy = \left(2xy + 4\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2x} = 2x(2x-x) + 2\left(4x^2 - x^2\right) = 2x^2 + 6x^2 = 8x^2.$$

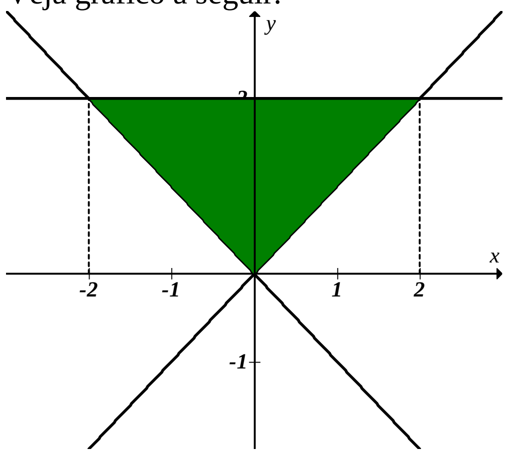
$$\int_0^1 8x^2\ dx = 8\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

b) $\int_0^2 \int_{-y}^{y} \left(xy^2 + x\right)\ dx\, dy$

Temos que:

$$\begin{cases} -y \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_{-y}^{y} \left(xy^2 + x\right)\ dx = \left(y^2\, \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-y}^{y} = \frac{y^2}{2}\left(y^2 - y^2\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 - y^2\right) = 0$$

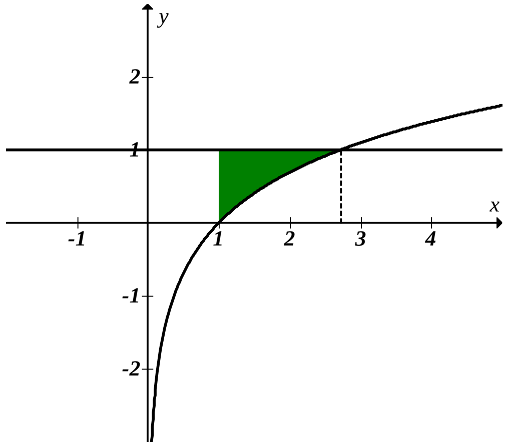
$$\int_0^2 0\ \ dy = 0$$

c) $\int_1^e \int_{\ln x}^{1} x\ \ dy\, dx$

Temos que:

$$\begin{cases} \ln\, x \le y \le 1 \\ 1 \le x \le e \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_{\ln x}^{1} x \; dy = xy\Big|_{\ln x}^{1} = x(1 - \ln x) = x - x\ln x$$

$$\int_{1}^{e} (x - x\ln x) \; dx$$

Resolvendo a integral temos:

$$\int x \ln x \; dx$$

$$u = \ln x \qquad \rightarrow \qquad du = \frac{1}{x} \; dx$$

$$dv = x \; dx \qquad \rightarrow \qquad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x \ln x \; dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \; dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

Portanto.

$$\int_{1}^{e} (x - x\ln x) \; dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{1}{4}x^2 \Bigg|_{1}^{e} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\ln e + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}$$

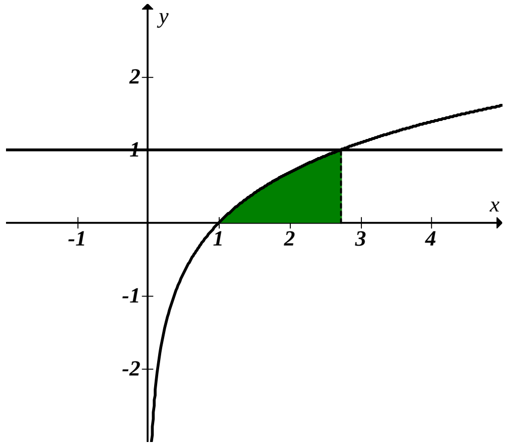
$$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}.$$

d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \int_{0}^{\ln x} \frac{1}{e - e^y} \; dy \, dx$

Temos:

$$\begin{cases} 0 \le y \le \ln x \\ 1 \le x \le e \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



Invertendo os limites de integração temos:

$$\int_0^1 \int_{e^y}^{e} \frac{1}{e-e^y}\ dx\, dy$$

$$\int_{e^y}^{e} \frac{1}{e-e^y}\ dx = \frac{1}{e-e^y}\bigg|_{e^y}^{e} = \frac{e}{e-e^y} - \frac{e^y}{e-e^y} = \frac{-e^y+e}{e-e^y} = 1$$

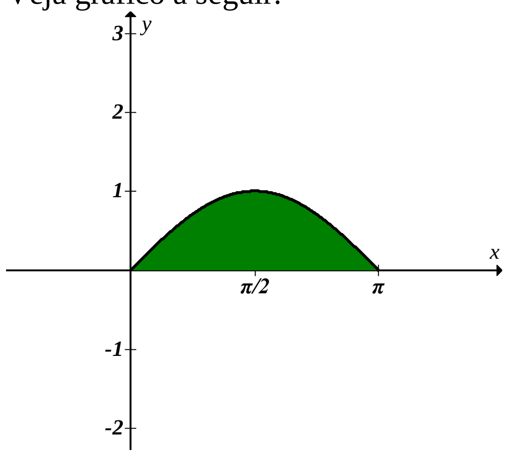
$$\int_0^1 \frac{-e^y+e}{-e^y+e}\ dy = \int_0^1\ dy = y\Big|_0^1 = 1$$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{sen\, x} y\ \ dy\, dx$

Temos que:

$$\begin{cases} 0 \le y \le sen\ x \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_0^{sen\,x} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{sen\,x} = \frac{1}{2}\,sen^2 x$$

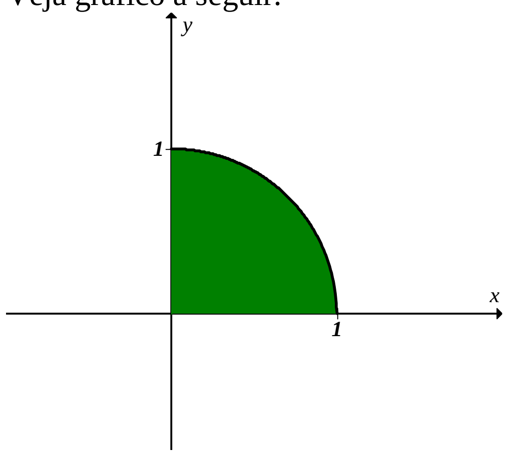
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} sen^2 x\ \ dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,sen\,x\cos x + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,sen\,\pi\cos\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\,sen\,0\cos 0 - 0\right) = \frac{1}{4}\pi$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\ \ dx\,dy$

Temos que:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\ \ dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\left(1-y^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2$$

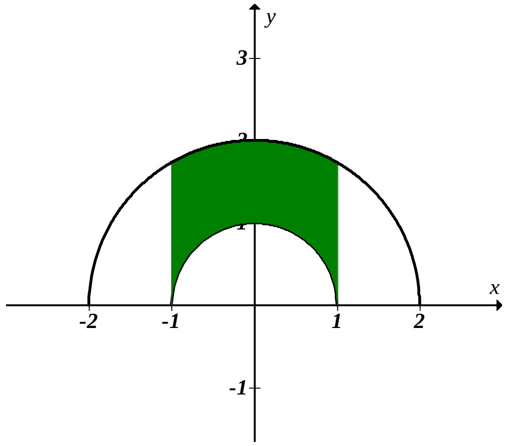
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2\right)\ dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\ \ dy\,dx$

Temos que:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x \; dy = xy\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = x\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)$$

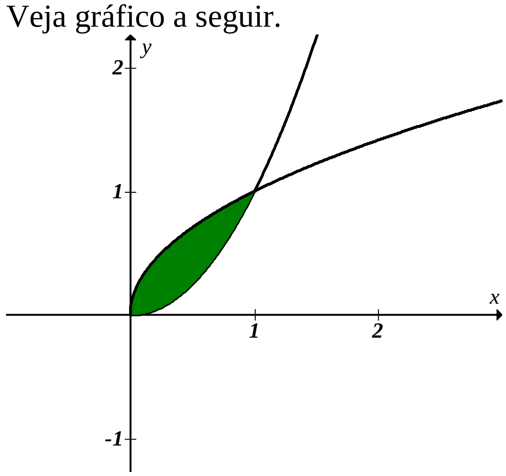
$$\int_{-1}^{1} x\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}\right) \; dx = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{3/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}(3)^{3/2}+\frac{1}{3}(0)+\frac{1}{3}(3)^{3/2}-\frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

h) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy \;\; dy\, dx$

Temos que:

$$\begin{cases} x^2 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy \ dy = 2x \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_{x^2}^{\sqrt{x}} = x\left(x - x^4\right) = x^2 - x^5$$

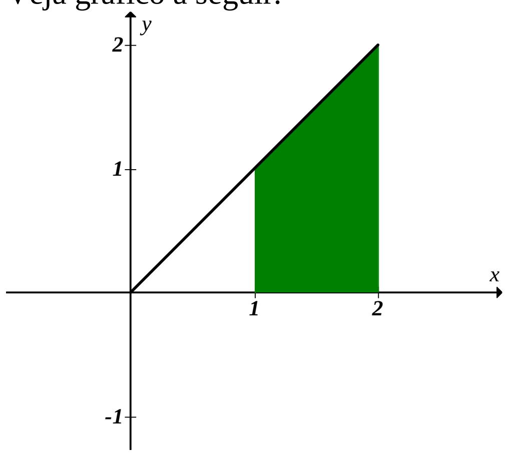
$$\int_0^1 \left(x^2 - x^5\right) \ dx = \left. \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

i) $\int_1^2 \int_0^x y \ln x \ dy\, dx$

Temos que:

$$\begin{cases} 0 \le y \le x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_0^x y \ln x \ dy = \ln x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^x = \frac{x^2}{2} \ln x$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2} \ln x \ dx$$

Vamos resolver a integral

$$\int x^2 \ln x \ dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \ dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$$

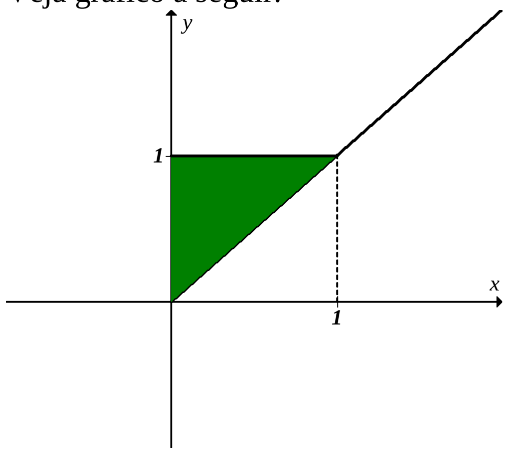
$$\int_1^2 \frac{x^2}{2} \ln x \ dx = \frac{1}{2} \left. \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right) \right|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot 8 \ln 2 - \frac{1}{9} \cdot 8 \right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} \right) = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{7}{18}.$$

j) $\int_0^1 \int_0^y \sqrt{x+y}\ \ dx\, dy$

Temos que:

$$\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



Resolvendo a integral vem:

$$\int_0^y \sqrt{x+y}\ \ dx = \int_0^1 (x+y)^{1/2}\ \ dx = \left.\frac{(x+y)^{3/2}}{3/2}\right|_0^y = \frac{2}{3}(2y)^{3/2} - \frac{2}{3}y^{3/2}$$

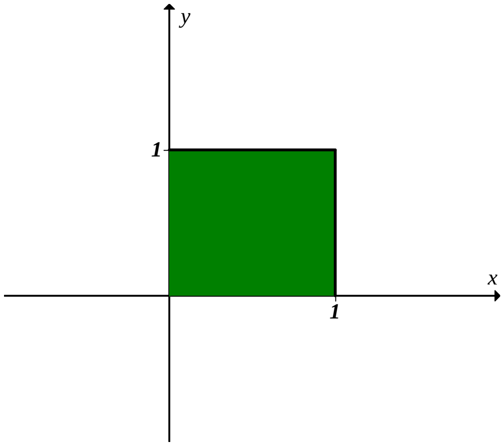
$$\int_0^1 \frac{2}{3}\left(2^{3/2}\cdot y^{3/2} - y^{3/2}\right)\ dy = \frac{2}{3}\left.\left(2^{3/2}\cdot\frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\right|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

k) $\int_0^1 \int_0^1 \sec^3 x\ \ dy\, dx$

Temos que:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_0^1 \sec^3 x \ dy = \sec^3 x \ y\Big|_0^1 = \sec^3 x$$

$$\int \sec^3 x \ dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot tg\ x + \frac{1}{2}\int \sec x \ dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot tg\ x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\ x| + c$$

$$\int_0^1 \sec^3 x \ dx = \left(\frac{1}{2}\sec x \cdot tg\ x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\ x|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\sec 1 \cdot tg\ 1 + \frac{1}{2}\ln(\sec 1 + tg\ 1) - \frac{1}{2}\ln|\sec 0| =$$

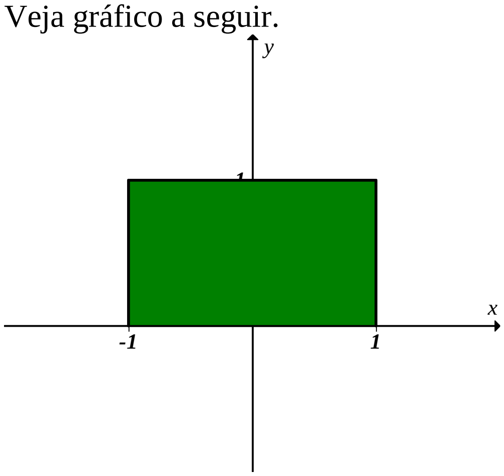
$$= \frac{1}{2}\sec 1 \cdot tg\ 1 + \frac{1}{2}\ln|\sec 1 + tg\ 1|$$

l) $\int_0^1 \int_{-1}^1 |x+y| \ dx\, dy$

Temos que:

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$|x+y| = \begin{cases} x+y & , \quad x+y \geq 0 \\ -x-y & , \quad x+y < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 (x+y)\ dx\,dy = \int_0^1 \int_{-1}^{-y} (x+y)\ dx\,dy + \int_0^1 \int_{-y}^0 (x+y)\ dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\ dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^{-y} (-x-y)\ dx\,dy + \int_0^1 \int_{-y}^0 (x+y)\ dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\ dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 -\frac{x^2}{2} - y\,x \Big|_{-1}^{-y} dy + \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + y\,x\right)\Bigg|_{-y}^{0} dy + \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + y\,x\right)\Bigg|_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{y^2}{2} + y^2 + \frac{1}{2} + (-y)\right) dy + \int_0^1 \left(-\frac{y^2}{2} - y(-y)\right) dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

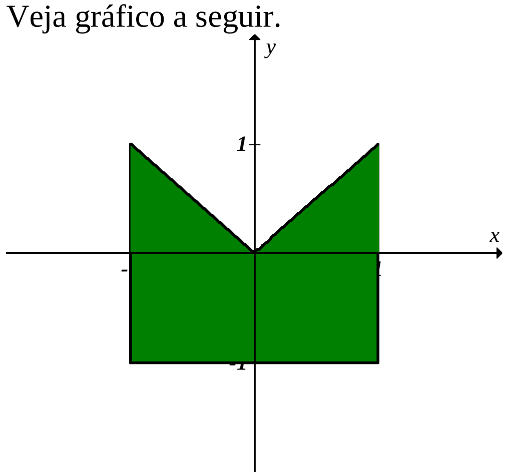
$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{6} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{-2+4+6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{|x|} \left(x^2 - 2y^2\right)\ dy\,dx$

Temos que:

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq |x| \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



$$\int_{-1}^{|x|}\left(x^2-2y^2\right)\ dy=\left(x^2y-2\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{|x|}=x^2\left(|x|+1\right)-\frac{2}{3}\left(|x|^3+1\right)=x^2|x|+x^2-\frac{2}{3}|x|^3-\frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^2(-x)+x^2-\frac{2}{3}\cdot(-x)^3-\frac{2}{3}\right)\ dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^3+x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\right)\ dx=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=-\left(\frac{-3-4+2+8}{12}\right)=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}$$

$$\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\right)\ dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\frac{3+4-2-8}{12}=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}$$

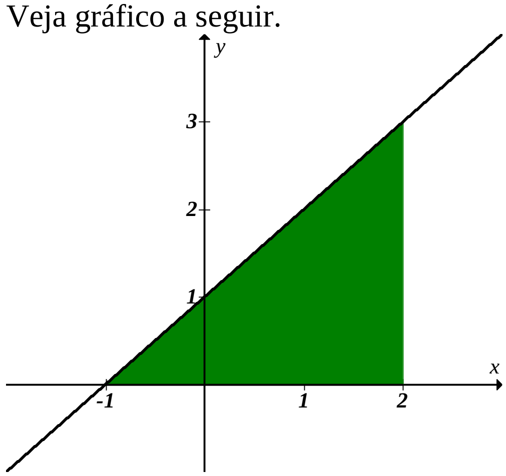
$$R.:-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

n) $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{x+1}x^2\ \ dy\,dx$

Temos que:

$$\begin{cases}0\le y\le x+1\\ -1\le x\le 2\end{cases}$$

Veja gráfico a seguir.



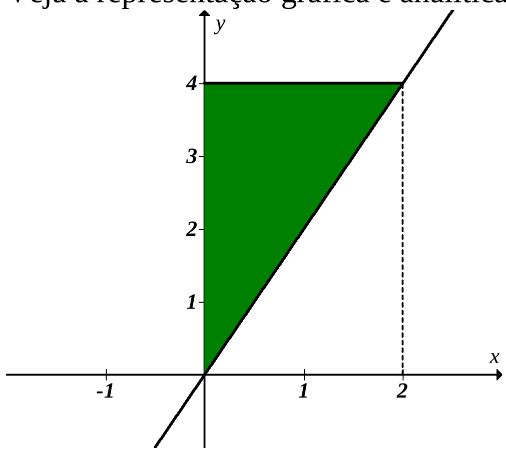
$$\int_{0}^{x+1}x^2\ \ dy=x^2y\Big|_{0}^{x+1}=x^2(x+1)=x^3+x^2$$

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3+x^2\right)\ dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{27}{4}.$$

3. Inverter a ordem de integração:

a) $\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\ dx\ dy$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



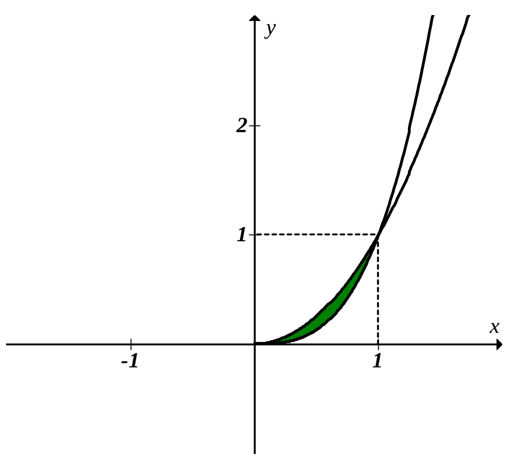
$$\begin{cases} 0 \le x \le y/2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y)\ dy\ dx$$

b) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



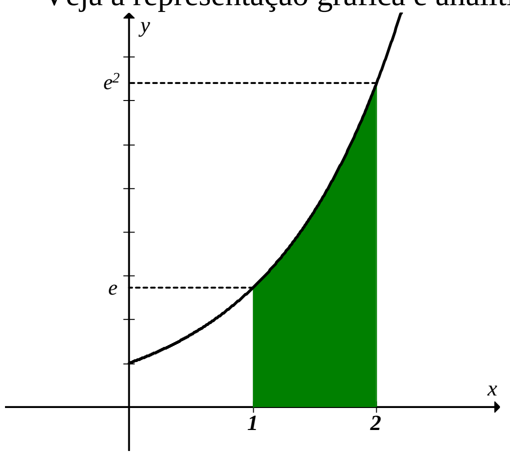
$$\begin{cases} x^3 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\ dx\, dy$$

c) $\int_1^2 \int_0^{e^x} f(x,y)\ dy\, dx$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



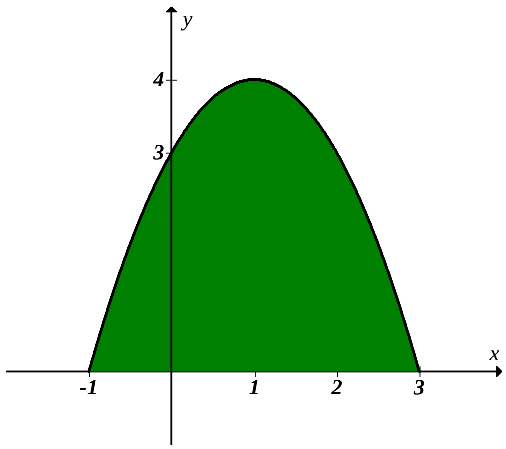
$$\begin{cases} 0 \le y \le e^x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^e \int_1^2 f(x,y)\ dx\, dy + \int_e^{e^2} \int_{\ln y}^2 f(x,y)\ dx\, dy$$

d) $\int_{-1}^3 \int_0^{-x^2+2x+3} f(x,y)\ dy\, dx$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



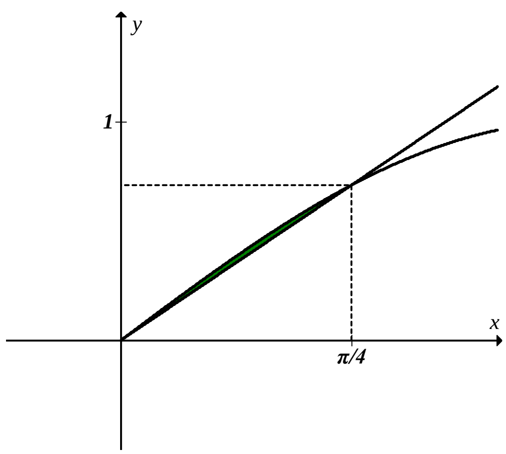
$$\begin{cases} 0 \le y \le -x^2 + 2x + 3 \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^4 \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} f(x,y)\ dx\,dy$$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}^{sen\,x} f(x,y)\ dy\,dx$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



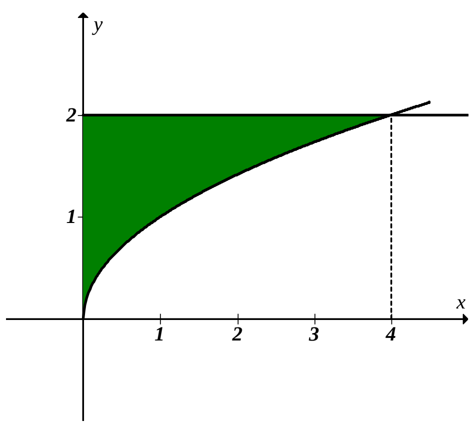
$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} x \leq y \leq sen\ x \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}^{sen\ x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{arcsen\ y}^{\frac{\pi\ y}{2\sqrt{2}}} f(x,y)\ dx\ dy$$

f) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\ dx\ dy$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



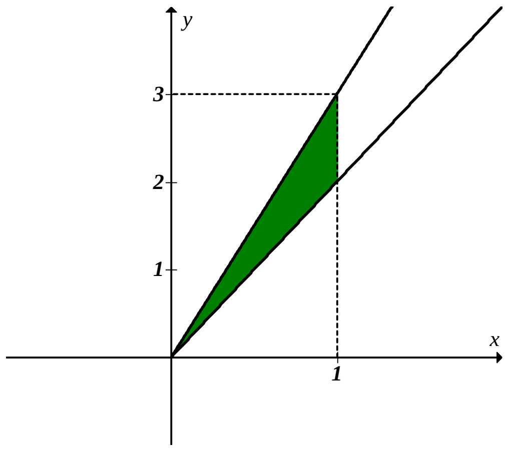
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\ dy\ dx$$

g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\ dy\ dx$

Veja a representação gráfica e analítica da região de integração.



$2x \le y \le 3x$

$0 \le x \le 1$

Portanto,

$$\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\ dx\ dy + \int_2^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y)\ dx\ dy$$

4. Calcular $\iint_R (x+4)\ dx\ dy$, onde R é o retângulo $0 \le x \le 2 \quad , \quad 0 \le y \le 6$. Interpretar geometricamente.

$$\int_0^6 \int_0^2 (x+4)\ dx\ dy$$

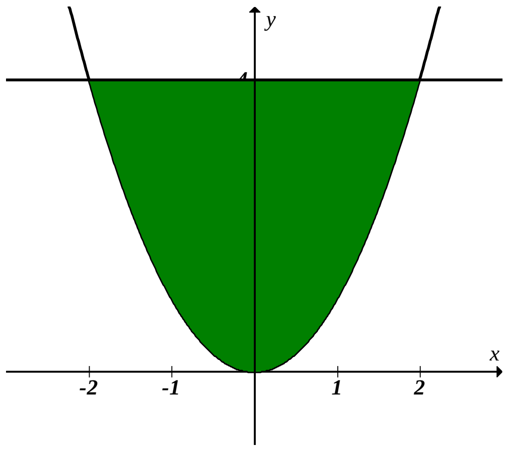
$$\int_0^2 (x+4)\ dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Bigg|_0^2 = 2+8=10$$

$$\int_0^6 10\ \ dy = 10y \Big|_0^6 = 60$$

Volume do sólido com base retangular e superiormente delimitado pelo plano: $z = x + 4$.

5. Calcular $\iint_R (8-x-y)\ dx\ dy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2 \quad e \quad y = 4$.

Segue a região de integração.



$$\int_{x^2}^{4}(8-x-y)\ dy=\left(8y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{4}=\left(8\cdot 4-x\cdot 4-\frac{16}{2}\right)-\left(8x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right)=\frac{x^4}{2}+x^3-8x^2-4x+24$$

$$\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^4}{2}+x^3-8x^2-4x+24\right)\ dx=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-8\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+24x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

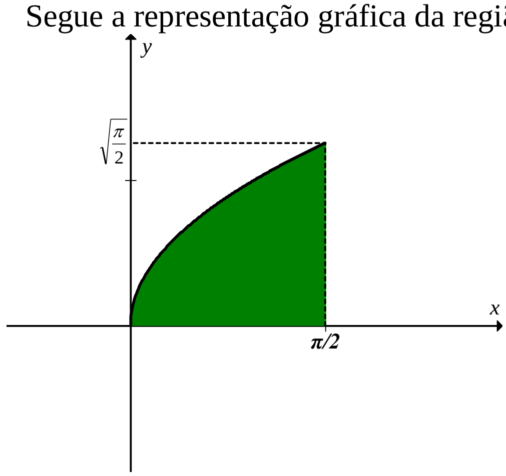
$$=\left(\frac{1}{10}\cdot 32+\frac{1}{4}\cdot 16-\frac{8}{3}\cdot 8-2\cdot 4+24\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{10}(-32)+\frac{1}{4}\cdot 16-\frac{8}{3}(-8)-2\cdot 4+24(-2)\right)=$$

$$=\frac{896}{15}$$

6. Calcular $\iint_R \sqrt{x}\ sen\left(\sqrt{x}\ y\right)\ dx\,dy$ onde R é a região delimitada por

$y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ e $y=\sqrt{x}$.

Segue a representação gráfica da região:



Assim,

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, sen\left(\sqrt{x}\, y\right)\, dy\, dx$$

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, sen\left(\sqrt{x}\, y\right)\, dy = -\cos(\sqrt{x}y)\ \Big|_0^{\sqrt{x}} = -\cos x + \cos 0 = -\cos x + 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos x\right)\, dx = \left(x - senx\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

7. Calcular $\iint_R sen\, x\, sen\, y\ \ dx\, dy$ onde R é o retângulo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\quad e \quad$ $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} sen\, x\, sen\, y\ \ dx\, dy$$

$$\int_0^{\pi/2} sen\, x\, sen\, y\ \ dx = -\cos\, xseny\Big|_0^{\pi/2} = -sen\, y\cos\frac{\pi}{2} + sen\, y\cos 0 = sen\, y\left(-0+1\right) = sen\, y$$

$$\int_0^{\pi/2} sen\, y\ \ dy = -\cos\, y\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

8. Calcular $\iint_R \frac{y\ln x}{x} dydx$ onde R é o retângulo $1 \le x \le 2$ $\quad e \quad$ $-1 \le y \le 1$.

$$\int_{-1}^{1}\int_1^2 \frac{y\ln x}{x}\ \ dx\, dy$$

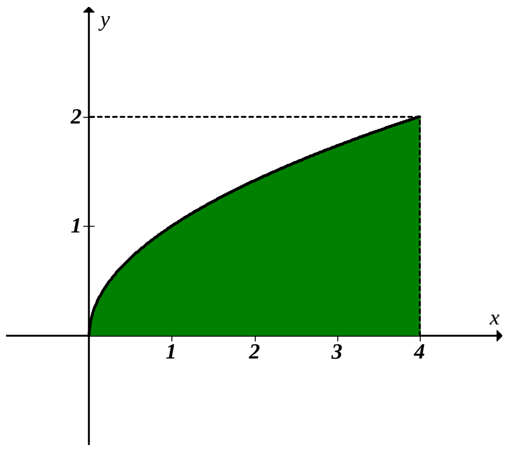
$$\int_1^2 \frac{y\ln x}{x}\ \ dx = y\cdot\frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{y}{2}\left(\ln^2 2\right)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\ln 2)^2}{2} y\ \ dy = \frac{(\ln 2)^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\ln 2)^2(1-1) = 0$$

9. Calcular $\iint_R \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy$ onde R é a região delimitada por

$y = \sqrt{x}$ $\quad e \quad x = 4 \quad e \quad y = 0$.

Veja a representação gráfica da região:



Assim,

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \left(x^2+y^2\right)\ dx\, dy$$

$$\int_{y^2}^4 \left(x^2+y^2\right)\ dx = \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{y^2}^4 = \frac{64}{3}+4y^2-\frac{y^6}{3}-y^4$$

$$\int_0^2 \left(\frac{64}{3}+4y^2-\frac{y^6}{3}-y^4\right)\ dy = \left(\frac{64}{3}y+4\,\frac{y^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^7}{7}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=\frac{4288}{105}.$$

10. Calcular $\iint_R \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$ onde R é o retângulo $3\le x\le 4 \quad e \quad 1\le y\le 2$.

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$$

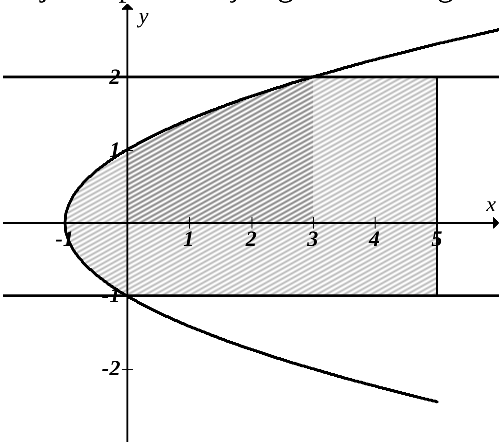
$$\int_1^2 (x+y)^{-2}\ dy = \frac{(x+y)^{-1}}{-1}\Bigg|_1^2 = \frac{-1}{x+y}\Bigg|_1^2 = \frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x+1}$$

$$\int_3^4 \left(\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)\ dx = \left(-\ln|x+2|+\ln|x+1|\right)\Big|_3^4 = 2\ln 5-\ln 3-3\ln 2$$

11. Calcular $\iint_R (2x+y)\ dx\,dy$ onde R é a região delimitada por

$x=y^2-1 \quad ; \quad x=5 \quad ; \quad y=-1 \quad e \quad y=2$.

Veja a representação gráfica da região a seguir:



Assim,

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2-1}^{5}(2x+y)\ dx\,dy$$

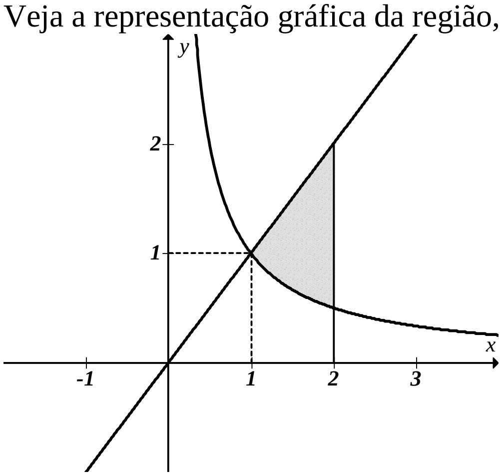
$$\int_{y^2-1}^{5}(2x+y)\ dx=\left(2\,\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{y^2-1}^{5}=$$

$$=-y^4-y^3+2y^2+6y+24$$

$$\int_{-1}^{2}\left(-y^4-y^3+2y^2+6y+24\right)\ dy=\left(-\frac{y^5}{5}-\frac{y^4}{4}+2\,\frac{y^3}{3}+6\,\frac{y^2}{2}+24y\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{1533}{20}$$

12. Calcular $\int\limits_R\int \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ onde R é a região delimitada por $y=x$; $y=\frac{1}{x}$ e $x=2$.

Veja a representação gráfica da região, a seguir:



Assim,

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\ dy\, dx$$

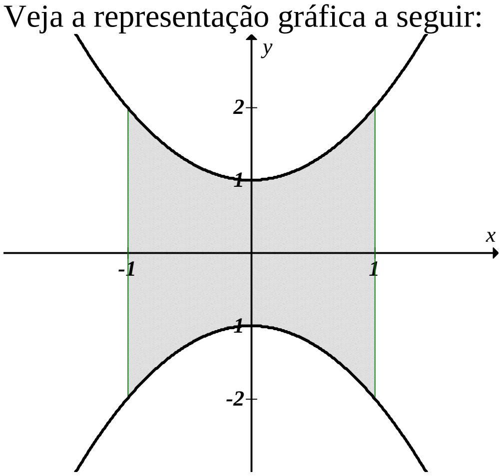
$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\ dy = x^2 \cdot \left.\frac{y^{-1}}{-1}\right|_{\frac{1}{x}}^{x} = -\left.\frac{x^2}{y}\right|_{\frac{1}{x}}^{x} = -\frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{\frac{1}{x}} = -x + x^2 \cdot x = -x + x^3$$

$$\int_1^2 \left(-x + x^3\right)\ dx = \left.\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

13. Calcular $\iint\limits_R (x+y)dxdy$ onde R é a região delimitada por

$y = x^2 + 1 \quad ; \quad y = -1 - x^2 \quad ; \quad x = -1 \quad e \quad x = 1.$

Veja a representação gráfica a seguir:



Assim,

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1-x^2}^{x^2+1} (x+y)\ dy\, dx$$

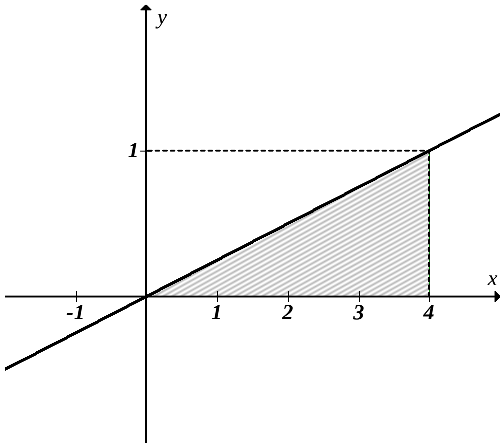
$$\int_{-1-x^2}^{x^2+1} (x+y)\ dy = \left. xy + \frac{y^2}{2}\right|_{-1-x^2}^{x^2+1} = x\left(x^2+1\right) + \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2} - x\left(-1-x^2\right) - \frac{\left(-1-x^2\right)^2}{2} =$$

$$= 2x^3 + 2x$$

$$\int_{-1}^{1} \left(2x^3 + 2x\right)\ dx = 0.$$

14. Calcular $\iint\limits_R e^{-x^2}\ dx\, dy$, sendo R a região delimitada por $x = 4y \quad ; \quad y = 0 \quad e \quad x = 4$.

Veja a representação gráfica da região a seguir:



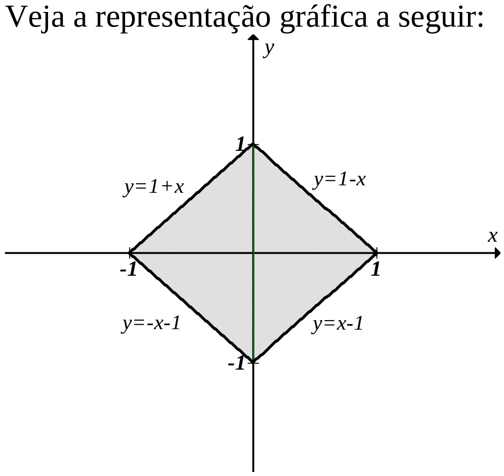
$$\int_0^4 \int_0^{x/4} e^{-x^2} \, dy \, dx$$

$$\int_0^{x/4} e^{-x^2} \, dy = e^{-x^2} y \Big|_0^{x/4} = e^{-x^2} \cdot \frac{x}{4}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{4} x \, e^{-x^2} \, dx = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{4} \, e^{-x^2} \Big|_0^4 = \frac{-1}{8} \cdot e^{-16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{e^{16}}\right)$$

15. Calcular $\iint_R (x+1) \, dx \, dy$, sendo R a região delimitada por $|x| + |y| = 1$.

Veja a representação gráfica a seguir:



$$\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x+1)\ dx\,dy + \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{1+y} (x+1)\ dx\,dy$$

$$\int_{y-1}^{1-y} (x+1)\ dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{y-1}^{1-y} = \frac{(1-y)^2}{2} + (1-y) - \frac{(y-1)^2}{2} - (y-1)$$

$$\int_0^1 \left[\frac{(1-y)^2}{2} + (1-y) - \frac{(y-1)^2}{2} - (y-1)\right] dy = \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{(1-y)^3}{3} - \frac{(1-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=1$$

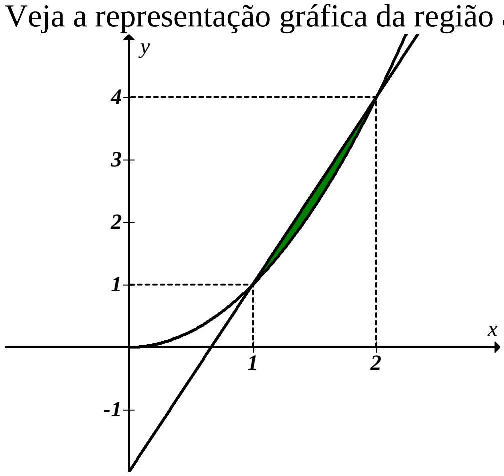
$$\int_{-y-1}^{1+y} (x+1)\ dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-y-1}^{1+y} = \frac{(1+y+1)^2}{2} - \frac{(-y-1+1)^2}{2} = \frac{(y+2)^2}{2} - \frac{(-y)^2}{2} = \frac{(y+2)^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

$$\int_{-1}^0 \left[\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right] dy = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(y+2)^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^0 = 1$$

Resposta Final: 1+1=2.

16. Calcular $\iint_R 2y\ \ dx\,dy$, sendo R a região delimitada por $y = x^2 \quad e \quad y = 3x - 2$.

Veja a representação gráfica da região a seguir:



$$\int_1^2 \int_{x^2}^{3x-2} 2y \; dy \, dx$$

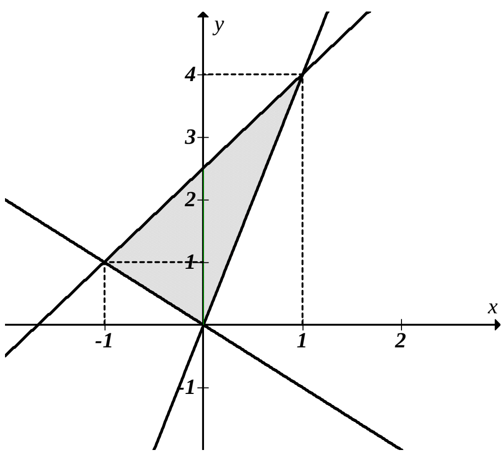
$$\int_{x^2}^{3x-2} 2y \; dy = 2\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{3x-2} = (3x-2)^2 - x^4$$

$$\int_1^2 \left[(3x-2)^2 - x^4\right] \, dx = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{5}.$$

17. Calcular $\iint_R x \; dx\, dy$, sendo R a região delimitada por

$y = -x \quad , \quad y = 4x \quad$ e $\quad y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

Veja a representação gráfica da região a seguir:

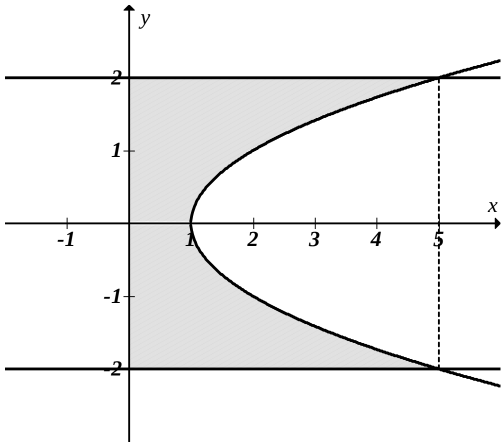


$$\int_0^1 \int_{-y}^{y/4} x \; dx\, dy + \int_1^4 \int_{\frac{2}{3}(y-5/2)}^{y/4} x \; dx\, dy = \frac{-5}{32} + \frac{5}{32} = 0$$

18. Calcular $\iint_R y \; dx\, dy$, sendo R a região delimitada por

$x = 0 \quad , \quad x = y^2 + 1 \quad , \quad y = 2 \quad e \quad y = -2$.

Veja a representação gráfica da região a seguir:



$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{y^2+1} y \ dx\, dy$$

$$\int_{0}^{y^2+1} y \ dx = y\ x\Big|_{0}^{y^2+1} = y\left(y^2+1\right) = y^3 + y$$

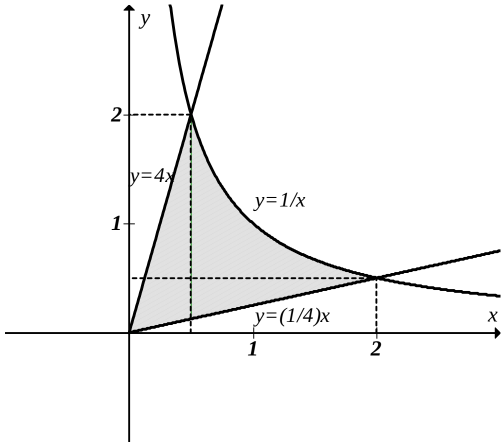
$$\int_{-2}^{2}\left(y^3+y\right)\ dy = \left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{16}{4}+\frac{4}{2}-\frac{16}{4}-\frac{4}{2}=0$$

19. Sejam $p(x)$ e $q(y)$ funções contínuas. Se R é o retângulo $[a,b]\times[c,d]$, verificar que $\int\int p(x)q(y)\ dx\, dy = \int_a^b p(x)\ dx \cdot \int_c^d q(y)\ dy$.

$$\int_c^d\int_a^b p(x)q(y)\ dx\, dy = \int_c^d q(y)\left[\int_a^b p(x)\ dx\right]dy = \int_a^b p(x)\ dx \cdot \int_c^d q(y)\ dy$$

20. Calcular $\iint_R (x+y)\ dx\, dy$ onde R é a região descrita na figura 7.17.

Veja a representação gráfica da região a seguir:



$$\int_0^{1/2}\int_{y/4}^{4y}(x+y)\ dx\,dy+\int_{1/2}^{2}\int_{y/4}^{1/y}(x+y)\ dx\,dy$$

$$\int_0^{1/2}\int_{y/4}^{4y}(x+y)\ dx\,dy=\int_0^{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{y/4}^{4y}dy=\int_0^{1/2}\left(\frac{16y^2}{2}+y(4y)-\frac{\frac{y^2}{16}}{2}-y\cdot\frac{y}{4}\right)dy=\int_0^{1/2}\left(8y^2+4y^2-\frac{y^2}{32}-\frac{1}{4}y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^{1/2}\frac{375y^2}{32}\ dy=\frac{375}{32}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1/2}=\frac{375}{768}.$$

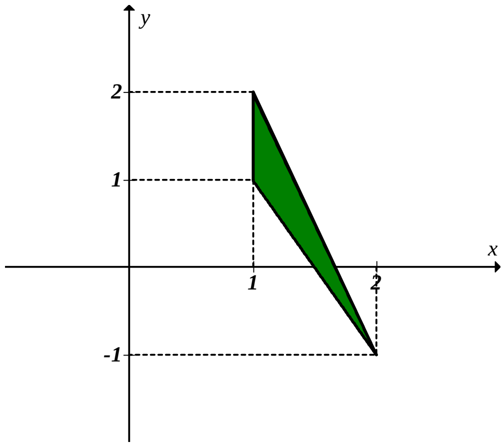
$$\int_{1/2}^{2}\int_{y/4}^{1/y}(x+y)\ dx\,dy=\int_{1/2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{y/4}^{1/y}dy=\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}+y\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{16}-y\cdot\frac{y}{4}\right)dy=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{-1}}{-1}+y-\frac{1}{32}\cdot\frac{y^3}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1161}{768}.$$

Resposta Final: $\frac{1161}{768}+\frac{375}{768}=\frac{1536}{768}=2$

21. Calcular $\iint\limits_R (1+x+y)\ dx\,dy$ onde R é delimitada pelo triângulo de vértices (1,1), (1,2) e (2,-1).

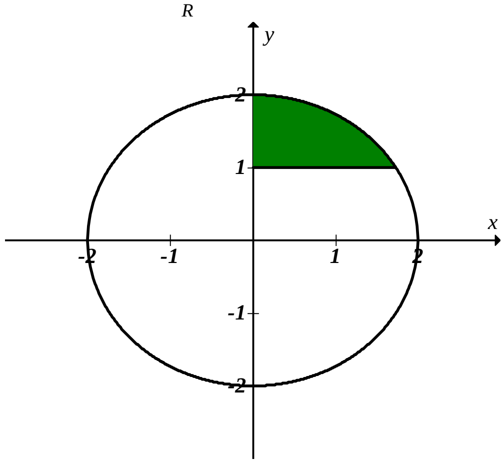
Veja a representação gráfica da região, a seguir:



$$\int_1^2 \int_{-2x+3}^{-3x+5} (1+x+y)\ dy\, dx$$

$$\int_1^2 \left(y+xy+\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-2x+3}^{-3x+5} dx = \frac{3}{2}.$$

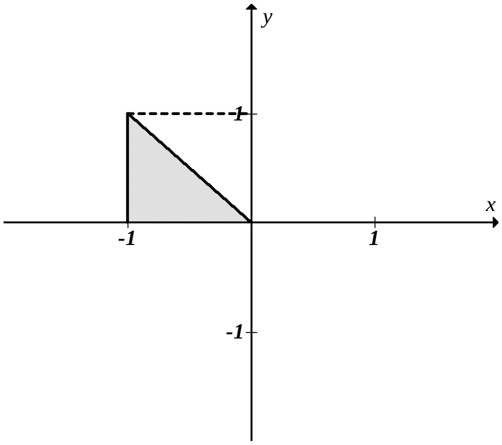
22. Calcular $\iint_R x dx\, dy$ onde R é a região descrita na figura 7.18.



$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-x^2}} x\ dy\, dx$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} xy\Big|_1^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x\sqrt{4-x^2} - x \right)\ dx = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}$$

23. $\iint_R \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x+y}}$, onde R é a região descrita na Figura 7.19.



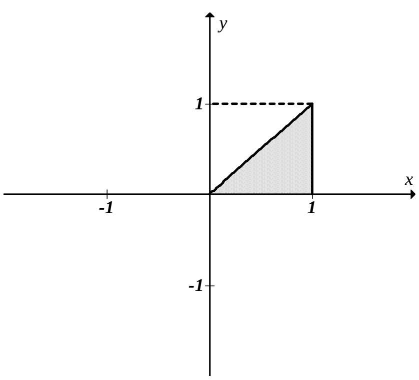
$$\int_0^1 \int_{-1}^{-y} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x+y}}$$

$$\int_{-1}^{-y} (1-x-y)^{-1/2}\ dx = -\frac{(1-x+y)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{-1}^{-y} = -2(1-(-y)+y)^{1/2} + 2(1+1+y)^{1/2} = -2(1+2y)^{1/2} + 2(2+y)^{1/2}$$

$$\int_0^1 \left[-2(1+2y)^{1/2} + 2(2+y)^{1/2}\right]\ dy = \left(-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2y)^{3/2}}{3/2} + 2\cdot\frac{(2+y)^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

24. Calcular $\iint_R e^{x^2}\ dy\,dx$ onde R é a região descrita na Figura 7.20.

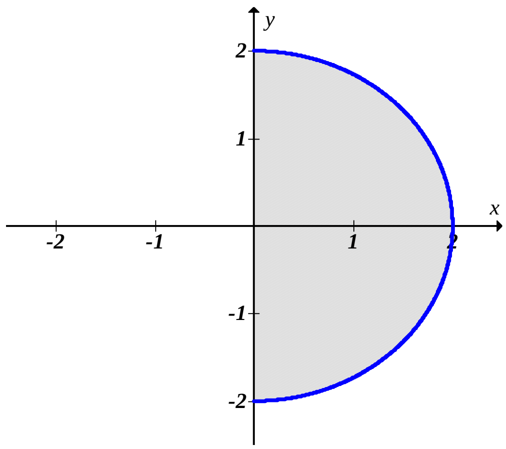


$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\ dy\,dx$$

$$\int_0^1 e^{x^2} y\Big|_0^x\ dx = \int_0^1 e^{x^2}\cdot x\ \ dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

CAPÍTULO 7
7.8 - EXERCÍCIOS
pág. 254 - 256

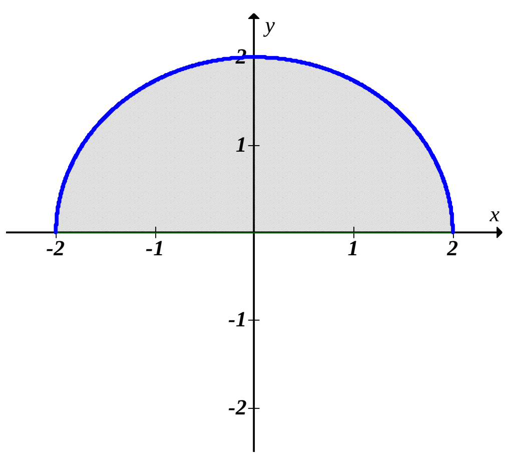
1. Calcular $\int_R\int \left(x^2+y^2\right)^2 \ dx\,dy$ onde R é a região da Figura 7.32.



Temos:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \left(r^2\right)^2 r \ dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^2 \ d\theta = \frac{64}{6}\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{6}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{64}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{32}{3}\pi.$$

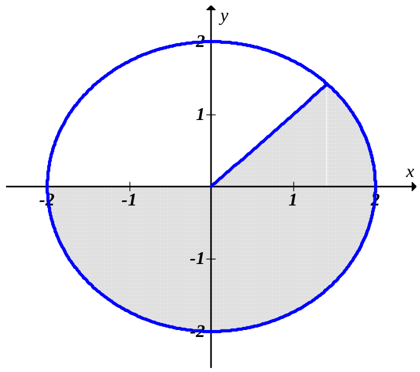
2. Calcular $\int_R\int sen\left(x^2+y^2\right) \ dx\,dy$ onde R é a região da Figura 7.33.



Temos:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2}\left(sen\, r^2\right) r\ \ dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(-\cos r^2\right)\Big|_0^2\ d\theta = \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 4+\frac{1}{2}\right)\ d\theta = \left(-\frac{1}{2}\cos 4+\frac{1}{2}\right)\pi .$$

3. Calcular $\int_R\int \dfrac{dx\, dy}{1+x^2+y^2}$, onde R é a região da Figura 7.34.



Temos para a região do primeiro quadrante:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2}\frac{r\ \ dr\, d\theta}{1+r^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\right)\Bigg|_0^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 5\ \ d\theta = \frac{1}{2}\ln 5\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\ln 5 = \frac{\pi}{8}\ln 5$$

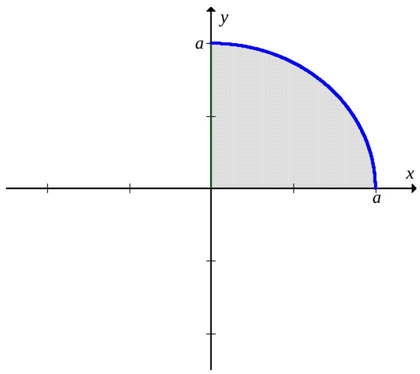
Para a região do terceiro e quarto quadrante temos:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{2}\frac{r\ \ dr\, d\theta}{1+r^2} = \int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\right)\Bigg|_0^a d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}\ln 5\ \ d\theta = \frac{\pi}{2}\ln 5.$$

Portanto, a resposta final fica: $\dfrac{5\pi}{8}\ln 5$.

Observe que também poderia ter sido calculada só uma integral com r variando de 0 a 2 e θ variando de $-\pi$ a $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Calcular $\int_R\int \dfrac{dx\, dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}$ onde R é a região da Figura 7.35.



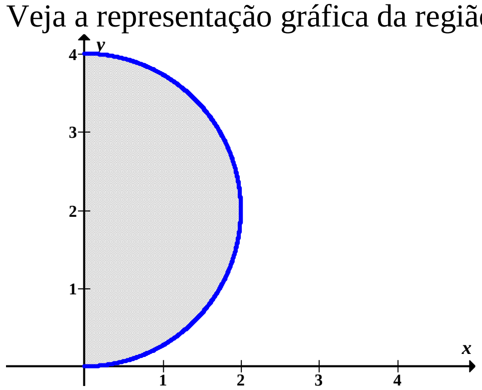
Temos:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}\, d\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_0^a \left(1+r^2\right)^{-3/2} r \;\; dr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\cdot \frac{\left(1+r^2\right)^{-1/2}}{\frac{-1}{2}}\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{2}\frac{-1}{\sqrt{1+r^2}}\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}+1\right).$$

5. Usando coordenadas polares, calcular:

a) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\; dx\, dy$

Veja a representação gráfica da região de integração.



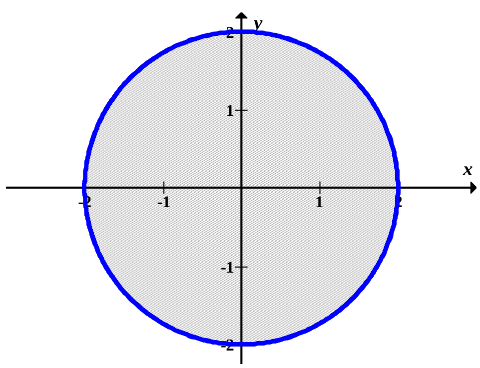
$$x^2 = 4y - y^2$$
$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$
$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$0 \le x \le \sqrt{4y - y^2}$$
$$0 \le y \le 4$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{4\,sen\,\theta} r^2 \cdot r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{4\,sen\,\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \cdot 256\, sen^4\theta \;\; d\theta = 12\pi$$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x}} y \;\; dy\, dx$

Veja a representação gráfica da região de integração.

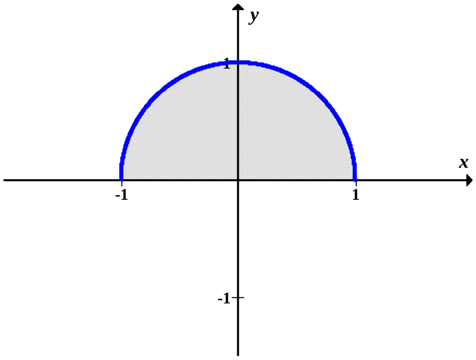


$$-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$$
$$-2 \le x \le 2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\; sen\,\theta \cdot r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} sen\,\theta \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{2} = \int_0^{2\pi} sen\,\theta \cdot \frac{8}{3} \;\; d\theta = -\frac{8}{3} \cos\theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{-8}{3}(1-1) = 0$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y \;\; dy\, dx$

Veja a representação gráfica da região de integração.



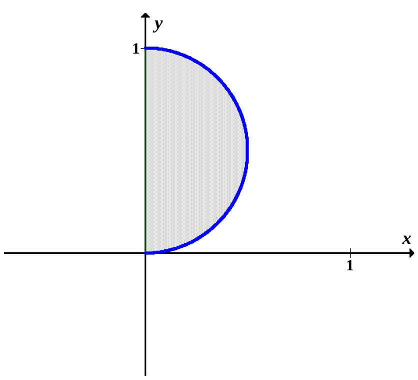
$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$-1 \leq x \leq 1$

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 r \, sen\,\theta \cdot r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{\pi} sen\,\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi} sen\,\theta \cdot \frac{1}{3} \;\; d\theta = \frac{-1}{3}\cos\theta\bigg|_0^{\pi} = \frac{-1}{3}(-1-1) = \frac{-1}{3}(-2) = \frac{2}{3}$$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y-y^2}} y \;\; dx\, dy$

Veja a representação gráfica da região de integração.



$0 \le x \le \sqrt{y - y^2}$
$0 \le y \le 1$

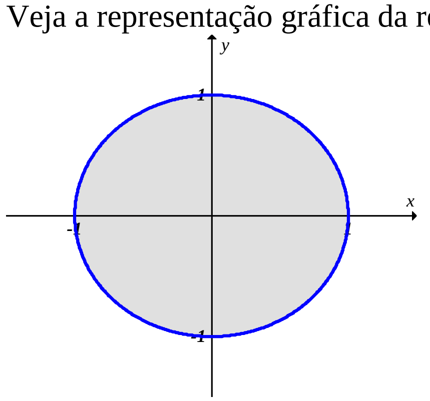
$x^2 = y - y^2$
$x^2 + y^2 - y = 0$
$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{sen\,\theta} r\,sen\,\theta \cdot r\;\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} sen\,\theta\,\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{sen\,\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\,sen^4\theta\;\,d\theta = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\,sen^3\theta \cdot \cos\theta + \frac{3}{4}\int sen^2\theta\;\,d\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{12}\,sen^3\theta \cdot \cos\theta + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\,sen\,\theta \cdot \cos\theta + \frac{1}{2}\,\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\;\,dy\,dx$

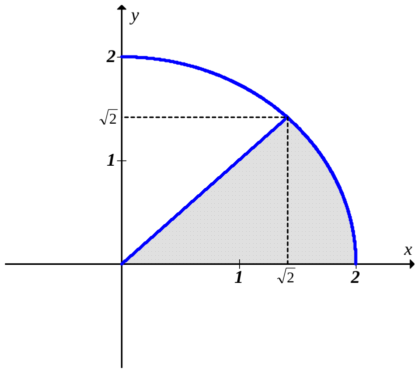
Veja a representação gráfica da região de integração.



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{1 - r^2}\;r\;\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{-1}{2}\cdot\frac{\left(1 - r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\,d\theta = \left.\frac{1}{3}\,\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} x\;\,dx\,dy$

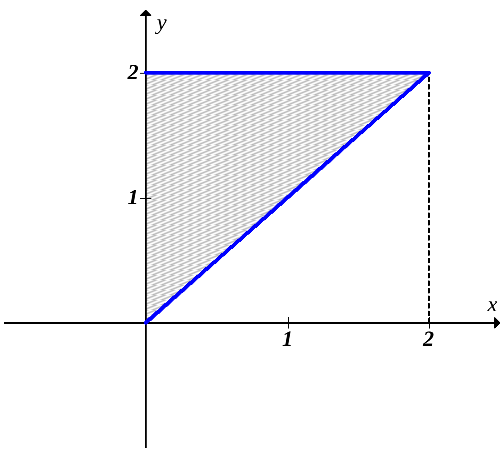
Veja a representação gráfica da região de integração.



$$\int_0^{\pi/4}\int_0^2 r\cos\theta\, r\;\; dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\cos\theta \cdot 8\;\; d\theta = \frac{8}{3}\, sen\,\theta\Big|_0^{\pi/4} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}$$

g) $\int_0^2\int_0^y x\;\; dx\, dy$

Veja a representação gráfica da região de integração.



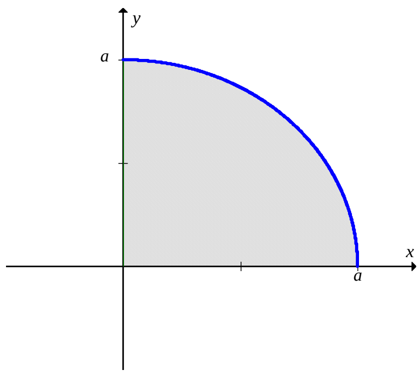
Esta integral tem uma resolução mais simples se resolvida em coordenadas cartesianas, mas é possível resolvê-la em coordenadas polares como segue:

$$\int_0^2\int_0^y x\;\; dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{2}{sen\theta}} r\cos\theta . r dr d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos\theta}{3sen^3\theta} d\theta = \frac{4}{3}.$$

h) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dy\,dx$

Veja a representação gráfica da região de integração.

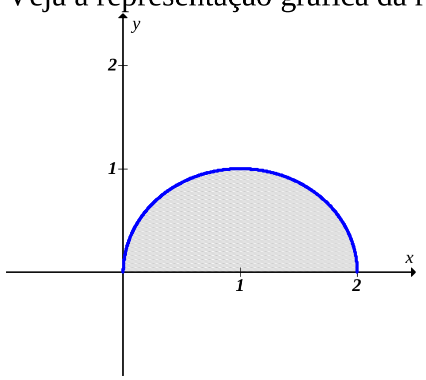


Temos:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\,r\ dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\ d\theta = \left.\frac{a^3}{3}\ \theta\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\,a^3}{6}.$$

i) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\ dy\,dx$

Veja a representação gráfica da região de integração.



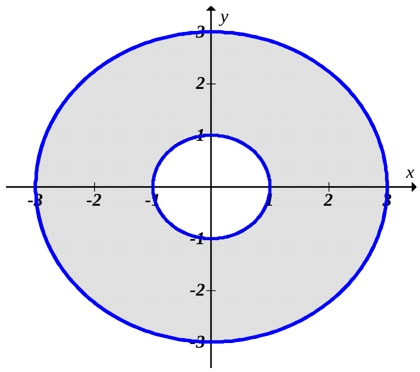
Temos:

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\ dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\ dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\cos\theta\cdot 2^3\cdot\cos^3\theta\ d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{8}{3}\cos^4\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

6. Calcular $\int_R\int \sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy$, sendo R a região delimitada por $x^2+y^2=1\quad e\quad x^2+y^2=9$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Temos:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\cdot r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^3 \; d\theta = \left.\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{26}{3}\cdot 2\pi = \frac{52}{3}\pi\,.$$

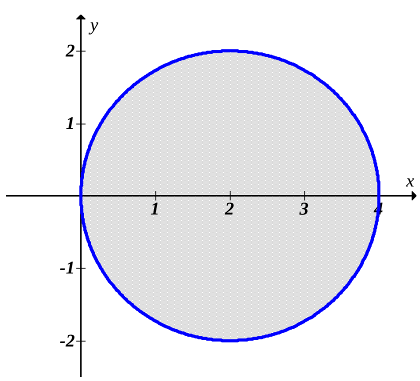
7. Calcular $\int_R\int e^{2\left(x^2+y^2\right)} \;\; dx\, dy$, sendo R o círculo $x^2+y^2\leq 4$.

Temos:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{2r^2} r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{1}{4}e^{2r^2}\right|_0^2 \; d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}e^8-\frac{1}{4}\right)\; d\theta = \left(\frac{1}{4}e^8-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\pi = \frac{\left(e^8-1\right)}{2}\pi\,.$$

8. Calcular $\int_R\int x \;\; dx\, dy$, sendo R a região delimitada por $x^2+y^2-4x=0$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



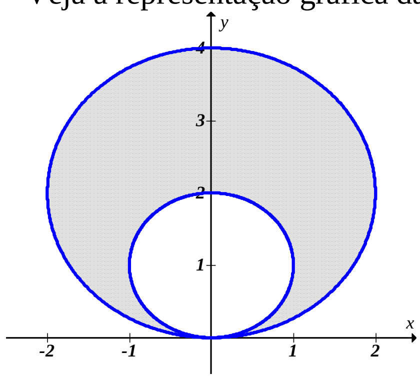
Temos:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} r\cos\theta\, r\ dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{4\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}\cos\theta\cdot 64\cos^3\theta\ d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{64}{3}\cos^4\theta = 8\pi.$$

9. Calcular $\int_R\int (x^2+y^2)\ dx\,dy$, sendo R a região interna à circunferência $x^2+y^2=4y$ e externa à circunferência $x^2+y^2=2y$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Temos:

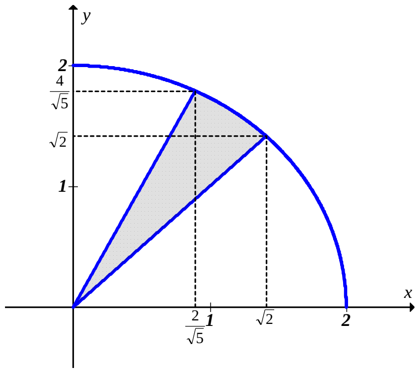
$$\int_0^{\pi}\int_{2sen\,\theta}^{4\,sen\,\theta} r^2\cdot r\ \ dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_{2\,sen\,\theta}^{4\,sen\,\theta} d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{4}\left(256\,sen^4\theta - 16\,sen^4\theta\right)\ d\theta = \int_0^{\pi} 60\,sen^4\theta\ \ d\theta =$$

$$= \frac{45}{2}\pi.$$

10. Calcular $\int_R\int y\ \ dx\,dy$, sendo R a região delimitada por

$y = x \quad , \quad y = 2x \quad e \quad y = \sqrt{4-x^2}$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



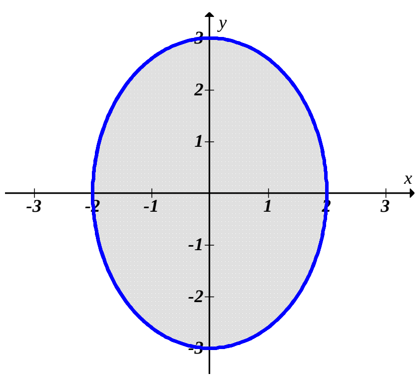
Temos:

$$\int_{\pi/4}^{arc\cos\frac{1}{\sqrt{5}}}\int_0^2 r\,sen\theta\, r\;\;dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{arc\cos 1/\sqrt{5}} sen\theta\,\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 d\theta = \int_{\pi/4}^{arc\cos 1/\sqrt{5}} \frac{8}{3}\,sen\theta d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\cos\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{arc\cos\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{-8\sqrt{5}}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

11. Calcular $\int_R\int xy\;\;dx\,dy$, onde R é delimitada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Para resolver essa questão podemos usar uma dupla transformação como segue:

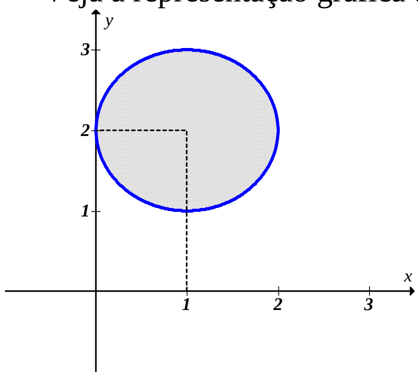
- Usar $x = 2u; y = 3v$, com o Jacobiano igual a 6, resultando a região R' como um círculo centrado na origem de raio igual a 1;
- Usar a transformação para coordenadas polares.

$$\iint_R xydxdy = \iint_{R'} 2u.3v.6dudv =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot rsen\theta\, r\;\;dr\,d\theta = 36\int_0^{2\pi}\cos\theta.sen\theta\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 d\theta = 0.$$

12. Calcular $\int_R \int \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\; dx\, dy$, onde R é a região delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Neste caso vamos fazer a transformação:

$(x-1)=u \quad \therefore \quad x=u+1$

$(y-2)=v \quad \therefore \quad y=v+2$

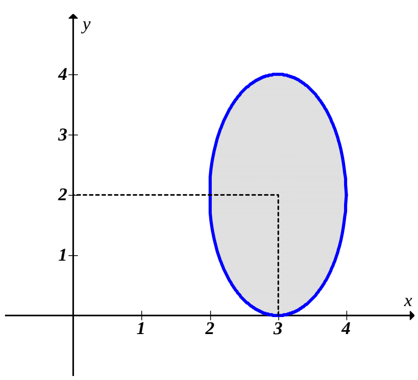
$$Jacobiano = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

E posteriormente a transformação para coordenadas polares.

$$\iint_{R'} \sqrt{u^2+v^2}\; du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r.r.drd\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

13. Calcular $\int_R \int dx\, dy$ sendo R a região delimitada pela elipse $4(x-3)^2+(y-2)^2=4$. Interpretar geometricamente.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Neste caso temos uma tripla transformação:

- Fazendo $u = x - 3, v = y - 2$ temos o Jacobiano igual a 1. A região fica delimitada por uma elipse centrada na origem;
- Fazendo $u = z, v = 2w$ temos o Jacobiano igual a 2. A região fica transformada em um círculo centrado da origem de raio 1.
- A última transformação é o uso das coordenadas polares.

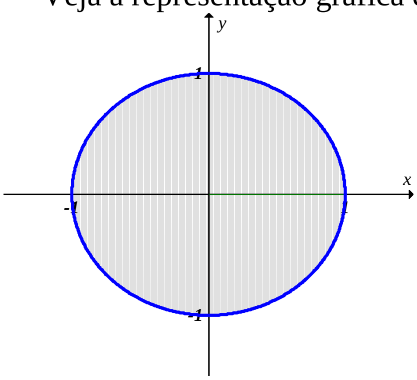
Assim, temos:

$$\iint_R dxdy = \iint_{R'} dudv = \iint_{R''} 2dzdw = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2rdrd\theta = 2\pi.$$

O resultado obtido representa a área da região delimitada pela elipse.

14. $\int_R\int (8 - x - y)\ dx\, dy$, sendo R delimitada por $x^2 + y^2 = 1$. Interpretar geometricamente.

Veja a representação gráfica da região de integração.



$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (8 - r\cos\theta - r\, sen\theta)\, r\ \ dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(8r - r^2\cos\theta - r^2 sen\theta\right)\ dr\, d\theta$$

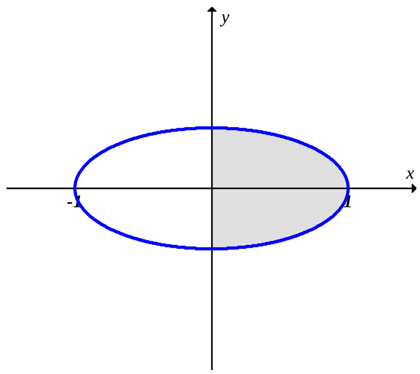
$$= \int_0^{2\pi}\left(4 - \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\, sen\theta\right)\ d\theta = \left(4\theta - \frac{1}{3}\, sen\theta + \frac{1}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 4\cdot 2\pi + \frac{1}{3}(1 - 1) = 8\pi.$$

O valor encontrado representa o volume de um tronco de cilindro.

15. Calcular $\int_R\int \cos\left(x^2 + 9y^2\right)\ dx\, dy$, sendo R dada por $x^2 + 9y^2 \le 1 \quad e \quad x \ge 0$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



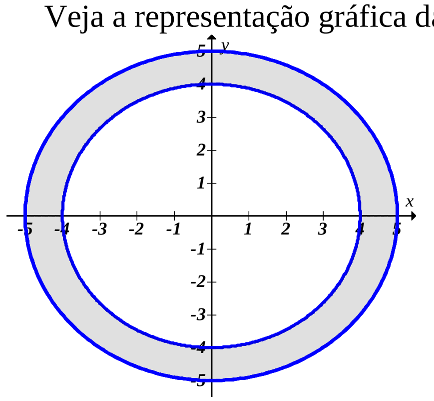
Temos neste caso também uma dupla transformação:

$$\int_{R'}\int \cos\left(u^2+v^2\right)\frac{1}{3}\ du\,dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \cos r^2\cdot\frac{1}{3}\cdot r\ dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}sen1d\theta$$

$$=\frac{1}{6}\pi\ sen\,1.$$

16. Calcular $\int_R\int \ln\left(x^2+y^2\right)\ dx\,dy$, sendo R o anel delimitado por $x^2+y^2=16 \quad e \quad x^2+y^2=25$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



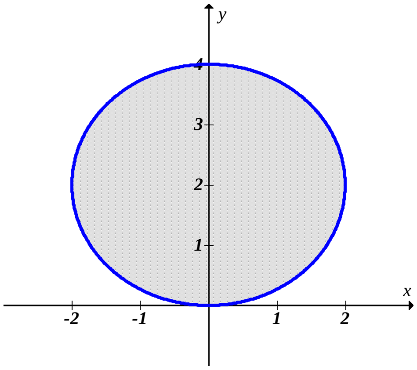
Temos:

$$\int_0^{2\pi}\int_4^5\left(\ln r^2\right)r\ dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\ln r^2 - r^2\Big|_4^5\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(25\ln 25-25-16\ln 16+16\right)\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(25\ln 25-16\ln 16-9\right)\ d\theta =$$

$$=\frac{1}{2}\left(25\ln 25-16\ln 16-9\right)\cdot 2\pi = \frac{1}{2}\left(25\cdot 2\ln 5-16\cdot 2\ln 4-9\right)\cdot 2\pi = 2\pi\left(25\ln 5-16\ln 4-9/2\right).$$

17. Calcular $\iint_R y\ \ dx\,dy$ sendo R o círculo $x^2+y^2-4y\le 0$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Temos:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{4\,sen\,\theta} r\,sen\theta\; r\;\; dr\; d\theta = \int_0^{\pi} sen\theta.\frac{r^3}{3}\Big|_0^{4sen\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{64}{3}sen^4\theta d\theta = 8\pi.$$

18. Calcular $\int_R\int\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$ onde R é dada por:

a) Círculo centrado na origem de raio a;

b) Círculo centrado em $(a, 0)$ de raio a;

c) Círculo centrado em $(0, a)$ de raio a.

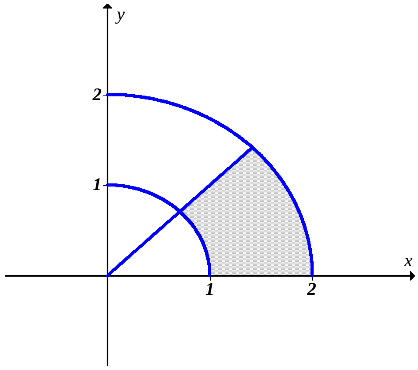
a) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\cdot r\;\; dr\; d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{a} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^4}{4}\; d\theta = \frac{a^4}{4}\;\theta\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi\, a^4}{2}\;\;.$$

b) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\cdot r\;\; dr\; d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{4}a^4\cos^4\theta\;\; d\theta = \frac{3a^4\pi}{2}.$$

c) $$\int_0^{\pi}\int_0^{2a\,sen\,\theta} r^2 r\;\; dr\; d\theta = \int_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\,sen\theta} d\theta = \int_0^{\pi}\frac{16}{4}a^4 sen^4\theta\;\; d\theta = \frac{3a^4\pi}{2}.$$

19. Calcular $\int_R \int x \; dy\, dx$ onde R é a região do primeiro quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad y = x \quad e \quad y = 0$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



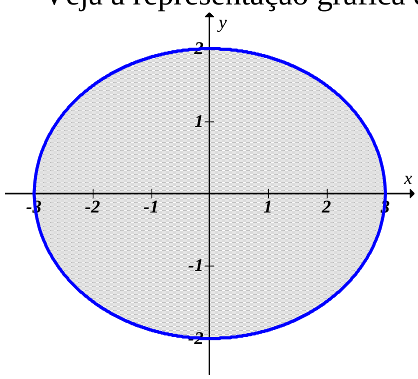
Temos:

$$\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r\cos\theta\, r \; dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{3}\cdot 7 \; d\theta = \frac{7}{3}\, sen\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{7}{3}\, sen\frac{\pi}{4} = \frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

20. Calcular $\int_R \int \left(36 - 4x^2 - 9y^2\right) \; dx\, dy$ onde R é a região delimitada pela elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Usamos:

$x = 3u$

$y = 2v$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 6$$

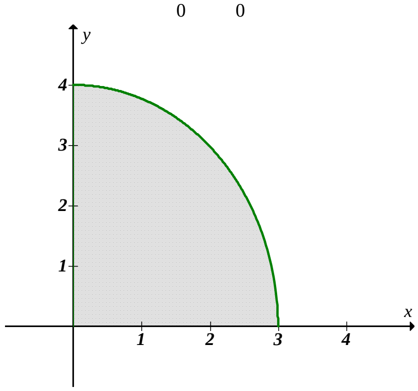
A região R se transforma em R', delimitada por $u^2+v^2=1$.

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\int_{R'}\int\left(36-4\cdot 9u^2-9\cdot 4v^2\right)\cdot 6\ \ du\,dv=\int_{R'}\int\left(36-36u^2-36v^2\right)\cdot 6\ \ du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(36-36r^2\right)\cdot 6\cdot r\ \ dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(216\cdot\frac{r^2}{2}-216\cdot\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1\ d\theta=\int_0^{2\pi}54d\theta=108\pi.$$

21. Calcular $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{144-9y^2}}\left(144-16x^2-9y^2\right)\ dx\,dy$:



Usamos:

$x=3u$

$y=4v$

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=12$

A região R se transforma em R', que é a região do primeiro quadrante delimitada por $u^2+v^2=1$ e os eixos coordenados.

Passando para coordenadas polares, temos:

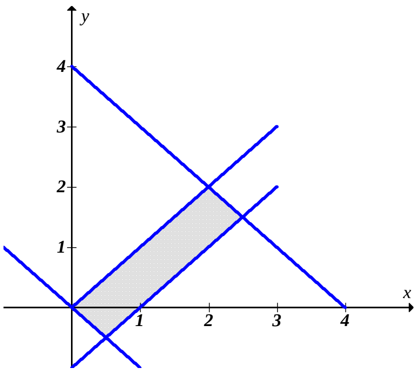
$$\int_{R'}\int\left(144-16\cdot 9u^2-9\cdot 16v^2\right)\cdot 12\ \ du\,dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\left(144-144r^2\right)\cdot 12\cdot r\ \ dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\left(1728r-1728r^3\right)\ dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1728\cdot\frac{r^2}{2}-1728\cdot\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1728\cdot\frac{1}{2}-1728\cdot\frac{1}{4}\right)\ d\theta=216\pi.$$

22. Calcular $\int_R \int (x+y)\ dx\,dy$, sendo R a região delimitada por

$x+y=4 \quad , \quad x+y=0 \quad , \quad y-x=0 \quad e \quad y-x=-1$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Usamos:

$u=x+y, \quad v=y-x$ ou, isolando x e y, $y=\frac{1}{2}(u+v), x=\frac{1}{2}(u-v)$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}$$

A região R se transforma no retângulo delimitado por $u=0, u=4, v=0, v=-1$.
Temos,

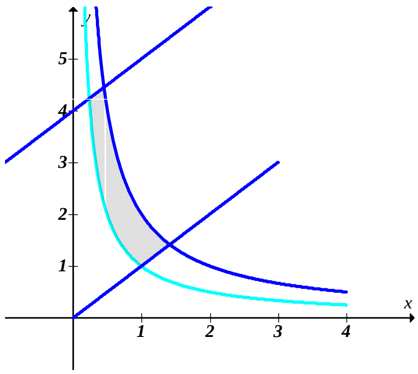
$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{4} \left(\frac{1}{2}(u-v)+\frac{1}{2}(u+v)\right)\frac{1}{2}dudv=$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{4} u\,1/2\ du\,dv=\int_{-1}^{0} 1/2\ \frac{u^2}{2}\bigg|_0^4\ dv=\int_{-1}^{0}\frac{16}{4}\ dv=4v\Big|_{-1}^{0}=4.$$

23. Calcular $\int_R \int (x+y)\ dx\,dy$ onde R é a região do primeiro quadrante delimitada por

$xy=1 \quad , \quad xy=2 \quad , \quad y=x \quad e \quad y=4+x$.

Veja a representação gráfica da região de integração.



Usamos:

$$u = xy, \quad v = y - x$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = y + x$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{y+x}$$

A região R se transforma no retângulo delimitado por $u = 1, u = 2, v = 0, v = 4$

Temos:

$$\int_0^4 \int_1^2 (x+y) \cdot \frac{1}{x+y} \; du\, dv = \int_0^4 u\Big|_1^2 \, dv = 4.$$

CAPÍTULO 7
7.10 - EXERCÍCIOS
pág. 270 - 272

Nos exercícios de 1 a 12, calcular o volume dos sólidos delimitados pelas superfícies dadas.

Observação: Para os exercícios de 1 a 12, haverá uma escolha de uma região de integração e a partir dessa escolha tem-se a delimitação do sólido superiormente e inferiormente, entretanto a escolha apresentada não é única.

1. $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 4$

Vamos considerar a região de integração no plano *xz*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo plano $y = 4$ e inferiormente pela calha $y = x^2$, sendo a região de integração dada por:

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

Considerando-se a simetria do sólido vamos definir o volume como:

$$V = 2\int_0^4\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx\, dz$$

Temos:

$$\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^4 \frac{16}{3}\, dz = \frac{16}{3} z \Bigg|_0^4 = \frac{64}{3}$$

Portanto,

$$V = 2 \cdot \frac{64}{3}$$

$V = \dfrac{128}{3}$ unidades de volume.

2. $z = 4x^2$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pela calha $z = 4x^2$ e a base fica em $z=0$, definida como

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

Assim,

$$V = \int_0^4 \int_0^2 4x^2 \, dx \, dy$$

$$\int_0^2 4x^2 \, dx = \left. \frac{4x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{32}{3}$$

$$\int_0^4 \frac{32}{3} \, dy = \left. \frac{32}{3} y \right|_0^4 = \frac{128}{3}$$

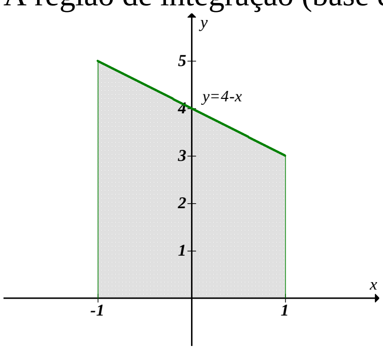
Portanto, $V = \int_0^4 \int_0^2 4x^2 \, dx \, dy = \frac{128}{3}$ unidades de volume.

3. $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $x + y = 4 \quad e \quad y = 0$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pela calha $z = 1 - x^2$ e inferiormente por $z = 0$. A região de integração é dada por:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 4 - x \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

A região de integração (base do sólido) pode ser visualizada na figura que segue:



O volume é dado por:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_0^{4-x} \left(1 - x^2\right) dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x-4)\left(x^2 - 1\right) dx = \frac{16}{3} \text{ unidades de volume.}$$

4. $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$.

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. A região de integração, descrita em coordenadas polares, é dada por:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume é dado por

$$V = \int_R \int \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \;\; dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \left.\frac{1}{4}\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ unidades de volume.}$$

5. $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 8$, $z = 0$.

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo plano $z = 8 - y$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. A região de integração, descrita em coordenadas polares, é dada por:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume é dado por

$$V = \int_R \int \left(8 - y\right) dx\, dy$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(8 - r\, sen\theta\right) r\, dr\, d\theta$$

Sendo que $\int_0^2 \left(8r - r^2 sen\theta\right) dr = 8\frac{r^2}{2} - sen\theta \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2 = 4 \cdot 4 - sen\theta \cdot \frac{8}{3} = 16 - \frac{8}{3}\, sen\theta$

e

$$V = \int_0^{2\pi} \left(16 - \frac{8}{3} sen\theta\right) d\theta = 16\theta + \left.\frac{8}{3}\cos\theta\right|_0^{2\pi} = 16 \cdot 2\pi = 32\pi \text{ unidades de volume.}$$

6. $z = x^2 + 1, z = 0$, $y = 0$, $x = 0, x = 4 \quad e \quad y = 5$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pela calha $z = x^2 + 1$ e inferiormente por $z = 0$. A região de integração é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Assim o volume é dado por

$$V = \int_0^5 \int_0^4 \left(x^2 + 1\right) dx\, dy$$

Como

$$\int_0^4 \left(x^2 + 1\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} + x \right|_0^4 = \frac{76}{3}$$

temos,

$$\int_0^5 \frac{76}{3}\, dy = \left.\frac{76}{3} y \right|_0^5 = \frac{380}{3} \text{ unidade de volume}.$$

7. $z = 9 - x^2 - y^2 \quad e \quad z = x^2 + y^2$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ e inferiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$. A projeção da intersecção entre os dois parabolóides é circular centrada na origem e tem raio $3/\sqrt{2}$, descrita em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 3/\sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume é dado por:

$$V = \int \int_R \left(9 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

Resolvendo temos:

$$\text{V} = \int_0^{2\pi} \int_0^{3/\sqrt{2}} \left(9 - 2r^2\right) r \; dr\, d\theta$$

Como

$$\int_0^{3/\sqrt{2}} \left(9-2r^2\right) r \ dr = \frac{81}{8}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{81}{8} d\theta = \frac{81}{4}\pi$$

Portanto, V= $\frac{81}{4}\pi$ unidades de volume.

8. $z = 16 - 2x^2 - y^2 \qquad e \quad z = x^2 + 2y^2$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo paraboloide $z = 16 - 2x^2 - y^2$ e inferiormente pelo paraboloide $z = x^2 + 2y^2$. A projeção da intersecção entre os dois parabolóides é circular centrada na origem de raio $4/\sqrt{3}$, descrita em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 4/\sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume é dado por:

$$V = \int_R \int \left(16 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2\right) dx\, dy = \int_R \int \left(16 - 3x^2 - 3y^2\right) dx\, dy$$

Em coordenadas polares temos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{4/\sqrt{3}} \left(16 - 3r^2\right) r \ dr\, d\theta$$

$$\int_0^{4/\sqrt{3}} \left(16r - 3r^3\right) dr = \left. \frac{16r^2}{2} - \frac{3r^4}{4} \right|_0^{4/\sqrt{3}} = \frac{64}{3}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{64}{3}\, d\theta = \frac{64}{3} \cdot 2\pi = \frac{128}{3}\pi$$ unidades de volume.

9. $x^2 + y^2 = 4 \quad e \quad z^2 + x^2 = 4$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Considerando-se a simetria do sólido em relação aos planos coordenados, vamos calcular a parte do primeiro octante, para posteriormente encontrar o volume total multiplicando por oito. Dessa forma o sólido no primeiro octante será delimitado superiormente pela superfície $z = \sqrt{4 - x^2}$ e inferiormente pelo plano coordenado $z = 0$. A projeção, no primeiro octante é definida pela quarta parte do círculo $x^2 + y^2 = 4$, descrita em coordenadas cartesianas como:

$$\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Assim o volume é dado por:

$$V = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\ dy\, dx$$

Calculando temos:

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\ dy = \sqrt{4-x^2}\ y \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} = 4-x^2$$

$$\int_0^2 \left(4-x^2\right) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

$V = 8 \cdot \dfrac{16}{3} = \dfrac{128}{3}$ unidades de volume.

10. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 16$ $\quad e \quad$ $z = 10 + x$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo plano inclinado $z = 10 + x$, inferiormente pelo plano coordenado $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$. A região de integração é o círculo centrado na origem com raio 4. Descrita em descrita em coordenadas polares, a região de integração é dada por:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume será:

$$V = \int_R \int \left(10 + x\right) dx\, dy$$

Resolvendo temos:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 (10 + r\cos\theta)\, r \; dr\, d\theta$$

$$\int_0^4 (10r + r^2\cos\theta)\, d\theta = \left. \frac{10r^2}{2} + \cos\frac{r^3}{3} \right|_0^4 = 5\cdot 16 + \cos\theta\cdot\frac{64}{3} = 80 + \frac{64}{3}\cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(80 + \frac{44}{3}\cos\theta\right) d\theta = 80\,\theta + \left.\frac{44}{3}\, sen\theta \right|_0^{2\pi} = 80\cdot 2\pi = 160\pi$$

Portanto, o volume é igual a 160π unidades de volume.

11. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0, \qquad z = 0, \qquad z = 5y.$

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*. Dessa forma o sólido será delimitado superiormente pelo plano $z = 5y$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro centrado em (2,3) com raio 3. A região de integração é o círculo $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Fazendo a transformação $u = x-2, v = y-3$, temos

$x = u + 2$

$y = v + 3$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

A região se transforma num círculo de centro na origem e raio 3, que pode ser descrita em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim o volume é dado por:

$$V = \int_R\int 5y\,dx\,dy = \int_{R'}\int 5(v+3)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 5\,(r\, sen\theta + 3)\, r \; dr\, d\theta = 5\int_0^{2\pi} (9sen\theta + 27/2)\, d\theta = 135\pi \text{ unidades de volume.}$$

12. $z = 16 - x^2 - 3y^2$, $z = 4$.

Vamos considerar a região de integração no plano *xy*.

O sólido está delimitado superiormente pelo paraboloide $z = 16 - x^2 - 3y^2$ e inferiormente pelo plano $z = 4$. A projeção da intersecção entre o parabolóide e o plano vai estabelecer a região de integração que será delimitada pela elipse $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$. Para resolver a integral vamos usar uma dupla transformação como segue:

$x = \sqrt{12}u$

$y = 2v$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2\sqrt{12}$$

A região R se transforma no círculo $u^2 + v^2 \leq 1$. Temos,

$$\int_R\int \left(16 - x^2 - 3y^2 - 4\right) dx\,dy$$

$$\int_R\int \left(12 - x^2 - 3y^2\right) dx\,dy = \int_{R'}\int \left(12 - 12u^2 - 12v^2\right)\cdot 2\sqrt{12}\; du\,dv$$

Passando para coordenadas polares, vem:

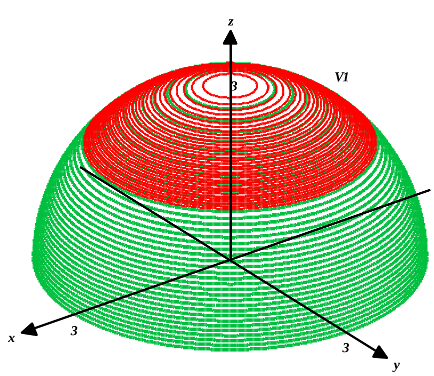
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(12 - 12r^2\right)\cdot 2\sqrt{2}\cdot r\;\; dr\,d\theta$$

$$\int_0^1 \left(12r - 12r^3\right) dr = \frac{12r^2}{2} - \frac{12r^4}{4}\Bigg|_0^1 = 6 - 3 = 3$$

$$\int_0^{2\pi} 6\sqrt{12}\; d\theta = 24\sqrt{3}\,\pi \text{ unidades de volume.}$$

13. Calcular o volume de parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que está entre os planos $z = 0 \quad e \quad z = 2$.

A Figura que segue mostra, em vermelho, a calota acima do plano $z = 2$. O volume pode ser calculado tomando o volume do hemisfério menos o volume da calota V1.



Temos:

$$V_1 = \int_R\int\left(\sqrt{9-x^2-y^2}-2\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\left(\sqrt{9-r^2}-2\right)r\ \ dr\,d\theta$$

Resolvendo temos:

$$\int_0^{\sqrt{5}}\left(\left(9-r^2\right)^{1/2}\cdot r-2r\right)dr = -\frac{1}{2}\frac{\left(9-r^2\right)^{3/2}}{3/2}-\frac{2r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{5}} = -\frac{1}{3}\cdot 4^{3/2}-5+\frac{1}{3}\cdot 9^{3/2} = \frac{4}{3}$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

$$V_{hemisfério} = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\sqrt{9-r^2}\cdot r\ \ dr\,d\theta$$

$$\int_0^3\left(9-r^2\right)^{1/2} r\ \ dr = -\frac{1}{2}\frac{\left(9-r^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 9^{3/2} = \frac{1}{3}\cdot 27 = 9$$

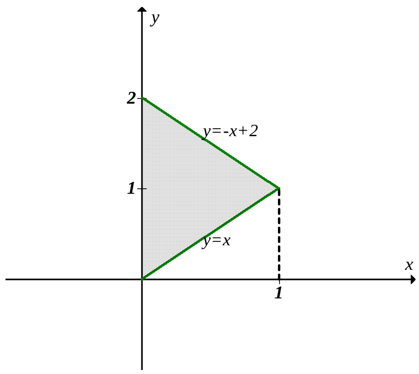
$$V_{hemisfério} = 9\cdot 2\pi = 18\pi$$

Portanto o volume solicitado é dado por:

$$V = 18\pi-\frac{8\pi}{3} = \frac{(54-8)\pi}{3} = \frac{46\pi}{3}\ \text{ unidades de volume.}$$

14. Calcular o volume do sólido com uma base triangular no plano xy formado por $0(0,0)$, $A(1,1)$ e $B(0,2)$, limitado superiormente por $z = 2x$ e lateralmente pelo contorno da base dada.

O sólido dado é delimitado superiormente pelo plano $z = 2x$ e inferiormente por $z = 0$. A região de integração pode ser visualizada na figura que segue.

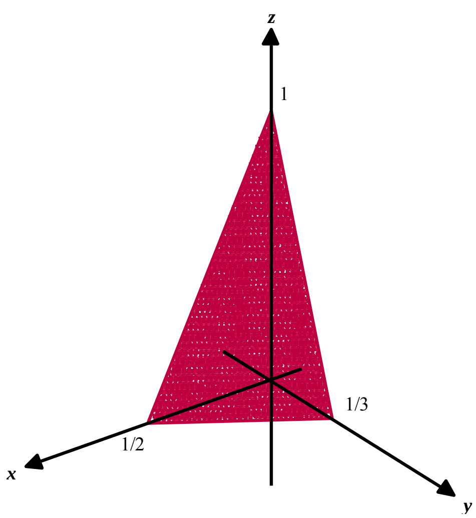


O volume é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_R\int 2x \ \ dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_x^{-x+2} 2x \ \ dy\, dx \\ &= \int_0^1 (-4x^2 + 4x)dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

15. Calcular o volume do sólido no 1º. octante, delimitado por $z = 1 - 2x - 3y$ e os planos coordenados.

A Figura que segue apresenta um esboço do sólido.



A região de integração é definida como:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1-3y}{2} \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, o volume é dado por:

$$V = \int_0^{1/3}\int_0^{\frac{1-3y}{2}} (1-2x-3y)\,dx\,dy = \int_0^{1/3} (x - x^2 - 3yx)\,\Big|_0^{(1-3y)/2} dy = \int_0^{1/3} \frac{(3y-1)^2}{4}\,dy = \frac{1}{36}.$$

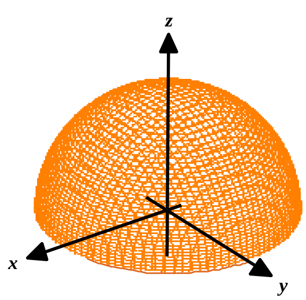
Nos exercícios 16 a 19, a integral iterada representa o volume de um sólido. Descrever o sólido.

16. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$

O sólido pode ser descrito analiticamente como:

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

Trata-se de um hemisfério de raio 1, conforme mostra a figura a seguir.

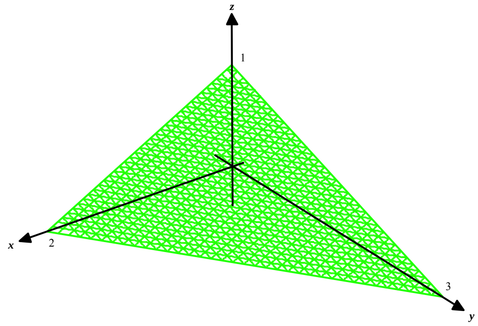


17. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right) dy\,dx$

Temos um tetraedro delimitado por $z = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y$ e pelos planos coordenados.

Segue a descrição analítica e gráfica.

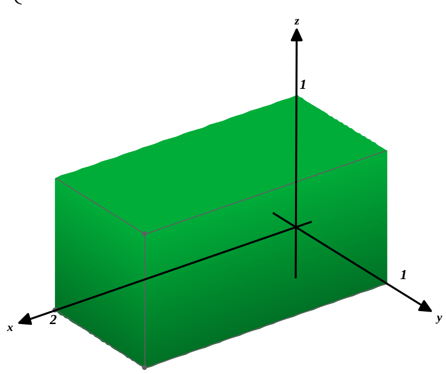
$$\begin{cases} 0 \le y \le 3 - \dfrac{3}{2}x \\ 0 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y \end{cases}$$



18. $\int_0^1 \int_0^2 dx\,dy$

Temos o volume de um paralelepípedo retângulo com dimensões $2 \times 1 \times 1$.
Veja a seguir a descrição analítica e a representação gráfica.

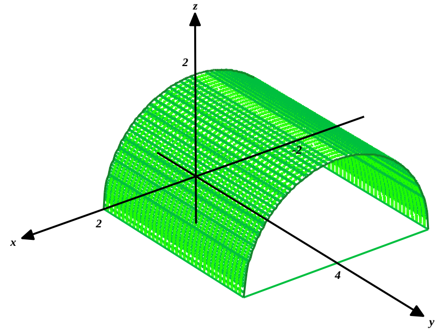
$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$



19. $\int_0^4 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dxdy$

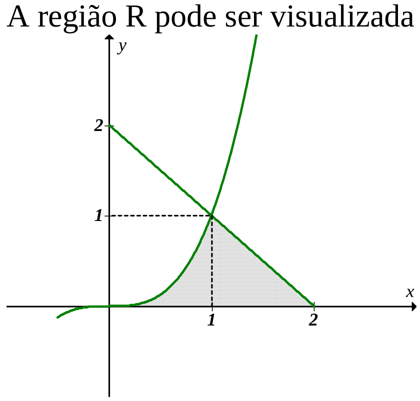
É uma calha circular de raio 2 e altura 4.
Veja a seguir a descrição algébrica e a representação gráfica.

$$\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ -2 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$



20. Determinar a área da região R delimitada pelas curvas $y = x^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

A região R pode ser visualizada na figura a seguir.



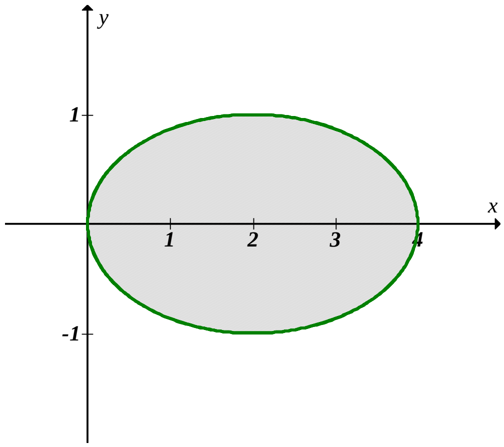
A área é dada por:

$$A = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(2 - y - y^{1/3}\right) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^{4/3}}{4/3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} \text{ unidades de área.}$$

21. Calcular a área da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$.

Estamos diante de um elipse centrada em (2,0) e semi eixos 2 e 1. Veja a Figura que segue.



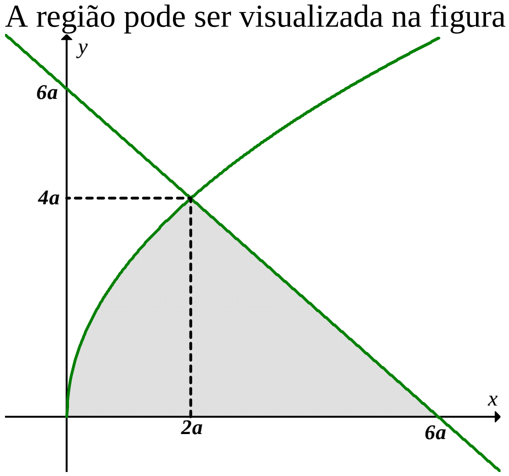
Para fazer o cálculo vamos realizar uma dupla transformação:

$$R \to R' : \begin{cases} x - 2 = 2u \\ y = v \\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2 \end{cases} \qquad R' \to R'' : \begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = rsen\theta \\ \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = r \end{cases}$$

Assim, a área da elipse é dada por:

$A = \iint\limits_R dxdy = \iint\limits_{R'} 2dudv = \iint\limits_{R''} 2rdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 2rdrd\theta = 2\pi$ unidades de área.

22. Calcular a área da região do 1º. quadrante delimitada pelas curvas $y^2 = 8ax$, $x + y = 6a,\ y = 0$, sendo a uma constante positiva.
A região pode ser visualizada na figura que segue.

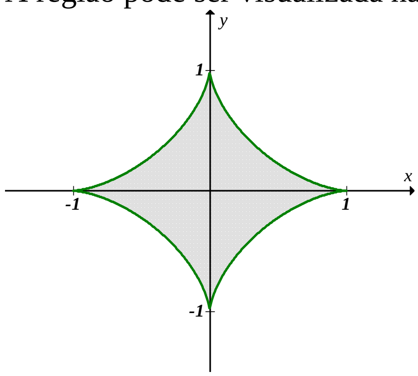


A área é dada por:

$$A = \int_0^{4a} \int_{y^2/8a}^{6a-y} dxdy = \int_0^{4a} x\Big|_{y^2/8a}^{6a-y} dy = \int_0^{4a} \left(6a - y - \frac{y^2}{8a}\right) dy$$

$$= \left(6ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{24a}\right)\Bigg|_0^{4a} = \frac{40a^2}{3} \text{ unidades de área.}$$

23. Calcular a área da região delimitada pela curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
A região pode ser visualizada na figura a seguir.



Para resolver vamos fazer uma dupla transformação:

$$R \to R' : \begin{cases} x^{1/3} = u \\ y^{1/3} = v \\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 9u^2v^2 \end{cases} \qquad R' \to R'' = \begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = rsen\theta \\ \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = r \end{cases}$$

Assim a área solicitada é dada por:

$$A = \iint_R dxdy = \iint_{R'} 9u^2v^2 dudv = \iint_{R''} 9r^5 \cos^2\theta\, sen^2\theta\, drd\theta$$

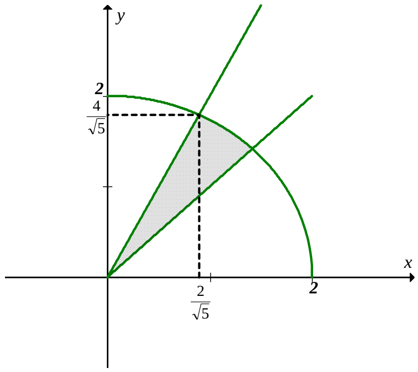
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 9r^5 \cos^2\theta\, sen^2\theta\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{6} \cos^2\theta\, sen^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{6} (\cos\theta\, sen\,\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{8}\pi \text{ unidades de área.}$$

24. Calcular a área da região delimitada por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x$ e $y = 2x$.

A região pode ser visualizada na figura que segue:

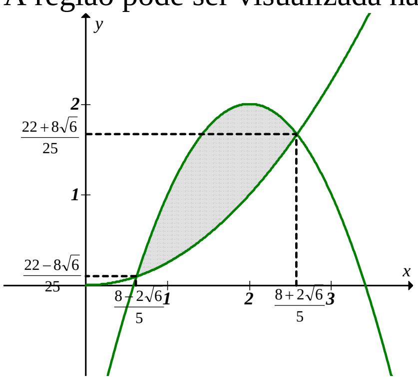


Usando coordenadas polares temos:

$$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg 2}\int_{0}^{2} r\ dr\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg 2} 2d\theta = 2\left(arc\, tg 2-\frac{\pi}{4}\right) \text{unidades de área.}$$

25. Calcular a área da região delimitada por $y=2-(x-2)^2$ e $y=\dfrac{x^2}{4}$.

A região pode ser visualizada na figura que segue:

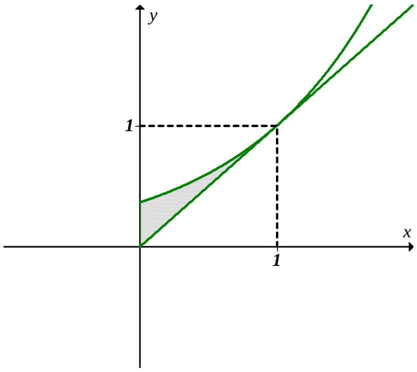


Portanto, a área é dada por:

$$A=\int_{\frac{8-2\sqrt{6}}{5}}^{\frac{8+2\sqrt{6}}{5}}\int_{\frac{x^2}{4}}^{2-(x-2)^2} dy\, dx=\int_{\frac{8-2\sqrt{6}}{5}}^{\frac{8+2\sqrt{6}}{5}}\left(-\frac{5x^2}{4}+4x-2\right)\, dx=\frac{16\sqrt{6}}{25} \text{ unidades de área.}$$

26. Calcular a área da região delimitada por $y=e^{x-1}$, $y=x$ e $x=0$.

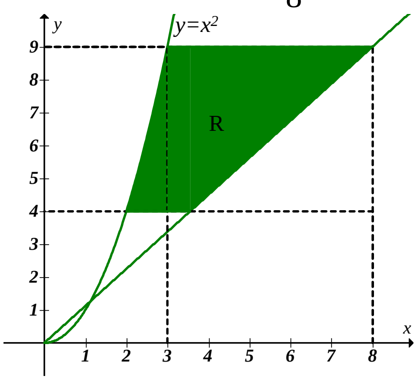
A região pode ser visualizada na figura que segue:



Temos que:

$$A=\int_0^1\int_x^{e^{x-1}} dy\,dx=\int_0^1 y\,\Big|_x^{e^{x-1}} dx=\int_0^1 (e^{x-1}-x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\text{ unidades de área.}$$

27. Calcular a área da região R mostrada na figura 7.55.
A figura está representada a seguir, observando-se que a região está delimitada por $y=x^2$ e pela reta $y=\frac{9}{8}x$ que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(8,9)$.



Temos:

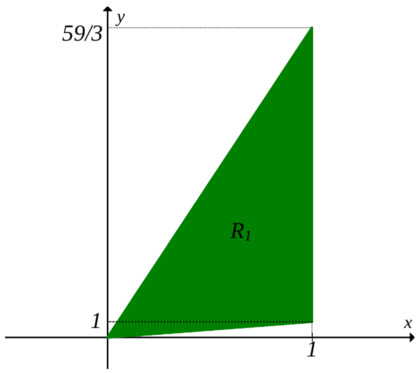
$$A=\int_4^9\int_{\sqrt{y}}^{\frac{8}{9}y} dx\,dy$$

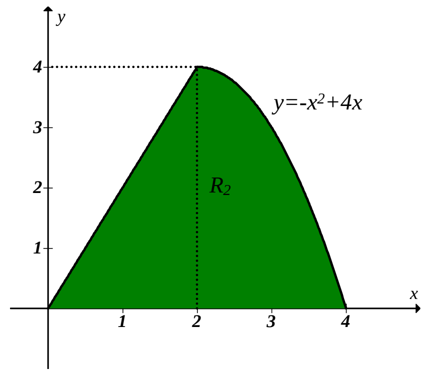
Resolvendo as integrais temos:

$$\int_{\sqrt{y}}^{\frac{8}{9}y} dx = x\,\Big|_{\sqrt{y}}^{\frac{8}{9}y}=\frac{8}{9}y-\sqrt{y}$$

$$A=\int_4^9\left(\frac{8}{9}y-\sqrt{y}\right)dy=\frac{146}{9}\text{ unidades de área.}$$

28. Mostrar que as regiões R_1 e R_2, mostradas na figura 7.56 têm a mesma área.
As duas regiões estão apresentadas na figura que segue:





Cálculo da área da Região R_1, observando que esta região está delimitada por $y = x$;
$y = \frac{59}{3}x$ e $x = 1$.
Temos:

$$A_{R1} = \int_0^1 \int_x^{\frac{59}{3}x} dy\, dx = \int_0^1 y\Big|_x^{(59/3)x} dx = \int_0^1 \left(\frac{59}{3}x - x\right) dx$$

$$\frac{56x^2}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{28}{3} \text{ unidades de área.}$$

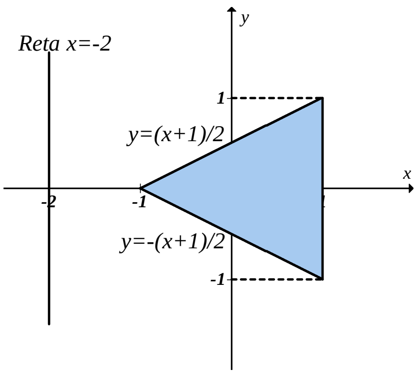
A Região R_2 está delimitada por $y = 2x$, $y = -x^2 + 4x$, o eixo do x entre zero e quatro.
Assim, temos:

$$A_{R2} = \int_0^2 \int_0^{2x} dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{-x^2+4x} dy\, dx =$$

$$\int_0^2 2x \; dx + \int_2^4 \left(-x^2 + 4x\right) \; dx = 4 + \frac{16}{3} = \frac{28}{3} \text{ unidades de área.}$$

29. Uma lâmina tem a forma do triângulo de vértices $(-1,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$. Determinar a massa e o centro de massa da lâmina se:
a) sua densidade de massa é constante.
b) sua densidade de massa no ponto $P(x, y)$ é proporcional à distância deste ponto à reta $x = -2$.

A lâmina é apresentada na Figura que segue:



Observar que a lâmina está delimitada por $y = -(x+1)/2$; $y = (x+1)/2$ e $x = 1$.

Solução do item (a).
Cálculo da massa:

$$m = \int_R \int k \; dx\, dy$$

$$= k \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} dy\, dx$$

$$= k \int_{-1}^{1} (x+1) \; dx = 2k$$

Cálculo das coordenadas do centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} k \; x \; dy\, dx = \frac{1}{2k} \cdot k \cdot \int_{-1}^{1} (x^2 + x) \; dx = \frac{1}{2k} \cdot k \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} k \; y \; dy\, dx = 0.$$

Solução do item (b)
Cálculo da massa:

$$m = k \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} (x+2) \; dy\, dx$$

$$= k \int_{-1}^{1} (x+1)(x+2) \; dx = k \cdot \frac{14}{3}.$$

Cálculo das coordenadas do centro de massa:

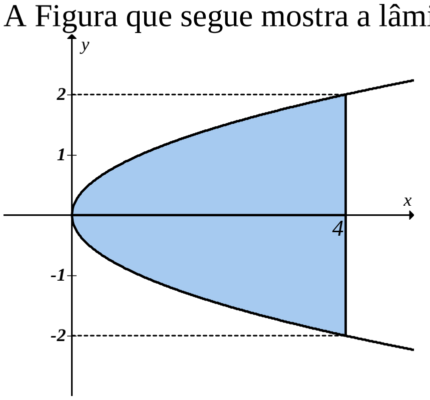
$$\bar{x} = \frac{1}{m} k \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} x(x+2)\ dy\ dx = \frac{1}{m} k \int_{-1}^{1} x(x+1)(x+2)\ dx = \frac{3}{14k} \cdot k \cdot 2 = \frac{3}{7}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} k \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-x-1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} y(x+2)\ dy\ dx = \frac{3}{4k} \cdot k \int_{-1}^{1} 0\ \ dx = 0.$$

30. Uma lâmina tem a forma da região plana R delimitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 4$. Sua densidade de massa é constante. Determinar:

a) o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo dos x;
b) o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo dos y.

A Figura que segue mostra a lâmina dada.



Cálculo do item (a):

$$I_x = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} k\left(y^2\right)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-2}^{2} k\left(4y^2 - y^4\right)\ dy = \frac{128}{15}k.$$

Cálculo do item (b):

$$I_y = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} k\ x^2\ dx\ dy$$

$$= \int_{-2}^{2} k \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{y^6}{3}\right)\ dy = \frac{512}{7}k.$$

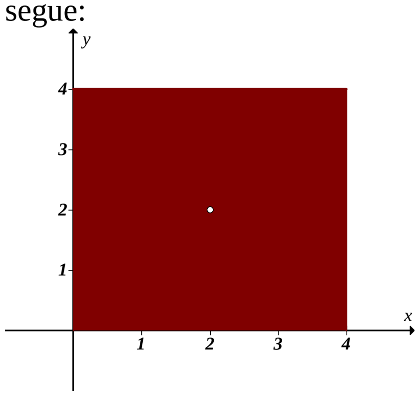
31. Calcular a massa de uma lâmina com a forma de um círculo de raio *3 cm*, se a sua densidade de massa num ponto $P(x,y)$ é proporcional ao quadrado da distância desse ponto ao centro do círculo acrescida de uma unidade.

Se considerarmos o círculo centrado na origem temos que $P(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.
Portanto, a massa é dada por:

$$m = k\int_R\int \left(x^2 + y^2 + 1\right)\ dx\, dy$$
$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(r^2 + 1\right) r\ \ dr\, d\theta$$
$$= \frac{99}{2}k\pi.$$

32. Calcular o centro de massa de uma lâmina plana quadrada de *4 cm* de lado, com densidade de massa constante.

Podemos considerar a lâmina alocada no sistema cartesiano como mostra a Figura que segue:



Assim, temos que o cálculo da massa é dado por:

$$m = k\int_0^4\int_0^4\ dx\, dy = k\int_0^4 x\Big|_0^4\ dy = k\int_0^4 4\ \ dy = 4ky\Big|_0^4 = 16k.$$

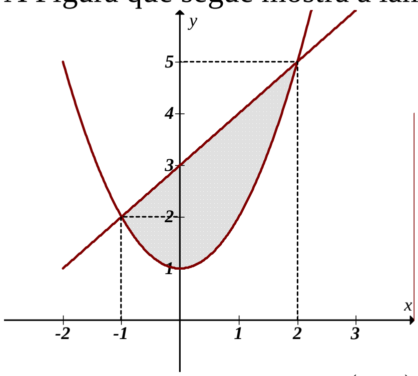
Cálculo do centro de massa dado por:

$$\bar{x} = \frac{k}{16k}\int_0^4\int_0^4 x\ \ dx\, dy = \frac{1}{16}\int_0^4 8\ \ dy = 2$$
$$\bar{y} = \frac{k}{16k}\int_0^4\int_0^4 y\ \ dx\, dy = 2$$

O ponto encontrado (2,2) é o centro geométrico da lâmina (ver figura).

33. Uma lâmina plana tem a forma da região delimitada pelas curvas $y = x^2 + 1$ *e* $y = x + 3$. Sua densidade de massa no ponto $P(x, y)$ é proporcional à distância deste ponto ao eixo dos *x*. Calcular:
a) a massa da lâmina;
b) o centro de massa;
c) o momento de inércia em relação ao eixo dos *x*.

A Figura que segue mostra a lâmina.



A densidade é dada por $P(x, y) = ky$ (proporcional à distância do ponto *(x,y)* até o eixo dos *x*).
Assim, a massa é dada por:

$$m = k\int_R\int y \ dx\,dy = k\int_{-1}^{2}\int_{x^2+1}^{x+3} y \ dy\,dx = k\int_{-1}^{2} -\frac{x^4 + x^2 - 6x - 8}{2} \ dx = \frac{117}{10} = 11{,}7k.$$

As coordenadas do centro de massa são encontradas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{117}{10}}\int_{-1}^{2}\int_{x^2+1}^{x+3} xy \ dy\,dx = \frac{10}{117}\int_{-1}^{2}\frac{-x\left(x^4 + x^2 - 6x - 8\right)}{2} \ dx = \frac{35}{52}.$$

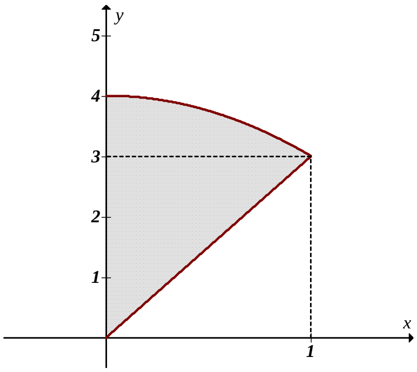
$$\bar{y} = \frac{10}{117}\int_{-1}^{2}\int_{x^2+1}^{x+3} y^2 \ dy\,dx = \frac{10}{117}\int_{-1}^{2}\frac{-x^6 - 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 27x + 26}{3} \ dx = \frac{529}{182}.$$

O momento de inércia em relação ao eixo dos *x* é dado por:

$$I_x = k\int_{-1}^{2}\int_{x^2+1}^{x+3} yy^2 \ dy\,dx = \frac{3033}{28}k.$$

34. Calcular a massa e o centro de massa da chapa da figura 7.57, considerando a densidade igual a *x*.

Segue a figura citada:



Observe que a chapa esta delimitada por $y = 4 - x^2$; $y = 3x$; $x = 0$.
Assim, a massa é dada por:

$$m = \int_R \int x \cdot dx\, dy = \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} x \;\; dy\, dx = \int_0^1 -x\left(x^2 + 3x - 4\right)\; dx = \frac{3}{4}.$$

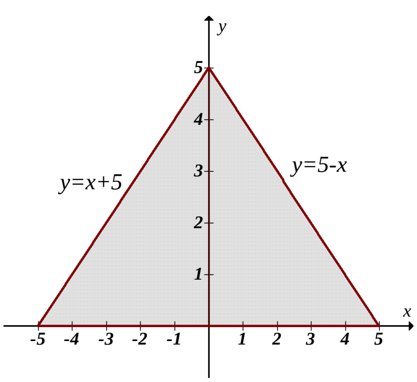
As coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{4}{3}\int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} x^2 \;\; dy\, dx = \frac{4}{3}\int_0^1 -x^2\left(x^2 + 3x - 4\right)\; dx = \frac{23}{45}.$$

$$\bar{y} = \frac{4}{3}\int_0^1 \int_{3x}^{y-x^2} xy \;\; dy\, dx = \frac{47}{18}.$$

35. Calcular a massa e o centro de massa de uma chapa com o formato de um triângulo isósceles com base *10 cm* e altura *5 cm*. Considerar a densidade constante.

O triângulo dado foi alocado no sistema cartesiano como mostra a figura que segue.



O cálculo da massa é dado por:

$$m = \int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} k \cdot \;\; dx\, dy = 25k.$$

O centro de massa é dado por:

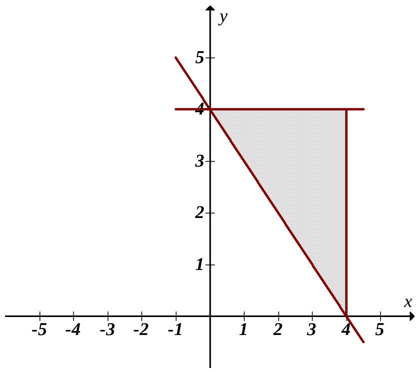
$$\bar{x} = \frac{1}{25k} \cdot k \int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} x \ dx\, dy = \frac{1}{25} \cdot 0 = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{25k} \cdot k \int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} y \ dx\, dy = \frac{1}{25} \cdot \frac{125}{3} = \frac{5}{3}$$

Observe que o centro de massa encontra-se a 5/3 cm da base sobre a sua mediatriz.

36. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos x de uma chapa delimitada por $x + y = 4$, $x = 4$ e $y = 4$. Considerar a densidade igual a uma constante k.

A Figura que segue mostra a chapa dada.



Assim, o momento de inércia em relação ao eixo dos x é dado por:

$$I_x = k \int_0^4 \int_{4-y}^{4} y^2 \ dx\, dy = 64k.$$

37. Calcular o momento de inércia de um disco circular de diâmetro *10 cm*:
a) em relação ao seu próprio centro;
b) em relação ao seu diâmetro.
Considerar a densidade igual a uma constante k.

Estamos diante de um disco de raio 5 que pode ser modelado como um círculo de centro na origem e raio $r = 5$. Usando coordenadas polares, temos:

Momento de inércia em relação ao seu centro:

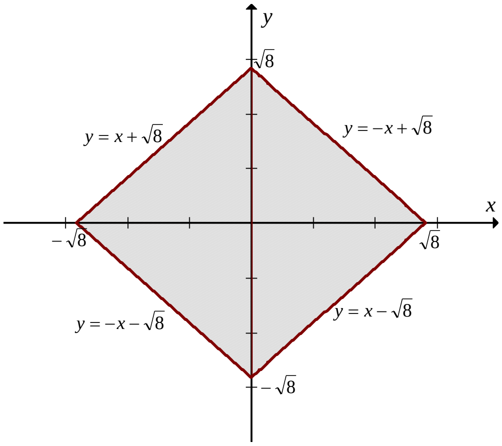
$$I_0 = \int_R \int k\left(x^2 + y^2\right) \ dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^5 kr^2 \cdot r \ dr\, d\theta = k \int_0^{2\pi} \frac{625}{4} \ d\theta = \frac{625}{4} \cdot 2\pi\, k = \frac{625k\,\pi}{2}.$$

Momento de inércia em relação ao seu diâmetro:

$$I_x = \int_R \int ky^2 \ dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^5 kr^2 sen^2\theta \cdot r \ dr\, d\theta = \frac{625\pi}{4} k.$$

38. Calcular o momento de inércia de um quadrado de lado igual a 4 cm em relação ao eixo que para por uma diagonal. Considerar a densidade constante.

A Figura que segue apresenta o quadrado alocado de forma conveniente no sistema cartesiano.



Dessa forma podemos calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos x (onde se localiza uma das suas diagonais) como:

$$I_x = \int_0^{\sqrt{8}} \int_{y-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}-y} kx^2 dxdy + \int_{-\sqrt{8}}^{0} \int_{-y-\sqrt{8}}^{y+\sqrt{8}} kx^2 dxdy = k\left(\frac{32}{3} + \frac{32}{3}\right) = k \cdot \frac{64}{3}.$$